MICROECONOMÍA II IN702

Profesor Cátedra : Felipe Balmaceda
Profesores Auxiliares : Paola Bordón, Gonzalo Cisternas

Pauta Examen

Problema 1

(a) (insertar grfico)

(b) El entrante (jugador 1) cree que el incumbente (jugador 2) es fuerte con probabilidad π_0. Adems, sabemos que un incumbente fuerte siempre pelea, ya que es su estrategia dominante, mientras que un incumbente dbil siempre acomoda (estrategia dominante).
Luego, la utilidad esperada del jugador 1 en caso de entrar o no es:

$\mathbb{E}[U_1(E)] = \pi_0(b-1) + (1-\pi_0)b$
$\mathbb{E}[U_1(NE)] = 0$

Por lo tanto, si $\gamma = \frac{\pi_0}{1-\pi_0}\frac{1-b}{b} \neq 1$, existe un nico equilibrio definido como sigue:

• Si $\gamma > 1 \Rightarrow \mathbb{E}[U_1(E)] < E[U_1(NE)] \Rightarrow$ el jugador 1 no entra.

• Si $\gamma < 1 \Rightarrow \mathbb{E}[U_1(E)] > E[U_1(NE)] \Rightarrow$ el jugador 1 siempre entra.

• Si $\gamma = 1 \Rightarrow$ esta indiferente entre entrar y no entrar, por lo que puede hacer un mixing habiendo ms de un equilibrio.

(c) Si $\gamma = 1$ y definiendo p como la probabilidad de que el entrante entra el set de EBP ser:

$EBP = \{(\sigma_1 = (p, 1-p)); \sigma_2(A/debil) = 1, \sigma_2(A/fuerte) = 0, \sigma_2(P/debil) = 0, \sigma_2(P/fuerte) = 1; (\pi_0, 1-\pi_0)\}$ $\forall p \in [0,1]$.

(d) Veamos ahora el equilibrio en los dos perodos.

Considere la siguiente creencia en el periodo dos: Pelea en el perodo uno implica incumbente de tipo dbil. Despues de observar pelea en el periodo uno, el entrante en el periodo dos cree que el incumbente es dbil. Esto implica que el entrante entra en el perodo dos dado que segun l el incumbente acomodara. El pago para el incumbente en este caso para el periodo dos es 0 dado que si es debil acomoda y si es fuerte pelea y obtiene 0 en cada caso. El pago total si la entrada ocurre en el periodo uno es -1 si es debil y 0 si es fuerte.
Supongamos que el entrante observa acomodar en el periodo uno. Dado la estrategia de equilibrio, el entrante en el periodo dos cree que el incumbente es debil con probabilidad $(1-\pi_0)$. Dado que el segundo periodo es el ultimo y que $\gamma > 1$, el unico equilibrio es no entrar y el incumbente obtiene $a > 1$ y el entrante 0. El objetivo del entrante en el periodo uno es entonces maximizar $\mathbb{E}[U_1(s_1^E)]$, donde $s_1^E \in \{E, NE\}$, mientras que el objetivo del incumbentes es maximizar $\mathbb{E}[U_2(s_1^I)] + a$, donde $s_1^I \in \{P, A\}$.
Si el incumbente acomoda en el periodo uno independiente de cual es su tipo obtiene un pago total de $a > 0$ si es debil y $a-1 > 0$ si es fuerte. Observe que esto implica que: (i) el incumbente debil obtiene un mayor pago total por acomodar en el periodo uno que peleando en el periodo uno $-\ a > -1$; y (ii) el incumbente fuerte obtiene un mayor pago total por acomodar en el periodo uno que peleando en el periodo uno $-\ a-1 > 0$, dado que $a > 0$.

Problema 2

Resuelto en clase Auxiliar.

Problema 3

Sea v_i la valoración de la sociedad del jugador $i = 1, 2$. Una vez aunnunciada la oferta p, el socio 2 tiene como estrategia dominante vender si $p > v_2$. En tal caso el socio 1 resuelve

$$\max_{p \geq 0} (v_1 - (1-s)p)Prob(p > v_2) + psProb(p < v_2)$$

Como $Prob(p > v_2) = 1 - p$, la condición de primer orden queda:

$$v - 2p + s = 0 \iff p = \frac{v+s}{2}$$

Así, la estrategia del socio 1 en equilibrio es $p(v) = \frac{v+s}{2}$

Problema 4

Tenemos

	H	T
H	$1, -1$	$-1, 1$
T	$-1, 1$	$1, -1$

(a) Es directo que no hay equilibrio en estrategias puras. En estrategias mixtas el único equilibrio es $((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$.

(b)Perturbamos el juego de la siguiente forma:

	H	T
H	$1 + \theta_1, -1$	$-1, 1$
T	$-1, 1$	$1, -1 + \theta_2$

Con $\theta_i \sim U[0, x]$. Dados $c_1, c_2 \in [0, x]$, definimos las siguientes estrategias:

$$\sigma_1(H) = Prob(\theta_1 > c_1) = 1 - \frac{c_1}{x}$$

$$\sigma_2(T) = Prob(\theta_2 > c_2) = 1 - \frac{c_2}{x}$$

El jugador 1 juega H si y sólo si:

$$U_1(H) = (1 + \theta_1)\frac{c_2}{x} - 1(1 - \frac{c_2}{x}) \geq -1\frac{c_2}{x} + 1(1 - \frac{c_2}{x}) = U_1(T)$$

es decir, si y sólo si

$$\theta_1 \geq \frac{2(x - 2c_2)}{c_2}$$

Análogamente se prueba que 2 jugará T si y sólo si:

$$\theta_2 \geq \frac{2(2c_1 - x)}{c_1}.$$

Imponiendo $c_1 = \frac{2(x-2c_2)}{c_2}$, $c_2 = \frac{2(2c_1-x)}{c_1}$ y notando entonces que $c_1 = x - c_2$, se llega a que

$$c_2^2 - c_2(4 + x) + 2x = 0$$

de donde $c_2 = \frac{4+x\pm\sqrt{16+x^2}}{2}$. Tomado raíz positiva es directo verificar que $0 \leq c_2 \leq x$ y se cumple que:

$$\lim_{x\to 0}\sigma_2(T) = 1 - \lim_{x\to 0}\frac{4+x+\sqrt{16+x^2}}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\sigma_1(H) = \frac{1}{2}$$

usando las ecuaciones anteriores. Mediante este método se recupera el equilibrio inicial.

Problema 5

El equilibrio de Rubinstein implica que la fracción esperada del retorno para el jugador 1/2 es $\pi/1-\pi$ cuando el jugador 1 ofrece en cada ronda de negociación con probabilidad π. Así, $(1,1)$ será equilibrio si y sólo si:

$$\pi Rp(1,1) - 1 \geq \pi Rp(0,1)$$
$$(1-\pi)Rp(1,1) - 1 \geq (1-\pi)Rp(0,1)$$

que es equivalente a

$$R \geq \frac{1}{[p(1,0)-p(0,1)](1-\pi)} \geq \frac{1}{[p(1,0)-p(0,1)]\pi}$$

pues $\pi \geq \frac{1}{2}$. Esta condición descarta que $(0,1)$ o $(1,0)$ sea equilibrio.

(a) Si $p(1,1)+p(0,0) > 2p(0,1)$, bajo la condición anterior es posible que $(0,0)$ sea equilibrio. Para ello es necesario que

$$\pi Rp(0,0) \geq \pi Rp(1,0) - 1$$
$$(1-\pi)Rp(0,0) \geq (1-\pi)Rp(1,0) - 1$$

En tal caso se requiere que la distribución de probabilidad satisfaga que $p(1,0)-p(0,0)$ es cercano a $p(1,1)-p(1,0)$. Bajo estas hipótesis obtenemos dos equilibrios, $(1,1)$ y $(0,0)$. Decimos entonces que invertir es una *estrategia complementaria.*

(b) Bajo $p(1,1)+p(0,0) < 2p(0,1)$ se obtiene:

$$p(1,0)-p(0,1) < p(1,0)-p(0,0) \Rightarrow [p(1,0)-p(0,1)]\pi R < [p(1,0)-p(0,0)]\pi R$$

Pero la condición de equilibrio para $(1,1)$ y $(0,0)$ en este caso implica que:

$$1 < [p(1,0)-p(0,1)]\pi R < [p(1,0)-p(0,0)]\pi R < 1$$

que es una contradicción. Así, si $(1,1)$ es equilibrio entonces $(0,0)$ no puede serlo. Decimos en este caso que la distribución de probabilidad implica que invertir es una *estrategia suplementaria.*

(c) Supongamos por ejemplo que el jugador 2 tiene un derecho s_2 de fracción del retorno total (y el jugador 1 no tiene derecho alguno). En tal caso la fracción esperada de equilibrio para el jugador 2 será

$$x_2 = max\{1-\pi, s_2\}$$

y la del jugador 1

$$x_1 = min\{\pi, 1-s_2\}$$

Para el caso $\pi = 1$ con factores de descuento idénticos $x_2 = max\{\frac{\delta}{1+\delta}, s_2\}$ (Sutton, RES, 1986). Así, $(1,1)$ es equilibrio si se cumple:

$$x_i Rp(1,1) - 1 \geq x_i Rp(0,1),\ i = 1,2.$$

Eventualmente una probabilidad alta de que el jugador 1 elija en cada ronda de negociación sumado a un bajo derecho de propiedad del jugador 2, hace que la restricción anterior para el caso $i = 2$ sea difícil de cumplir. Supongamos entonces que $x_2 = max\{1-\pi, s_2\} = s_2$ (es decir, domina el poder de elección del jugador 1) y que 2 ahora tiene la opción de vender tal derecho a un precio r a determinar en el caso que ambos inviertan. Para que $(1,1)$ sea equilibrio 2 resuelve:

$$\max_{r\geq 0}\ rs_2 - 1$$

$$s.t.\ Rp(1,1) - 1 - rs_2 \geq (1-s_2)Rp(0,1),\ i = 1,2.$$

es decir, elige un precio al cual venderá su derecho en el caso que ambos inviertan, sujeto a que el individuo 1 es inducido a invertir bajo esta promesa de venta. Si la solución r^* verifica que

$$r^* s_2 - 1 > s_2 p(0,1)R$$

invertir es un equilibrio. Análisis similares pueden hacerse cuando el derecho de propiedad de 2 ($s_2 > 1 - \pi$) y cuando 1 es quien tiene el derecho inicial.