Departamento de Ingeniería Industrial
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

IN 702 MICROECONOMIA II
Primavera 2005
Pauta Control 1

1. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si una aseveración es verdadera, demuéstrela; si es falsa, dé un contraejemplo.

   (a) (10 puntos) Sean σ_i y σ_i^* dos estrategias mixtas del jugador i. Suponga que para cualquier vector de estrategias puras $a_{-i} \in A_{-i}$ del resto de los jugadores, $u_i(\sigma_i^*, a_{-i}) > u_i(\sigma_i, a_{-i})$. Entonces, para cada vector de estrategias mixtas $\sigma_{-i} \in A_{-i}$ se cumple que $u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$.
   Respuesta:
   Verdadero:
   Sea,

$$\begin{aligned} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) &= \sum_{a \in A} \left(\prod_{j=1}^{N} \sigma_j(a_j) \right) v_i(a_i, a_{-i}), \\ u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) &= \sum_{a \in A} \left(\prod_{j \neq i}^{N} \sigma_j(a_j) \right) \sigma_i(a_i) v_i(a_i, a_{-i}), \end{aligned}$$

   donde $v_i(a_i, a_{-i})$ es el pago cuando se juegan las acciones (a_i, a_{-i}).
   Pero,

$$u_i(\sigma_i, a_{-i}) = \sum_{a \in A} \sigma_i(a_i) v_i(a_i, a_{-i})$$

   Por hipótesis, se tiene que:

$$\begin{aligned} &u_i(\sigma_i, a_{-i}) < \textstyle\sum_{a \in A} \sigma_i^*(a_i) v_i(a_i, a_{-i}) \text{ y por lo tanto} \\ &u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) < \textstyle\sum_{a \in A} \left(\prod_{j \neq i}^{N} \sigma_j(a_j) \right) \sigma_i^*(a_i) v_i(a_i, a_{-i}) \\ &u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) < u_i(\sigma_i^*, \sigma - i) \qquad \forall \sigma_{-i} \end{aligned}$$

   (b) (10 puntos) Sea $a_i^* \in A_i$ es una estrategia pura del jugador i. Suponga que ninguna estrategia pura $a_i \in A_i$ domina estrictamente a a_i^*. Entonces, ninguna estrategia mixta $\sigma_i \in \triangle(A_i)$ domina estrictamente a a_i^*.
   Respuesta:
   Falso. Un contrajemplo:

	i	d
A	a_{11} 3	a_{12} 0
M	a_{21} 0	a_{22} 3
B	a_{31} 1	a_{32} 1

En este juego, B no está dominada ni por A ni M. Sin embargo, para cualquier conjetura que el jugador 1 haga sobre $(q, 1-q)$ del jugador 2, la estrategia pura B es dominada por la estrategia mixta que asigna probabilidad $\frac{1}{2}$ a A y $\frac{1}{2}$ a M, ya que así obtiene una utilidad esperada de $\frac{3}{2} > 1$.

(c) (10 puntos) Si una estrategia mixta σ_i^* domina estrictamente a la estrategia pura a_i, entonces cualquier estrategia mixta del jugador i que asigne una probabilidad positiva a la estrategia pura a_i es estrictamente dominada por σ_i^*.

Respuesta: Falso.

Para el ejemplo anterior se tiene que: la estrategia mixta σ_1^* que asigna probabilidad $\frac{1}{2}$ a las estrategias puras A y M, domina estrictamente a la estrategia pura B $(1,5 > 1)$ independiente de la conjetura que el jugador 1 haga sobre las probabilidades $(q, 1-q)$ del jugador 2. Sin embargo, la estrategia mixta σ_1' que asigna probabilidad $\frac{7}{15}$ a las estrategias puras A y M y $\frac{1}{15}$ a la estrategia pura B domina estrictamente a σ_1^* $(1,8 > 1,5)$.

2. Sea

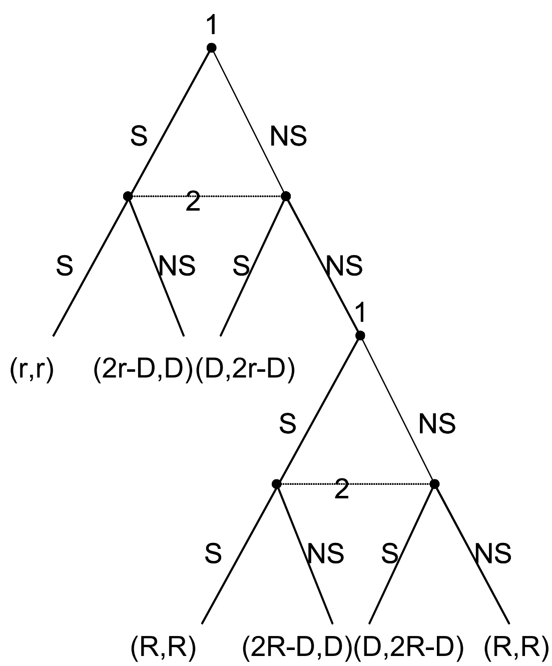
$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{a \in A} \left(\prod_{j}^{N} \sigma_j(a_j) \right) v_i(a),$$

entonces, σ^* es un equilibrio de Nash si $u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(s_i, \sigma_{-i})$ para todo $s_i \in S_i$ y para todo i. Mientras que una estrategia s_i es débilmente dominada para cada jugador i sí existe σ_i' tal que $u_i(\sigma_i', s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$ para todo $s_{-i} \in S_{-i}$ y para el caso de estrictamente es necesario sustituir $\geq$ por $>$.

(a) (10 puntos) Suponga que todas las estrategias débilmente dominadas son eliminadas. Defina el set S_i^* como el set de estrategias puras que sobrevivió a la eliminación de estrategias débilmente dominadas. Dado que el juego se resuelve por estrategias débilmente dominadas, entonces S_i^* es a singleton. Sea s^* el perfil de estrategias que sobrevivió el proceso de eliminación iterativo y supongamos que existe s_i tal que $u_i(s_i, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i^*, s_{-i}^*)$. Entonces, si un round de eliminación es suficiente para producir s^*, entonces s_i^* debe dominar débilmente todas las estrategias en S_i, lo cual es imposible dado que s_i es una mejor respuesta a s_{-i}^* que s_i^*. Mas generalmente asuma que en el proceso de eliminación iterada s_i es débilmente dominada por en algún round por s_i' la cual es eliminada en un round mas tarde porque es débilmente dominada por s_i'',......, la cual es finalmente eliminada por s_i^*. Dado que s_{-i}^* pertenece al set de estrategias que no son dominadas débilmente para los oponentes de i en cada round, por transitividad s_{-i}^* debe ser una mejor respuesta a s_i^* que s_i–una contradicción. En contraste, dada la definición de equilibrio de Nash los jugadores solo puede poner un peso positivo en estrategias que no son eliminadas en el proceso de eliminación de estrategias estrictamente dominadas.

(b) (10 puntos) Suponga que todas las estrategias estrictamente dominadas son eliminadas. Defina el set S_i^* como el set de estrategias puras que sobrevivió a la eliminación de estrategias estrictamente dominadas. Dado que el juego se resuelve por estrategias estrictamente dominadas, entonces S_i^* es a singleton. Sea s^* el perfil de estrategias que sobrevivió el proceso de eliminación iterativo y supongamos que existe s_i tal que $u_i(s_i, s_{-i}^*) > u_i(s_i^*, s_{-i}^*)$. Entonces, si un round de eliminación es suficiente para producir s^*, entonces s_i^* debe dominar todas las estrategias en S_i, lo cual es imposible dado que s_i es una mejor respuesta a s_{-i}^* que s_i^*. Mas generalmente asuma que en el proceso de eliminación iterada s_i es estrictamente dominada por en algún round por s_i' la cual es eliminada en un round mas tarde porque es estrictamente dominada por s_i'',......, la cual es finalmente eliminada por s_i^*. Dado que s_{-i}^* pertenece al set de estrategias que no son dominadas para los oponentes de i en cada round, por transitividad s_{-i}^* debe ser una mejor respuesta a s_i^* que s_i–una contradicción. En contraste, dada la definición de equilibrio de Nash los jugadores solo puede poner un peso positivo en estrategias que no son eliminadas en el proceso de eliminación de estrategias estrictamente dominadas.

3. (a) (10 puntos) Representación en Forma Extensiva (5 puntos)



Representación en Forma Normal (5 puntos):

	(S,S)	(S,NS)	(NS,S)	(NS,NS)
(S,S)	r r	r r	$2r-D$ D	$2r-D$ D
(S,NS)	r r	r r	$2r-D$ D	$2r-D$ D
(NS,S)	D $2r-D$	D $2r-D$	R R	D $2R-D$
(NS,NS)	D $2r-D$	D $2r-D$	$2R-D$ D	R R

(b) (10 puntos) Buscamos los equilibrios de Nash en el subjuego que empieza en el período 2.
Como $R > D$ y $2R - D > R$ la estrategia *sacar* domina estrictamente a la estrategia *no sacar* para ambos inversores. Por lo tanto, existe un equilibrio de estrategias estrictamente dominantes, que será el único equilibrio de Nash. Luego, en el período 2, ambos inversores sacan su dinero y obtienen los pagos (R, R).

(c) (10 puntos) Para buscar los Equilibrios Perfectos en Subjuegos (EPS) del juego completo, buscamos los equilibrios de Nash del período 1 considerando los pagos del equilibrio del período 2 (analizado en la parte b) de esta pregunta). La forma normal será:

	S	NS
S	r r	D $2r-D$
NS	$2r-D$ D	R R

- Como $2r - D < r$ (puesto que $D > r$) y $R > D > r$, en el juego del período 1 existe 1 equilibrio de Nash en estrategias puras que es:
- EPS-1: $(S_1^*, S_2^*) = ((NS, S), (NS, S))$ lo que conduce a los pagos (R,R).
  La razón es simple. Como $R > D > r$, entonces $R > 2r - D$. Esto implica si el jugador 1 juega S entonces la mejor respuesta del jugador 2 es jugar NS. Esto elimina (S, S) como equilibrio dado que el juego es simétrico. Si el jugador 1 juega NS entonces la mejor respuesta del jugador 2 es jugar NS dado que $R > 2r - D$. Por simetría, la mejor respuesta a NS del jugador 2 es NS para el jugador 1.

4. (10 puntos)

(a) Para encontrar el set de EPS usamos inducción inversa:
Jugador 1 decide entre L_1' y R_1': Como $3 > 0 \Rightarrow$ Jugador 1 escoge L_1'.
Jugador 2 decide entre L_2 y R_2: Como $1 > 0 \Rightarrow$ Jugador 2 escoge L_2.
Jugador 1 decide entre L_1 y R_1: Como $3 > 2 \Rightarrow$ Jugador 1 escoge L_1.
Luego, los EPS serán $((L_1, L_1'), L_2)$; $((R_1, L_1'), R_2)$ y $((R_1, R_1'), R_2)$.

Si usamos la Forma Normal, encontraremos los equilibrios de Nash: (4 puntos)

	L2	R2
(L_1, L_1')	1 3	0 1
(L_1, R_1')	-5 0	0 1
(R_1, L_1')	2 2	2 2
(R_1, R_1')	2 2	2 2

Luego, los equilibrios de Nash son: (4 puntos)
EN1: $((L_1, L_1'), L_2)$
EN2: $((R_1, L_1'), R_2)$
EN3: $((R_1, R_1'), R_2)$
Mientras que el único equilibrio en sub-juego perfecto es $((L_1, L_1'), L_2)$ dado que los equilibrios $((R_1, L_1'), R_2)$ y $((R_1, R_1'), R_2)$ están basados en la amenaza no necesariamente creíble de jugar R_2 del jugador 2 en el caso de que le den la oportunidad de jugar que a su vez en el caso de $((R_1, R_1'), R_2)$ se sustenta en la amenaza del jugador 1 de jugar R_1' en el caso de que el jugador 2 juegue L_2.(4 puntos)

(b) (10 puntos) Sabemos que los trembling hand equilibrios son equilibrios en sub-juego perfecto son pero no lo contrario, no obstante, para juegos genéricos ambos coinciden. El concepto de trembling-hand se aplica a la forma estratégica en la cual corresponde a la forma normal menos aquellas estrategias que dan la misma distribución de probabilidad sobre los pagos para todas las estrategias puras de los oponentes.
Demostremos primero que $((L_1, L_1'), L_2)$ es un trembling hand equilibrio o equilibrio perfecto (5 puntos).
Sea $\sigma_2^\epsilon = (1-\epsilon, \epsilon)$ la estrategia mixta del jugador 2. Luego, el jugador 1 obtiene:
$U_1(L_1, L_1') = 3(1-\epsilon) + \epsilon = 3 - 2\epsilon$
$U_1(L_1, R_1') = 0(1-\epsilon) + \epsilon = \epsilon$
$U_1(R_1, L_1') = 2(1-\epsilon) + 2\epsilon = 2$
Dado que $U_1(R_1, L_1') > U_1(L_1, R_1')$ para todo ϵ el jugador 1 no debería poner ningún peso en (L_1, R_1'). Además para ϵ pequeño, $U_1(L_1, L_1') > U_1(R_1, L_1')$ y por lo tanto el jugador 1 debería poner el máximo peso a (L_1, L_1'). Es decir, $BR(\sigma_2^\epsilon) = (L_1, L_1')$.
Sea ahora $\sigma_1^\epsilon = (1-2\epsilon, \epsilon, \epsilon)$ la estrategia mixta del jugador 1. En este caso:
$U_2(L_2) = 1(1-2\epsilon) - 5\epsilon + 2\epsilon = 1 - 4\epsilon$
$U_2(R_2) = 0(1-2\epsilon) + 0\epsilon + 2\epsilon = 4\epsilon.$
Para ϵ pequeño, $U_2(L_2) > U_2(R_2)$ y por lo tanto el jugador 2 debería poner el máximo peso a L_2. Es decir, $BR(\sigma_1^\epsilon) = L_2$.
Luego, el equilibrio de Nash $((L_1, L_1'), L_2)$ es también trembling hand.
Veamos ahora que $((R_1, R_1'), R_2)$ es también trembling hand perfect equilibrium.(5 puntos)

Sea $\sigma_2^\epsilon = (\epsilon, 1-\epsilon)$ la estrategia mixta del jugador 2. Luego, el jugador 1 obtiene:
$U_1(L_1, L_1') = 3\epsilon + (1-\epsilon) = 1 + 2\epsilon$
$U_1(L_1, R_1') = 0\epsilon + (1-\epsilon) = 1 - \epsilon$
$U_1(R_1, R_1') = 2\epsilon + 2(1-\epsilon) = 2$
Dado que $U_1(L_1, L_1') > U_1(L_1, R_1')$ para todo ϵ el jugador 1 no debería poner ningún peso en L_1, R_1'. Además para ϵ pequeño, $U_1(R_1, R_1') > U_1(L_1, L_1')$ y por lo tanto el jugador 1 debería poner el máximo peso a (R_1, R_1'). Es decir, $BR(\sigma_2^\epsilon) = (R_1, R_1')$.
Tomemos $\sigma_1^\epsilon = (\epsilon, \epsilon, 1-2\epsilon)$ la estrategia mixta del jugador 1.
El jugador 2 obtendrá los siguientes pagos:
$U_2(L_2) = 1(\epsilon) - 5\epsilon + 2(1-2\epsilon) = 2 - 8\epsilon$
$U_2(R_2) = 0(\epsilon) + 0\epsilon + 2(1-2\epsilon) = 2 - 4\epsilon$
Para todo, $U_2(R_2) > U_2(L_2)$ y por lo tanto el jugador 2 debería poner el máximo peso a R_2. Es decir, $BR(\sigma_1^\epsilon) = R_2$. Luego, el equilibrio de Nash $((R_1, R_1'), R_2)$ es también trembling hand.
Finalmente, por simetría, $((R_1, R_1'), R_2)$ también resulta ser trembling hand perfect equilibrium.
Claramente, los otras 5 posibilidades no serán trembling hand perfect ya que: dado que el jugador 2 escoge $\sigma_2^\epsilon = (1-\epsilon, \epsilon)$, el jugador 1 escogió la jugada (L_1, L_1'), para ϵ chico. Como σ_2^ϵ tiene que converger a una estrategia pura, sólo existe la posibilidad de que ϵ se vaya a cero 0 o a 1. Cuando se va a cero, ya se vio que el jugador 1 prefiere (L_1, L_1') (eliminando así la posibilidad de que las acciones $((R_1, L_1'), L_2)$ y $((R_1, R_1'), L_2)$ sean trembling hand), y cuando ϵ se va a 1 también se vio lo que sucedía; y en ese caso el jugador 1 prefiere (R_1, L_1') o (R_1, R_1') a las otras acciones (L_1, L_1') y (L_1, R_1'). Esto implica que $((R_1, L_1'), L_2)$, $((R_1, R_1'), L_2)$, $((L_1, R_1'), L_2)$, $((L_1, L_1'), R_2)$ y $((L_1, R_1'), R_2)$ no son trembling hand perfect equilibrium.

(c) (10 puntos) En las partes *a*) y *b*) se demostró que todos los equilibrios de Nash resultaron ser trembling hand perfect. Es decir, los trembling hand equilibrios son equilibrios en sub-juego perfecto pero no lo contrario. Es decir, algunos trembling hand no son sub-juego perfecto. (5 puntos) Intuitivamente, lo que ocurre es que termbling hand permite correlación entre los tiritones (trembles) y sus jugadas en en los set de información subsecuentes. Si el jugador tirita y juega L_1 con probabilidad positiva, entonces es muy probable que el juege R_1' y no L_1'. El problema con el sub-juego perfecto es que considera razonable sólo focalizarse en el sub-juego correspondiente sin importar como se llego a el. Es decir, si alguien jugo de forma tal de que se arribe a tal sub-juego o se arribó sòlo por error. (5 puntos)

5. (a) (10 puntos) La definición de aversión al riesgo de Arrow-Pratt es $-\frac{u''(x)}{u'(x)}$.
Así, la aversión al riesgo de a resulta ser $r_a = -\frac{A''(x)}{A'(x)}$, y la de b, $r_b = -\frac{B''(x)}{B'(x)}$.
Como $A(x) = G(B(x))$, con G cóncava y creciente, por regla de la cadena,

$$\begin{aligned} A'(x) &= B'(x) \cdot G'(B(x)) \\ A''(x) &= B''(x) \cdot G'(x) + B'(x)^2 \cdot G''(x) \end{aligned}$$

Luego,

$$r_a = -\frac{B''(x) \cdot G'(B(x)) + B'(x)^2 \cdot G''(B(x))}{B'(x) \cdot G'(B(x))} \tag{1}$$

reordenando términos:

$$r_a = -\frac{B''(x)}{B'(x)} - \frac{B'(x) \cdot G''(B(x))}{G'(B(x))} \tag{2}$$

Como $B(x)$ es función de utilidad, es creciente, i.e. $B'(x) > 0$.
Como $G(x)$ es cóncava y monótona creciente, $G'(B(x)) > 0$ y $G''(B(x)) < 0$.
Así,

$$\frac{B'(x) \cdot G''(B(x))}{G'(B(x))} < 0 \tag{3}$$

y por lo tanto,

$$r_a = r_b - \frac{B'(x) \cdot G''(B(x))}{G'(B(x))} > r_b \tag{4}$$

i.e. el individuo a es más averso al riesgo que el individuo b.

(b) (10 puntos) Sea ϵ una variable aleatoria con media cero. Se tiene que

$$A(w - \pi_A) = E(A(w + \epsilon)) \;\; y \;\; B(w - \pi_B) = E(B(w + \epsilon)) \tag{5}$$

También, $A(x) = G(B(X))$. Queremos demostrar que $\pi_A \geq \pi_B$.
Se tiene que, por la definición de A:

$$A(w - \pi_A) = E(A(w + \epsilon)) = E(G(B(w + \epsilon))) \tag{6}$$

Pero por la desigualdad de Jensen (podemos usarla gracias a la concavidad de G):

$$E(G(B(w + \epsilon))) \leq G(E(B(w + \epsilon))) \tag{7}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} A(w - \pi_A) &\leq G(E(B(w + \epsilon))) \\ A(w - \pi_A) &\leq G(B(w - \pi_B)) \\ A(w - \pi_A) &\leq A(w - \pi_B) \end{aligned}$$

y como $A(\cdot)$ es una función de utilidad, la podemos asumir creciente, por lo que $\exists\, A^{-1}(\cdot)$, función inversa de $A(\cdot)$. Así, aplicando $A^{-1}(\cdot)$ a la desigualdad anterior, se obtiene que:

$$\begin{aligned} w - \pi_A &\leq w - \pi_B \\ &\Leftrightarrow \\ \pi_B &\leq \pi_A \end{aligned}$$

(c) (10 puntos) El premio por riesgo se define a partir de $A(w - \pi_A) = E(A(w + \epsilon))$, es decir, el costo en el cual incurre el individuo A para eliminar incertidumbre en sus actos es π_A. El valor que se le da es el que iguala la utilidad esperada entre un evento con incertidumbre con la utilidad obtenida en un evento con certeza menos el "premio por riesgo".