MICROECONOMÍA II IN702

Profesor Cátedra	:	Felipe Balmaceda
Profesores Auxiliares	:	Paola Bordón, Gonzalo Cisternas

Pauta Problema 2, Control 1

Problema 2

(a) (2.0 pts) Sea Γ es un juego en forma extensiva. Si s_i' es una estrategia del jugador i que difiere de s_i^* sólo en la acción prescrita despueés de historias que no ocurren bajo s_i^*, probar que si (s_i^*, s_{-i}^*) es N.E. entonces también lo es (s_i', s_{-i}^*).

R: Supongamos que T es el conjunto de etapas del juego, e I el conjunto de jugadores. Definamos el siguiente conjunto:

$$H = \bigotimes_{t \in \mathrm{T}} \bigotimes_{i \in I} A_{i,t}$$

Con $A_{i,t}$ el conjunto de acciones para el jugador i en la etapa t. H corresponde al conjunto de historias posibles del juego. Para $h \in H$ definamos además

$$p^*(h) = \text{Prob}(h \text{ se juegue bajo } (s_i^*, s_{-i}^*))$$

$$p'(h) = \text{Prob}(h \text{ se juegue bajo } (s_i', s_{-i}^*))$$

$u_i((s_i, s_{-i})|h)$: Utilidad que obtiene el jugador i cuando la estrategia es s condicional en que se jugó h.

Dado que s_i' difiere de s_i^* sólo en la acción prescrita después de historias que no ocurren bajo s_i^*, se tiene que si $p^*(h) > 0$ entonces $u_i((s_i^*, s_{-i}^*)|h) = u_i((s_i', s_{-i}^*)|h)$ (1). Es más, como las acciones de ambas estrategias coinciden en historias que ocurren con una probabilidad no negativa, obtenemos que si $p^*(h) > 0$ entonces $p^*(h) = p'(h)$ (2). Con ello:

$$\mathbb{E}(u_i((s_i', s_{-i}^*)) = \sum_{h \in H} u_i((s_i', s_{-i}^*)|h)p'(h) = \sum_{h \in H} u_i((s_i^*, s_{-i}^*)|h)p^*(h) = \mathbb{E}(u_i((s_i^*, s_{-i}^*))$$

y de este modo, si s^* es N.E., entonces el individuo i no tiene incentivo a desviarse de s_i' cuando los oponentes juegan s_{-i}^*.

Para un jugador $j \neq i$ el razonamiento es el mismo: como s_i' difiere únicamente en la acción prescrita después de historias que no ocurren bajo s_i^*, se tiene (2). Es más, se obtiene que si $p^*(h) > 0$ entonces $u_j((s_j^*, s_{-j}^*)|h) = u_j((s_j^*, s_i', s_{-i,j}^*)|h)$ por el mismo argumento. Si existiese un jugador j y una estrategia $\hat{s}_j$ que le reportara más utilidad cuando el resto juega $(s_i', s_{-i,j}^*)$ se obtendría:

$$\mathbb{E}(u_j((\hat{s}_j, s_i', s_{-i,j}^*)) = \sum_{h \in H} u_j((\hat{s}_j, s_i', s_{-i,j}^*)|h)\hat{p}(h)$$

$$> \sum_{h \in H} u_j((s_j^*, s_i', s_{-i,j}^*)|h)p'(h) = \sum_{h \in H} u_j((s_j^*, s_i^*, s_{-i,j}^*)|h)p^*(h) = \mathbb{E}(u_j((s_j^*, s_{-j}^*))$$

Notando que $u_j((\hat{s}_j, s_i', s_{-i,j}^*)|h) = u_j((\hat{s}_j, s_i^*, s_{-i,j}^*)|h)$ si $p^*(h) > 0$ se llega a:

$$\mathbb{E}(u_j((\hat{s}_j, s_{-j}^*)) > \mathbb{E}(u_j((s_j^*, s_{-j}^*))$$

de donde s^* no sería equilibrio de Nash, una contradicción.

(b) 1. (1.0 pts) La forma normal del juego es:

	A	B
(D,d)	$2,1$	$2,1$
(D,u)	$2,1$	$2,1$
(U,d)	$0,2$	$1,0$
(U,u)	$0,2$	$3,3$

y su forma reducida

	A	B
(D,d)	$2,1$	$2,1$
(U,d)	$0,2$	$1,0$
(U,u)	$0,2$	$3,3$

2. (1.0 pts) Analicemos la forma reducida. Notemos que (D,d) domina estrictamente a (U,d) y, de este modo, el jugador 1 no le dará peso positivo a esta última estrategia en cualquier equilibrio. Por lo tanto, nos restringimos a considerar

	A	B
(D,d)	$2,1$	$2,1$
(U,u)	$0,2$	$3,3$

Analicemos los equilibrios en estrategias puras:

- $((D,d),A)$: Si 1 juega (D,d) 2 no tiene incentivo a salir de A. Si 2 juega A, 1 no tiene incentivo a moverse de (D,d). Es N.E. puro.
- $((D,d),B)$: Si 2 juega B, 1 tiene incentivo a jugar (U,u). No es N.E.
- $((U,u),A)$: Si 1 juega (U,u), 2 tiene incentivo a jugar B. No es N.E.
- $((U,u),B)$: Si 1 juega (U,u) 2 no tiene incentivo a salir de B. Si 2 juega B, 1 no tiene incentivo a moverse de (U,u). Es N.E. puro.

Por lo tanto, los N.E. en estrategias puras del **juego original** son: $((D,d),A),((D,u)),A),((U,u),B)$.

Analicemos los equilibrios en estrategias mixtas (en base la la última forma normal presentada). Supongamos que 1 juega (D,d) con probabilidad p y 2 juega a con probabalidad q. Se obtiene:

- $\mathbb{E}(u_1((D,d))|q)) = 2$
- $\mathbb{E}(u_1((U,u))|q)) = 3-3q$
- $\mathbb{E}(u_2(A|p)) = p+2-2p = 2-p$
- $\mathbb{E}(u_2(B|p)) = p+3-3p = 3-2p$

Así, $\mathbb{E}(u_2(A|p)) = \mathbb{E}(u_2(B|p)) \Leftrightarrow p=1$. Por otra parte $\mathbb{E}(u_1((D,d))|q)) = \mathbb{E}(u_1((U,u))|q)) \Leftrightarrow q = 1/3$. Con ello, $BR_2(p=1) = (q,1-q)$, $q \geq 0$. $BR_1((q,1-q))$ es $p=1$ si y sólo si $q \geq 1/3$. De esta manera los equilibrios en estrategias mixtas de esta forma normal son $\{((1,0),(q,1-q))|q \geq 1/3\}$. Finalmente, los equilibrios de Nash del **juego original** serán:

$$N.E. = \{((\theta,1-\theta,0,0),(q,1-q))|\theta \geq 0, q \geq 1/3\} \cup \{((0,0,0,1),(0,1))\}.$$

3. (1.0 pts) Equilibrios perfectos.

(i) Consideremos $\sigma = ((0,0,0,1),(0,1))$. Definamos $\sigma^1_\epsilon = (\epsilon,\epsilon,\epsilon,1-3\epsilon)$.

- $\mathbb{E}(u_2(A)|\sigma^1_\epsilon) = 4\epsilon + 2 - 6\epsilon = 2 - 2\epsilon$.
- $\mathbb{E}(u_2(B)|\sigma^1_\epsilon) = 2\epsilon + 3 - 9\epsilon = 3 - 7\epsilon$.

Así, $\mathbb{E}(u_2(B)|\sigma^1_\epsilon) > \mathbb{E}(u_2(A)|\sigma^1_\epsilon) \Leftrightarrow \epsilon < 1/5$.

Por otro lado, $\sigma^2_\epsilon = (\epsilon, 1-\epsilon)$.

- $\mathbb{E}(u_1((D,d))|\sigma^2_\epsilon) = 2$.
- $\mathbb{E}(u_1((U,u))|\sigma^2_\epsilon) = 3 - 3\epsilon$.

Así, $\mathbb{E}(u_1((U,u))|\sigma^2_\epsilon) > \mathbb{E}(u_1((D,d))|\sigma^2_\epsilon) \Leftrightarrow \epsilon < 1/3$.

De este modo, σ es 1/5-equilibrio perfecto.

(ii) Tomemos $\sigma = ((\theta, 1-\theta, 0, 0),(q, 1-q))$ con $1 > \theta > 0$ y $1 > q \geq 1/3$. Aquí no es claro como se debe perturbar cada una de las acciones por lo que se hará lo más general posible.
Sea $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ tal que $\sigma^1_{\epsilon_{1,2}} = (\theta - \epsilon_1, 1 - \theta - \epsilon_2, \epsilon_1, \epsilon_2) > 0$. Se tendrá que:

- $\mathbb{E}(u_2(A)|\sigma^1_{\epsilon_{1,2}}) = \theta - \epsilon_1 + 1 - \theta - \epsilon_2 + 2\epsilon_1 + 2\epsilon_2 = 1 + \epsilon_1 + \epsilon_2$.
- $\mathbb{E}(u_2(B)|\sigma^1_{\epsilon_{1,2}}) = \theta - \epsilon_1 + 1 - \theta - \epsilon_2 + 3\epsilon_2 = 1 - \epsilon_1 + 2\epsilon_2$.

Así, $\mathbb{E}(u_2(A)|\sigma^1_{\epsilon_{1,2}}) = \mathbb{E}(u_2(B)|\sigma^1_{\epsilon_{1,2}})$ si y sólo si $\epsilon_1 = \epsilon_2/2$. Además, como $(q, 1-q) > 0$, es una estrategia mixta, y así, no es necesario perturabarla. De esta manera σ es equilibrio perfecto.

El caso $((\theta, 1-\theta, 0, 0),(1,0))$ también es equilibrio perfecto razonando de la misma forma. Las condiciones son $\epsilon_1 > \epsilon_2/2$ para el jugador 1, y $\epsilon < 2/3$ para el jugador 2.

(iii) Tomamos $\sigma = ((1,0,0,0),(q,1-q))$ con $1 \geq q \geq 1/3$ (el caso $\sigma = ((0,1,0,0),(q,1-q))$ es análogo). Consideremos $\sigma^1_\epsilon = (1 - \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$. Luego,

- $\mathbb{E}(u_2(A)|\sigma^1_\epsilon) = 1 - \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_1 + 2\epsilon_2 + 2\epsilon_3 = 1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$.
- $\mathbb{E}(u_2(B)|\sigma^1_\epsilon) = 1 - \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_1 + 3\epsilon_3 = 1 - \epsilon_2 + 2\epsilon_3$.

Así, $\mathbb{E}(u_2(A)|\sigma^1_\epsilon) = \mathbb{E}(u_2(B)|\sigma^1_\epsilon)$ si y sólo si $\epsilon_2 = \epsilon_3/2$. Si $q < 1$ el resultado se tiene. Cuando $q = 1$, $\sigma^2_\epsilon = (1-\epsilon, \epsilon)$. La condición es $\epsilon < 2/3$ (viene de (ii)).

4. (0.5 pts) Equilibrios en Sub-Juego Perfecto.

Backward induction asegura que el único S.P.E. es $((U,u),B)$.

5. (0.5 pts) Comparar las respuestas de 3 y 4. Explicar por qué hay diferencias.

Los equilibrios perfectos en estrategias puras son $((U,u),B)$, $((D,d),A)$ y $((D,u),A)$, mientras que existe un único equilibrio en sub-juego perfecto $((U,u),B)$. La diferencia se debe a que S.P.E. es una condición muchísimo más fuerte: condicional en haber alcanzado un cierto conjunto de información, la restricción de la estrategia a la continuación del juego debe ser N.E. Por otra parte, la noción de equilibrio perfecto exige que para perturbaciones suficientemente pequeñas, el equilibrio en cuestión sea alcanzado a partir de un cierto instante (una especie de continuidad del equilibrio en función de la perturbación), sin embargo, no impone restricción alguna de optimalidad a lo que resta de la estrategia cuando se ha alcanzado cualquier etapa del juego.