AUX 5 IN540

Pregunta 1.

Sea $\{u_t\}$ un proceso estocástico que satisface la relación: $u_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}$ siendo $\{\varepsilon_t\}$ un ruido blanco con varianza σ_ε^2. Demuestre que $\{u_t\}$ es estacionario y determine su media, varianza y función de autocovarianzas en función de θ_1, θ_2 y σ_ε^2.

SOLUCIÓN:

Estacionariedad implica que $E(u_t)$, $\mathrm{Var}(u_t)$ y $\mathrm{Cov}(u_t, u_{t+k})$ sean finitos y no dependan del instante t. Como ε_t es ruido blanco se tiene que

$$E(u_t) = E(\varepsilon_t) - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}) - \theta_2 E(\varepsilon_{t-2}) = 0 - \theta_1 \times 0 - \theta_2 \times 0 = 0$$

que no depende de t. Como $\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ si $t \neq s$, se tiene que

$$Var(u_t) = Var(\varepsilon_t) + \theta_1^2 Var(\varepsilon_{t-1}) + \theta_2^2 Var(\varepsilon_{t-2}) = \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2\sigma_\varepsilon^2 + \theta_2^2\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\varepsilon^2\left(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2\right)$$

que también es finito y no depende de t. La función de autocovarianzas $\mathrm{Cov}(u_t, u_{t+k})$ es:

Para $k = 1$, y utilizando que la media es cero:

$$\begin{aligned} Cov(u_t, u_{t+1}) &= E(u_t u_{t+1}) = E\left[(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t+1} - \theta_1\varepsilon_t - \theta_2\varepsilon_{t-1})\right] \\ &= E(\varepsilon_t\varepsilon_{t+1}) - \theta_1 E(\varepsilon_t^2) - \theta_2 E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t+1}) + \theta_1^2 E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t) + \theta_1\theta_2 E(\varepsilon \\ &\quad -\theta_2 E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t+1}) + \theta_2\theta_1 E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_t) + \theta_2^2 E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-1}) \end{aligned}$$

Como ε_t es ruido blanco se tiene que $\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = E(\varepsilon_t\varepsilon_s) = 0$ si $t \neq s$ y por tanto

$$\mathrm{Cov}(u_t, u_{t+1}) = -\theta_1\sigma_\varepsilon^2 + \theta_1\theta_2\sigma_\varepsilon^2.$$

Análogamente, para $k = 2$,

$$Cov(u_t, u_{t+2}) = E(u_t u_{t+2}) = E\left[(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t+2} - \theta_1\varepsilon_{t+1} - \theta_2\varepsilon_t)\right] = -\theta_2\sigma_\varepsilon^2$$

Pregunta 2.

Analice si los siguientes procesos son estacionarios y, cuando lo sean, determine la media, la varianza y función de autocovarianzas.

a) $v_t = \varepsilon_{1t} + t\varepsilon_{2t}$, siendo ε_{1t} y ε_{2t} dos ruidos blancos independientes entre sí y con varianzas σ_1^2 y σ_2^2, respectivamente.

SOLUCIÓN:

La varianza de este proceso es

$$Var(v_t) = \sigma_1^2 + t^2\sigma_2^2$$

que depende del instante t. El proceso no es estacionario.

b) $z_t = \beta_1 + \beta_2 t + \delta_t$, siendo δ_t un ruido blanco.

SOLUCIÓN:

La esperanza de z_t es

$$E(z_t) = \beta_1 + \beta_2 t$$

que depende de t. Por tanto no es estacionario.

c) $w_t = z_t - z_{t-1}$, siendo z_t el proceso del apartado anterior.

SOLUCIÓN:

El proceso w_t puede expresarse como

$$w_t = \beta_2 + \delta_t - \delta_{t-1}.$$

Las propiedades de este proceso son:

$$\begin{aligned} E(w_t) &= \beta_2 \\ Var(w_t) &= Var(\delta_t) + Var(\delta_{t-1}) = 2\sigma_\varepsilon^2 \\ Cov(w_t, w_{t+1}) &= E\left[(w_t - E(w_t))\,(w_{t+1} - E(w_{t+1}))\right] = E\left[(\delta_t - \delta_{t-1})\,(\delta_{t+1} - \delta_t)\right] = -\sigma_\varepsilon^2 \\ Cov(w_t, w_{t+k}) &= E\left[(\delta_t - \delta_{t-1})\,(\delta_{t+k} - \delta_{t+k-1})\right] = 0 \quad \text{Si } k \geq 2 \end{aligned}$$

El proceso es, por tanto, estacionario.

d) $u_t = y_t - y_{t-1}$, siendo y_t un proceso AR(1) estacionario con coeficiente φ y varianza del ruido blanco asociado a él igual a σ_ε^2.

SOLUCIÓN:

El proceso y_t es de la forma: $y_t = c + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$, donde ε_t es un ruido blanco.
Las propiedades de este proceso son

$$\begin{aligned} E(y_t) &= \frac{c}{1-\phi} \\ \gamma_0 &= Var(y_t) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2} \\ \gamma_k &= \phi^k \gamma_0 \end{aligned}$$

Por tanto, las propiedades del proceso $w_t = y_t - y_{t-1}$ son:

$$E(u_t) = E(y_t) - E(y_{t-1}) = 0$$

$$Var(u_t) = Var(y_t) + Var(y_{t-1}) - 2Cov(y_t, y_{t-1}) = 2\gamma_0 - 2\gamma_1 = 2(1-\phi)\gamma_0 = 2\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1+\phi}.$$

$$\begin{aligned} Cov(u_t, u_{t+k}) &= E(u_t u_{t+k}) = E\left[(y_t - y_{t-1})(y_{t+k} - y_{t+k-1})\right] = 2\gamma_k - \gamma_{k-1} - \gamma_{k+1} \\ &= 2\phi^k \gamma_0 - \phi^{k-1}\gamma_0 - \phi^{k+1}\gamma_0 = \gamma_0 \phi^{k-1}(2\phi - 1 - \phi^2) = -\gamma_0 \phi^{k-1}(1-\phi)^2 \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \phi^{k-1} \frac{\phi - 1}{1+\phi}. \end{aligned}$$

Como la esperanza, varianza y función de autocovarianzas no dependen del instante t y están acotadas, el proceso es estacionario.

Pregunta 3.

El archivo Inversiones.wf1 contiene observaciones anuales sobre el PIB nominal (pib), la inversión nominal (invers), el tipo de interés nominal (i) y el deflator del PIB nominal (defpib) en Estados Unidos entre los años 1959 y 1990.

a) Genere las variables PIB real (rpib), inversión real privada (rinvers), tasa de inflación anual (Infla) y tipo de interés real (r) y estime con el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios la siguiente ecuación de inversión:

$$rinvers_t = \beta_0 + \beta_1\, zrpib_t \;\; + \beta_2 r_t + \varepsilon_t$$

Comente los resultados obtenidos.

b) Realice un test sobre la hipótesis nula de ausencia de autocorrelación en los errores ε_t frente a las alternativas de autocorrelación de orden 1,2 y 3 utilizando el test de Breusch-Godfrey.

c) Estime nuevamente la ecuación de inversión por Mínimos Cuadrados Ordinarios utilizando el estimador apropiado de la varianza asintótica, obtenga los errores estándar validos bajo autocorrelación de orden 1 y compare los errores estándar con los obtenidos en el apartado (a).

d) Suponiendo que los residuos ε_t en la ecuación de inversión siguen un proceso autoregresivo estacionario de orden 1 tal que:

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$$

donde $\{u_t\}$ es un ruido blanco y $|\rho| < 1$, estime la ecuación de inversión con el método de Cochrane-Orcutt transformando el modelo inicial de forma apropiada y utilizando el estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios ρ_{MCO} como estimador de ρ en la ecuación (2.2). Compare los resultados obtenidos con los del apartado (c).