Tarea 2 - IN702
Primavera 2008

Profesor	:	Felipe Balmaceda
Auxiliar	:	Jorge Catepillán, Jorge Vásquez

Problema 1 (Principal-Agente) Considere un juego de dos jugadores. El jugador 2 debe decidir si ejercer un nivel de esfuerzo 0 o 1. El jugador 1, simultáneamente, debe decidir si pagar o no al jugador 2. El jugador 1 puede elegir no pagar a 2, o pagarle una cantidad igual a 4 si el jugador 2 ejerció un esfuerzo alto (el jugador 2 no recibe pago si ejerció un esfuerzo bajo). La utilidad del jugador 1 es cero si el jugador 2 elige ejercer un nivel de esfuerzo bajo; es $5 - w$ si el jugador 2 ejerce un nivel de esfuerzo alto y el jugador 1 le paga un sueldo w. La utilidad del jugador 2 es $\sqrt{w} - e$, donde w es su ingreso y e el nivel de esfuerzo.

a) Encuentre la forma normal de este juego.

b) Encuentre los equilibrios de Nash del juego.

c) ¿Existen estrategias dominadas?

d) Encuentre los equilibrios en los cuales el jugador 1 mueve primero.

e) Ahora y en las partes que siguen, asuma que el juego se repite infinitamente.
Suponga que el jugador 1 es paciente con factor de descuento δ y el jugador 2 es de corto plazo ($\delta = 0$).
Encuentre el conjunto de pagos implementables en equilibrio.

f) Encuentre las estrategias que soportan el mejor pago de (e).

g) Describa el set de pagos implementables en equilibrios perfectos en sub-juego si ambos jugadores son de largo plazo.

Problema 2 (Duopolio de Stackelberg) Considere el siguiente juego repetido de duopolio de Stackleberg. Existe una firma que vive infinitamente, la cual debe enfrentarse en cada período a una firma de corto plazo, es decir, una firma que está presente sólo por un período y luego desaparece del mercado (es decir, a lo largo de su existencia, la firma de largo plazo enfrenta a distintas firmas que viven sólo un período).
En cada tiempo t, la firma de corto plazo fija primero su cantidad x_t. Luego, conociendo x_t, la firma de largo plazo fija su cantidad y_t y vende su bien a precio $p_t = 1 - (x_t + y_t)$. Los costos marginales de las firmas son nulos. Las firmas de corto plazo maximizan sus ganacias del período en que viven. Por el contrario, la firma de largo plazo, cuyo factor de descuento es $\delta = 0{,}99$, maximiza el flujo descontado de sus utilidades. En el comienzo de cada período, las acciones previamente tomadas son de conocimiento común.

a) Determine el equilibrio perfecto en subjuegos si el juego es finito, es decir, $t \in \{1, 2, ..., T\}$

b) Ahora considere el juego repetido indefinidamente. Muestre que la siguiente estrategia implementa $x_t = 1/4$ e $y_t = 1/2 \quad \forall t \geq 0$, como equilibrio perfecto en subjuegos: "Mientras no hayan desviaciones, la firma de largo plazo juega:

$$\begin{aligned} y(x) &= 1/2 \quad \text{si} \quad x \leq 1/2 \\ y(x) &= 1-x \quad \text{si} \quad 1/2 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

y la firma de corto plazo juega 1/4. Si la firma de corto plazo se ha desviado, la firma de largo plazo juega $y(x) = \frac{1-x}{2}$, y de existir desviaciones de la firma de largo plazo, la de corto plazo juega 1/2".

Problema 3 (Licitaciones) Un vertedero debe ser ubicado en alguna de la n comunas de una ciudad. Suponga que las desutilidades de las ciudades por acoger este proyecto están distribuidas uniformemente en $[0,1]$ y son independientes. Cada comuna conoce cómo le afecta la presencia del vertedero, pero no sabe con certeza el efecto sobre el resto (sólo sabe cómo se distribuye la desutilidad). El gobierno de la ciudad propone el siguiente mecanismo para resolver el problema: cada comuna debe señalar la cantidad por la cual querría ser compensada por recibir el vertedero, gana la ciudad que reporte la menor compensación, y las otras $n-1$ le pagan esta cantidad en iguales fracciones (es decir, si la compensación es c cada comuna le paga $\frac{c}{n-1}$). Encuentre un equilibrio simétrico del juego.
Hint: Suponga que la estretegia de equilibrio $b(\cdot)$ es una función invertible y diferenciable.

Problema 4 (Mercado de los Limones) Suponga que en un mercado se pueden comprar autos nuevos y autos usados. La calidad q de un auto nuevo se distribuye uniformemente en $[\alpha, \beta]$, y al momento de comprar ni el comprador ni el vendedor conocen la calidad. Los autos nuevos se importan y revenden competitivamente a precio p^*.
Existe también un continuo de autos usados cuya calidad también se distribuye uniformemente en $[\alpha, \beta]$; sin embargo, el que vende un auto usado conoce su calidad y está dispuesto a vender sólo si $p^u \geq q$, donde p^u es el precio de mercado de un auto usado. La utilidad que obtiene un comprador de un auto de calidad q por el que paga p, sea nuevo o usado es $\theta q - p$, con $1 + \frac{\beta}{\alpha+\beta} > \theta \geq 1$. Todos los compradores son idénticos, neutrales al riesgo y su utilidad de reserva es cero. En la pregunte se pide que encuentre y caracterice el equilibrio de mercado.

a) Suponga que una persona compra un auto nuevo. ¿Cuál es la calidad esperada q^* del auto? Luego, usando este resultado, deduzca una condición para p^* tal que un comprador siempre esté dispuesto a comprar un auto nuevo. En el resto de la pregunta, suponga que esta condición se cumple.

b) Suponga que el precio de cada auto usado es p^u. ¿Quiénes venderán su auto usado? Muestre que la calidad promedio de los autos usados vendidos en el mercado será

$$q^u = \frac{1}{2}(\alpha + p^u)$$

c) Demuestre que si en equilibrio se venden autos nuevos y usados, entonces a todos los compradores les es indiferente comprar un auto nuevo o usado.

d) Demuestre que si $\theta = 1$, el mercado de los autos usados desaparece. Explique la intuición económica de este resultado. *Hint: piense antes cuál es el máximo precio al que se puede vender un auto usado.*

Para simplificar, suponga en adelante que $p^* = \theta q^*$

e) Demuestre que si $\theta > 1$, en equilibrio

$$p^u = \frac{2}{2-\theta}\left(p^* - \frac{\theta\beta}{w}\right) = \frac{\theta\alpha}{2-\theta}$$

Interprete económicamente esta condición. *Hint: use la primera igualdad.*

f) Muestre que en equilibrio, los autos usados valen menos que los autos nuevos, y obtenga una expresión para la diferencia. De una condición si es necesario. Explique por qué eso ocurre en este modelo.

Problema 5 Dos socios deben disolver una sociedad. El socio 1 posee un porcentaje s de la sociedad, mientras que el socio 2 posee $1-s$. Los socios acuerdan jugar el siguiente juego: "el jugador 1 dice un precio p por el total de la sociedad y el jugador 2 decide si vender a un precio $(1-s)p$ o comprar a ps". Suponga que es conocimiento común que la valoración de cada socio por la sociedad es independiente una de la otra y ambas están distribuidas uniformemente en $[0,1]$, pero cada valoración es información privada. ¿Cuál es el EBP?

Problema 6 El consorcio de investigación y desarrollo Alphabeta está compuesto por dos firmas (que no compiten entre ellas). Las reglas del consorcio establecen que cualquier invención de una de las firmas debe ser totalmente compartida con la otra. Suponga que hay un nuevo invento llamado "Zigger" que potencialmente puede ser desarrollado por cualquiera de las firmas. Desarrollar este nuevo producto tiene un costo $c \in (0,1)$. El beneficio del invento para cada firma es sólo conocido por ella. Formalmente, cada firma i es de tipo θ_i, provenientes de dos distribuciones independiente y uniformes en $[0,1]$, y el beneficio por Zigger para la firma i de tipo θ_i es θ_i^2.
El *timing* es el siguiente: las dos firmas observan privadamente su tipo. Luego deciden simultáneamente si desarrollar o no el proyecto Zigger.

a) Encuentre la condición para que la firma i decida desarrollar el proyecto. Asuma que en caso de indiferencia cada firma lo desarrolla).

b) Compare esta ecuación con el caso en que sólo existe una firma. Discuta.

c) Encuentre el equilibrio bayesiano del juego.

d) Dé las probabilidades de que ninguna firma desarrolle el proyecto, lo haga sólo una de ellas, y la probabilidad de que lo desarrollen ambas.

Problema 7 (Myerson (1981)) Considere un vendedor que desea rematar un objeto sin valor para él. Existen n compradores, cada uno con valoración en $[0,1]$.

a) Suponga que $F_i(x) = x$ para todo $i = 1, ..., n$. Calcule el mecanismo ṕtimo y discuta la estática comparativa con respecto a n.

b) Considere ahora $n = 2$, pero el primer agente tiene distribución $F(x) = x$ y el segundo $F(x) = x^p$, con $p \in (0, +\infty)$. ¿Para qué valores de p el segundo comprador tiene una mayor/menor valoración del bien? Explique.

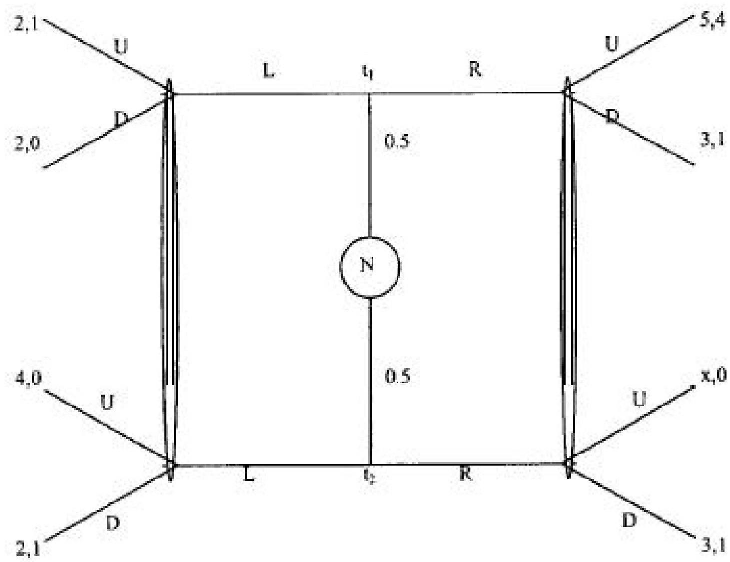
c) Encuentre el mecanismo óptimo (que maximiza ganancias) en este caso, comente la asimetría del mecanismo, ¿ A quién favorece?

Suponga ahora que hay sólo un comprador con distribución x^p y recalcule el mecanismo óptimo.

d) Calcule la ganancia esperada del vendedor y la renta esperada del comprador con este mecanismo.

e) Una mejora en la distribución del comprador 2, ¿Mejora su renta? ¿Mejora las ganancias del vendedor? Explique si sus resultados le parecen intuitivos o no.

Problema 8 Suponga el siguiente juego. Primero mueve la naturaleza, decidiendo el tipo del jugador 1, $t \in \{t_1, t_2\}$. El sabe su tipo, y decide jugar L o R. El jugador 2 no sabe el tipo de 1, pero puede ver la acción que juega. Dado esot decide si jugar U o D. Los pagos están representados en el siguiente diagrama:



i. Para $x = 2$ encuentre los equilibrios bayesianos en estrategias puras sepradores.

ii. Demuestre que para $x = 4$ no hay equilibrios separadores.

iii. ¿Existen equilibrios *pooling* para $x = 2$?