<u>PAUTA CONTROL 1 MICROECONOMÍA II - IN702</u>

Primavera 2008

Profesor	:	Felipe Balmaceda
Auxiliares	:	Jorge Catepillán, Jorge Vásquez.

Problema 1 Considere un juego simultáneo de Γ de N jugadores, cada uno con un conjunto de acciones A_i finito. Se define el siguiente conjunto:

$$A = co(\{(u_1(\sigma), ..., u_N(\sigma)) \mid \sigma \in N.E(\Gamma))\}$$

Donde $co(K)$ es la envoltura convexa del conjunto K.

Muestre que dado cualquier elemento de A, siempre existe un *public random device* y una estrategia adecuada, que implementa como pago esperado a ese elemento de A. Acaba de probar que cualquier combinación convexa de pagos asociados a equilibrios de Nash es alcanzable mediante una "coordinación" gracias a un resultado público.

Respuesta

Consideremos un *public random device* que asigna probabilidad $0 \leq \lambda_j$ a cada equilibrio de nash del juego. Tal que $\sum \lambda_i = 1$. Vamos a demostrar que este es un equilibrio correlacionado. Para esto, lo que hay que demostrar es que $\forall i, \forall s_i | p(s_i) > 0$:

$$\sum_{s_{-i} \in S_{-i}} p(s_{-i}|s_i) u_i(s_i, s_{-i}) \geq \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} p(s_{-i}|s_i) u_i(\bar{s}_i, s_{-i}), \forall \bar{s}_i \neq s_i$$

Sea los equilibrios nash enumerados por j, representdos por σ^j. Sea $i \in I$. La probabilidad de que se juegue una estrategia s_i es:

$$p(s_i) = \sum_{j \in J} \lambda_j \sigma_i^j(s_i)$$

$$p(s_{-i}|s_i) = \frac{\sum_{j \in J} \lambda_j \sigma_i^j(s_i) \sigma_{-i}^j(s_{-i})}{\sum_{j \in J} \lambda_j \sigma_i^j(s_i)}$$

Ahora, si $p(s_i) > 0$, verificar la condición de equilibrio es equivalente a verificar:

$$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p(s_{-i}|s_i)p(s_i)u_i(s_i, s_{-i}) \geq \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p(s_{-i}|s_i)p(s_i)u_i(\bar{s}_i, s_{-i}),\ \forall \bar{s}_i \neq s_i$$

Ahora, $\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} p(s_{-i}|s_i)p(s_i)u_i(s_i, s_{-i})$ es equivalente a:

$$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \sum_{j\in J} \lambda_j \sigma_i^j(s_i)\sigma_{-i}^j(s_{-i})u_i(s_i, s_{-i})$$

$$\sum_{j\in J} \lambda_j \sigma_i^j(s_i) \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \sigma_{-i}^j(s_{-i})u_i(s_i, s_{-i})$$

$$\sum_{j\in J} \lambda_j \sigma_i^j(s_i)u_i(s_i, \sigma_{-i}^j(s_{-i}))$$

El otro término queda de la misma manera:

$$\sum_{j\in J} \lambda_j \sigma_i^j(s_i)u_i(\bar{s}_i, \sigma_{-i}^j)$$

Sea $j \in J$. Si $\sigma_i^j(s_i) = 0$, entonces ese sumando es cero en los dos lados. Si $\sigma_i^j(s_i) > 0$, entonces dicha estrategia tiene que dar la misma utilidad que jugar la estrategia mixta, es decir, $u_i(s_i, \sigma_{-i}^j) = u_i(\sigma_i^j, \sigma_{-i}^j)$. Como cada uno de los σ_j es Nash, $u_i(s_i, \sigma_{-i}^j) \geq u_i(\bar{s}_i, \sigma_{-i}^j)$ con lo que demostramos lo pedido.

Problema 2 Considere una interacción repetida del siguiente juego de etapa:

	L	M	R
U	$6, 0$	$-1, -100$	$0, 1$
D	$2, 2$	$0, 3$	$1, 1$

a) ¿Cuál es el equilibrio perfecto más alto, si ambos jugadores son de largo plazo?

b) Si el jugador 1 pudiera comprometerse publicamente a jugar siempre la misma estrategia mixta α_1, ¿Cuál α_1 escogería? ¿Cuál sería su pago asociado?

c) Muestre que cuando el jugador 2 es una sucesión infinita de jugadores de corto plazo, el máximo pago para el jugador 1 en cualquier equilibrio de Nash es 2. Para lograr lo anterior, proceda como sigue:

- Defina $v^*(\delta)$ como el supremo de los pagos del jugador 1 en cualquier equilibrio de Nash cuando su factor de descuento es δ, y suponga que $v^*(\delta) > 2$. Defina $\varepsilon = \frac{(1-\delta)(v^*(\delta)-2)}{2}$, y escoga un equilibrio σ donde el pago $v(\delta)$ para el jugador 1 sea al menos $v^*(\delta) - \varepsilon$. Muestre que bajo el perfil σ para el jugador 1, su pago esperado para el primer período debe ser mayor que 2.
(*Hint: Note que el pago del jugador 1 desde el segundo período hacia adelante no puede exceder* $v^*(\delta)$)
- Muestre que bajo σ, el jugador 2 jugará L con probabilidad positiva en el primer período, y por ende, el jugador 1 jugará D también con probabilidad positiva.
- Concluya que $v^*(\delta) - \varepsilon \leq v(\delta) \leq 2(1-\delta) + \delta v^*(\delta)$, con esto $v^*(\delta) \leq 2$.

Respuesta

a) Si ambos jugadores son de largo plazo, entonces podemos aplicar el *Folk Theorem* para saber que cualquier pago factible es resultado de un equilibrio perfecto en el subjuego.
Calculemos los minmax de ambos jugadores:
El pago minmax del jugador 1 es 0 (jugador 2 juega M).
El pago minmax del jugador 2 es 1 (jugador 1 juega U).
Ahora bien si graficamos la envoltura convexa de los pagos y trazamos los niveles de los minmax, encontramos que el mayor pago alcanzado para el jugador 1 bajo una estrategia que es perfecta en subjuegos es 4, y para el jugador 2 es 3.

b) En este caso, el jugador 1 jugará la estrategia mixta que le de su mayor pago alcanzado, es decir, 4. Es claro ver que si $\sigma_1^* = (\sigma_1(U) = \frac{1}{2}, 1-\sigma_1(D) = \frac{1}{2})$, el jugador 1 obtendrá un pago 4 cuando jugador 2 juege L. Además para σ_1^*, el jugador 2 nunca jugará M, y estará indiferente entre jugar L y R. Por ende, el jugador 1 puede asegurarse un pago arbitrariamente cercano a 4 jugando la estrategia D con probabilidad $\frac{1}{2} + \varepsilon$. De esta forma jugador 2 siempre jugará L, y jugador 1 obtendrá un pago tan cercano como él quiera a 4.

c) Sea $v(\delta)^*$ el supremo de los pagos para el jugador 1 por período en cualquier equilibrio de Nash. Supongamos que $v(\delta)^* > 2$. Sea

$$\varepsilon = \frac{(1-\delta)(v^*(\delta)-2)}{2}$$

Escogamos σ equilibrio de Nash tal que $v(\delta) \geq v(\delta)^* - \varepsilon$. Notemos que $v(\delta)^* - \varepsilon > 2$. Supongamos ahora que $v(\delta) \leq 2$ en el primer período, por ende, el pago esperado desde el segundo período hacia adelante debe ser un pago asociado a un equilibrio de Nash, que será menor o igual a $v(\delta)^*$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} v(\delta) &\leq (1-\delta)2 + \delta v(\delta) \\ v(\delta)^* - v(\delta) &\geq (1-\delta)v(\delta)^* - (1-\delta)2 \\ &= 2\varepsilon \end{aligned}$$

Lo que contradice $v(\delta) \geq v(\delta)^* - \varepsilon$. Luego $v(\delta) > 2$.

Notemos ahora que si el jugador 2 no juega L con probabilidad positiva en el período 1, entonces el jugador 1 tendrá un pago esperado menor o igual a 1, lo que es imposible por la parte anterior.
Por otra parte, si el jugador 1 no juega D con probabilidad positiva, entonces el jugador 2 jugará R con probabilidad 1, lo que también es imposible por la conclusión anterior.

Como el jugador 1 juega D con probabilidad positiva en el primer período, entonces su pago esperado cuando él juega D debe ser igual a su pago esperado total en equilibrio. Su mayor pago esperado cuando juega D en el primer período es a lo más:

$$(1-\delta)2 + \delta v^*(\delta)$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} v(\delta)^* - \varepsilon \leq \quad v(\delta) \quad &\leq (1-\delta)2 + \delta v^*(\delta) \\ \Rightarrow (1-\delta)(v^*(\delta) - 2) \quad &\leq \quad \varepsilon \\ \Rightarrow 2\varepsilon \quad &< \quad \varepsilon \end{aligned}$$

Lo que claramente contradice $v^*(\delta) > 2$. Luego $v^*(\delta) \leq 2$.

Problema 3 Considere el siguiente juego estático G escrito en forma normal:

	L	R
U	$5,1$	$0,0$
D	$4,4$	$1,5$

a) Encuentre los equilibrios de Nash.

b) Encuentre los equilibrios correlacionados.

c) Considere que el juego G se repite T veces, con $T < +\infty$. Encuentre los equilibrios perfectos del juego $G(T)$.

Suponga ahora que el juego de etapa G se repite infinitas veces, y que el factor de descuento para el jugador i, es δ_i

d) Caracterice el set de pagos que son alcanzbles bajos estrategias que son SPE. Considere $\delta_1, \delta_2 > 0$.

e) ¿Cómo cambia su respuesta en d) si $\delta_i = 0$ para algún i ?. Caracterice el nuevo set de pagos que son alcanzables bajo una estrategias que es SPE de $G(\infty)$.

f) ¿Cómo cambia su respuesta en d) si $\delta_i = 0$ para todo i ?

g) Encuentre estrategias que sustenten el mejor equilibrio encontrado en la parte d), y en e). ¿Cuáles son los $\delta' s$ mínimos para tales implementaciones?

Respuesta

a) Hay dos equilibrios de Nash en estrategias puras $(U, L), (D, R)$. Existe un equilibrio en estrategias mixtas $\sigma_1^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\sigma_2^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

b) Un equilibrio correlacionado es $p : S \longrightarrow \triangle_n$ tal que $\forall \quad d_i : S_i \longrightarrow S_i$ se tiene que:

$$\sum_{s \in S} p(s) u_i(s_i, s_{-i}) \geq \sum_{s \in S} p(s) u_i(d_i(s_i), s_{-i}) \quad \forall i \quad (*)$$

Posibles perfiles de estrategias $s \in S$

$I\!\!P(\cdot)$	s
p_1	(U, L)
p_2	(D, L)
p_3	(U, R)
p_4	(D, R)

El pago esperado de seguir la estrategia:

$$\begin{aligned} I\!\!E(u_1) &= 5p_1 + 0p_2 + 4p_3 + 1p_4 \\ I\!\!E(u_2) &= 1p_1 + 0p_2 + 4p_3 + 5p_4 \end{aligned}$$

Existen dos formas de desviarse:
<u>Primera forma:</u>

i. $d_1(U) = D, d_1(D) = D$

ii. $d_2(U) = U, d_2(D) = U$

iii. $d_3(U) = D, d_3(D) = U$

Usando $(*)$ para cada caso, se llega a que:

$$\begin{aligned} p_1 &\geq p_2 \\ p_4 &\geq p_4 \\ p_1 + p_4 &\geq p_2 + p_3 \end{aligned}$$

<u>Segunda forma:</u>

i. $d_1(\cdot) = L$

ii. $d_2(\cdot) = R$

iii. $d_3(L) = R, d_3(R) = L$

Usando $(*)$ para cada caso, se llega a que:

$$\begin{aligned} p_4 &\geq p_2 \\ p_1 &\geq p_3 \\ p_1 + p_4 &\geq p_2 + p_3 \end{aligned}$$

Luego, la condición que tiene que cumplir $p(\cdot)$ para que sea equilibrio correlacionado son las siguientes:

$$\begin{aligned} p_1 &\geq p_2 \\ p_4 &\geq p_3 \\ p_4 &\geq p_2 \\ p_1 &\geq p_3 \\ \sum_i p_i &= 1 \end{aligned}$$

c) Si $T < +\infty$, entonces usamos *backward induction* para resolver el juego. Como hay 3 equilibrios de Nash, entonces tenemos al menos 3^T SPEs, que son básicamente jugar un equilibrio de Nash cada período.

d) Para encontrar el set de pagos alcanzables bajo una estrategia que sea SPE, calculamos los pagos minmax de cada jugador.
Para el jugador 1, su pago minmax es 1 (Jugador 2 juega R).
Para el jugador 2, su pago minmax es 1 (Jugador 1 juega U). Luego, el set de pagos con pagos mayores al minmax queda caracterizado como sigue:

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq \frac{-x}{3} + \frac{16}{3}, y \leq -3x + 16, x > 1, y > 1 \right\}$$

e) Si $\delta_1 = 0$, entonces el jugador 1 siempre jugará el Nash estático todos los períodos, a menos que se puedan coordinar con el jugador 2 (mediante un *public random device*) y obtener un pago más alto. Sin embargo, dado que jugador 1 puede asegurarse el mayor pago posible jugando U, no existirá otra combinación que le un pago mayor que 5, por ende al jugador 2 no le queda más que jugar L todos los períodos. El set alcanzable de pagos bajo un SPE es un punto (5,1).
Lo mismo ocurre cuando el jugador 2 es de corto plazo ($\delta_2 = 0$), donde el set es $(1, 5)$.

f) Si los dos jugadores son de corto plazo, el único resultado posible en cualquier período, debe ser un equilibrio del juego de etapa. En este caso, es imposible llegar a un acuerdo. el set de pagos sería $R^{'} = \left\{(1, 5), (5, 1), (\frac{5}{2}, \frac{5}{2})\right\}$.

g) Para implementar el equilibrio (4,4), una estrategia posible es la siguiente: "Jugar (D, L) en t, si se jugó (D,L) en $t - 1$, sino jugar la estrategia mixta de ahi hacia adelante" Luego, el jugador estará dispuesto a coludirse para todo $\delta \geq \underline{\delta}$, con $\underline{\delta}$ que resuelve:

$$4 = 5(1 - \underline{\delta}) + 2{,}5\underline{\delta}$$

La cual se cumple para $\underline{\delta} = 0, 4$.

Problema 4 a) Muestre que si existe un único perfil de estrategias que sobreviven a la eliminación de estrategias estrictamente dominadas, entonces tal perfil es un equilibrio de Nash.

b) Muestre que cualquier estrategia estrictamente dominante en un juego $\Gamma_N = [I, \{\triangle(S_i)\}, \{u_i(\cdot)\}]$ debe ser un estrategia pura.

c) Pruebe que si una estrategia s_i es estrictamente *dominada* en un juego $\Gamma_N = [I, \{\triangle(S_i)\}, \{u_i(\cdot)\}]$, entonces cualquier estrategia que ponga peso positivo en s_i también lo es.

d) Argumente si un jugador posee dos estrategias débilmente dominantes, entonces para cualquier estrategia escogida por el oponente, las dos estrategias le brindan el mismo pago.

e) Construya un ejemplo de un juego de dos jugadores en el cual un jugador tenga dos estrategias (puras) débilmente dominantes, pero su oponente prefiere que éste juege una en vez de la otra.

Respuesta

a) Sea σ el perfil de estrategias que sobrevive a la eliminación de estrategias estrictamente dominadas. Supongamos que no es equilibrio de Nash. Entonces existe al menos un jugador que tiene incentivos a desviarse a otra estrategia. Podemos asumir entonces que existe al menos una estrategia pura tal que para cierto jugador; $u_i(s_i', \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$. Esto quiere decir que al menos para alguna estrategia del resto de los jugadores, que nunca es eliminada (ie, siempre puede ser ocupada al momento de iterar), s_i' da mayor utilidad. Luego s_i' tiene que sobrevivir a la eliminación de estrategias, y por la desigualdad σ no sobrevive. $\rightarrow\leftarrow$.

Muestre que si existe un único perfil de estrategias que sobreviven a la eliminación de estrategias estrictamente dominadas, entonces tal perfil es un equilibrio de Nash.

b) Supongamos que no es una estrategia pura, entonces en particular, entonces, $\forall s_i, \forall s{-}i$:

$$u_i(\sigma_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$$

Si multiplicamos a cada lado por $\sigma_i(s_i)$ y sumamos, como al menos una de las probs. debe ser mayor que cero, queda:

$$\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) u_i(\sigma_i, s_{-i}) > \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) u_i(s_i, s_{-i})$$

Que es equivalente a:

$$u_i(\sigma_i, s_{-i}) > \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) u_i(s_i, s_{-i}) = u_i(\sigma_i, s_{-i})$$

$\rightarrow\leftarrow$

c) Sea s_i una estrategia estrictamente dominada. Luego, $\exists \sigma_i | u_i(\sigma_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}), \forall s_{-i}$ Ahora sea σ_i^* una estrategia mixta que pone peso estrictamente positivo en s_i. Sea $\bar{\sigma}_i$ definida como:

$$\bar{\sigma}_i(s_i') = \sigma_i^*(s_i') + \sigma_i^*(s_i)\sigma_i(s_i'), \text{ si } s_i' \neq s_i$$
$$\bar{\sigma}_i(s_i') = \sigma_i^*(s_i)^2, \text{ si } s_i' = s_i$$

Claramente es una distribución de probabilidad, y además:

$$u(\bar{\sigma}_i, s_{-i}) = [\sum_{s_i' \neq s_i} (\sigma_i^*(s_i') + \sigma_i^*(s_i)\sigma_i(s_i'))u_i(s_i', s_{-i})] + \sigma_i^*(s_i)^2 u_i(s_i, s_{-i})$$

Que es igual a:

$$[\sum_{s_i' \in S_i} \sigma_i^*(s_i')u_i(s_i', s_{-i})] - \sigma_i^*(s_i)u_i(s_i, s_{-i}) + \sigma_i^*(s_i) \sum_{s_i' \in S_i} \sigma_i(s_i')u_i(s_i', s_{-i})$$

$$u_i(\sigma_i^*, s_{-i}) + \sigma_i^*(s_i)[u_i(\sigma_i, s_{-i}) - u_i(s_i, s_{-i})] > u_i(\sigma_i^*, s_{-i})$$

Con lo que se tiene lo pedido.

d) Sean σ_i, σ_i' dos estrategias debilmente dominantes. Entonces para todo s_{-i}, se tiene que $u_i(\sigma_i', s_{-i}) \geq u_i(\sigma_i, s_{-i})$, y $u_i(\sigma_i, s_{-i}) \geq u_i(\sigma_i', s_{-i})$, pues cada una domina debilmente a la otra. Esto implica que $u_i(\sigma_i', s_{-i}) = u_i(\sigma_i, s_{-i})$, $\forall s_{-i}$

e) Basta ver el ejemplo:

	L	R
U	$2,1$	$1,0$
D	$2,5$	$1,4$

Problema 5 Rotten Kid (Becker 1974). Suponga que un padre y un hijo participan en el siguiente juego. Primero el hijo toma una acción A, que resulta en un ingreso para él, $I_h(A)$, y en un ingreso para el padre $I_p(A)$. En segundo lugar el padre observa ambos ingresos y escoge una herencia para dejar al hijo. La ganancia del hijo es $U(I_h + B)$, y la del padre $V(I_p - B) + kU(I_h + b)$.

Suponga A positivo, que las funciones de ingreso son estrictamente cóncavas, con un máximo cada una, que la herencia puede ser positiva o negativa y que las funciones de utilidad son crecientes y estrictamente cóncavas.

Demuestre que el hijo escoge la acción que maximiza el ingreso agregado de la familia, aún cuando sólo el padre tiene una función de utilidad de algún modo altruista.

Respuesta

La estrategia del hijo es la acción A, la estrategia del padres es una función $B(I_h(A), I_p(A))$. Dado esto, para encontrar el SPE hay que ir de atrás hacia adelante. Es decir, primero veamos lo que hace el padre. Dada una acción A, el padre busca el B^* que maximiza su utilidad.

$$max_b V(I_p - B) + kU(I_h + B)$$

Derivando y igualando a cero, la condición que queda es:

$$V'(I_p - B^*) + kU'(I_h + B^*) = 0$$

La función de reacción B depende implícitamente de $I_h(A)$ y $I_p(A)$, que es lo que observa el padre.

Ahora, para calcular el SPE es necesario ver lo que hace el hijo, el maximiza su utilidad, asumiendo que el padre juega B^*:

$$max_A U(I_h(A) + B^*(I_h, I_p))$$

Las condiciones de primero orden quedan:

$$U'(I_h + B^*(I_p, I_h))(I_h' + \frac{\partial B^*}{\partial I_h} I_h' + \frac{\partial B^*}{\partial I_p} I_p') = 0$$

Todo está evaluado en A^*. De la última relación, como $U(.)$ es creciente entonces la derivada es estrictamente mayor que cero. Luego la igualdad que tenemos es:

$$I_h' + \frac{\partial B^*}{\partial I_h} I_h' + \frac{\partial B^*}{\partial I_p} I_p' = 0$$

Ahora veamos la primera ecuación. Si derivamos con respecto a A en esa ecuación, nos queda el siguiente resultado:

$$V''(I_p - B^*)(I_p' - \frac{\partial B^*}{\partial I_h} I_h' - \frac{\partial B^*}{\partial I_p} I_p') + kU''(I_h + B^*)(I_h' + \frac{\partial B^*}{\partial I_h} I_h' + \frac{\partial B^*}{\partial I_p} I_p') = 0$$

Evaluando en A^* y aplicando el resultado anterior queda que:

$$V''(I_p(A^*) - B^*(I_p(A^*), I_h(A^*))(I_p'(A^*) + I_h'(A^*)) = 0$$

Y como $V(.)$ es estrictamente concava, queda que:

$$I_p'(A^*) + I_h'(A^*) = 0$$

Luego el A^* que elige el niño es el mismo que maximiza la suma de los ingresos familiares. Hay que notar que el SPE del juego es:

$$SPE = (A^*, B^*(I_p(A^*), I_h(A^*)))$$

Problema 6 *ArturitoSoft* es una empresa de software que vende un *browser* X. Cada año aparece una empresa nueva que puede crear un nuevo browser que compite con X o un motor de búsqueda. Viendo lo que hizo esta nueva empresa, *ArturitoSoft* puede elegir mejorar X o no hacerlo. Al final del año, independiente del resultado, la empresa desaparece, dejando su lugar para una nueva firma. Las utilidades anuales para cada ontingencia están descritas en la siguiente tabla, donde el primer valor es el beneficio de *ArturitoSoft*:

	Browser	Motor de búsqueda
A	1,0	3,1
M	2,2	4,1

Si *ArturitoSoft* tiene una vida infinita, y una tasa de descuento es $\delta = 0{,}9$, verifique si las siguientes estrategias son SPE, y encuentre el pago resultante.

1.
   - Si la nueva firma produce un browser y *ArturitoSoft* ha actualizado X cada vez que una firma nueva a producido un browser, entonces *ArturitoSoft* actualiza su producto.
   - De otro modo no actualiza.
   - Una nueva firma produce un motor de búsqueda si *ArturitoSoft* ha actualizado X cada vez que una de las firmas anteriores produjo un browse.
   - De otro modo, la firma produce un browser.
2. En cada período *ArturitoSoft* actualiza su producto ssi la firma competidora produce un browser. La firma entrante produce un motor de búsqueda.

Respuesta

i. Primero hay que ver que la estrategia de la firma entrante es una mejor respuesta dada la estrategia de *ArturitoSoft*. Veamos primero el primer caso. Si siempre se ha actualizado X dado lo anterior, y la firma produce un motor de búsqueda, entonces la nueva firma puede hacer dos cosas. Si produce un motor de búsqueda, entonces *ArturitoSoft* no va a actualizar, con lo que la nueva firma gana 1. Si produce un browser, entonces *ArturitoSoft* actualiza, con lo que la nueva firma gana 0. En el segundo caso, si la firma produce un browser *ArturitoSoft* no actualiza, con lo que la nueva firma gana 2, y si produce un motor de búsqueda *ArturitoSoft* no actualiza, por lo que gana 1. Luego la estrategia de la nueva firma es mejor respuesta a la estrategia de *ArturitoSoft*.

   Veamos ahora el problema para *ArturitoSoft*. Si estamos en el primer caso, entonces si la nueva firma produce un browser, el valor presente de actualizar es $1 + \frac{4\delta}{1-\delta}$. En cambio, el valor de no actualizar es $2 + \frac{2\delta}{1-\delta}$. Como $\delta = 0{,}9$ se tiene que el valor de actualizar es 37 y el de no actualizar 20. Por lo tanto está bien la estrategia. Por otro lado, si estamos en el segundo caso, entonces como la firma nueva va a producir siempre un browser, a *ArturitoSoft* le conviene no actualizar.

ii. Para la firma entrante, si ésta produce un browser entonces gana 0. Si produce un motor de búsqueda gana 1. Por otro lado, para *ArturitoSoft*, si cuando la firma entrante produce un software esta actualiza, el vpn es $1 + \frac{4\delta}{1-\delta} = 37$. Ahora, si no actualiza, entonces va a tener un vpn de $2 + \frac{4\delta}{1-\delta} = 38$ Luego la situación descrita no puede ser un nash.