AUX 3 IN540

Pregunta 1.

El Ministerio de Industria desea estimar cuál será el volumen de producción de las empresas textiles del país. Dado que cree que dicho nivel de producción dependerá de la demanda de productos textiles en cada período, decide estimar el siguiente modelo:

$$P_t = \beta_1 + \beta_2 D_t + u_t, \qquad \text{para } t = 1,2,\ldots,T.$$

Donde P_t es el nivel de producción media, D_t es la demanda textil media y u_t es el término de error. Suponga que la relación anterior satisface las hipótesis del modelo lineal general.

a) Calcule el estimador MCO de los parámetros β_1 y β_2 y estime la matriz de varianzas y covarianzas del estimador a partir de los siguientes datos:

$$\sum_{t=1}^{T} D_t = 500; \quad \sum_{t=1}^{T} D_t^2 = 10000; \quad \sum_{t=1}^{T} P_t D_t = 7500;$$
$$\sum_{t=1}^{T} P_t = 350; \quad \sum_{t=1}^{T} P_t^2 = 6000; \quad T = 30.$$

b) ¿Podría encontrar otros estimadores insesgados de β_1 y β_2, lineales respecto a P_t, que tuvieran una varianza menor que la obtenida en la estimación MCO de la parte anterior?¿Por qué?

Pregunta 2.

Un monopolista se enfrenta con la siguiente curva de demanda de su producto

$$Q_i = \beta_1 + \beta_2 P_i + u_i$$

Donde Q_i representa la cantidad del producto demandada cuando el precio es P_i: Supondremos que esta relación satisface las hipótesis del MLG con normalidad. Se dispone de 15 observaciones de las variables y se sabe que:

$$\textstyle\sum_i Q_i = 172; \quad \sum_i Q_i^2 = 2374; \quad \sum_i P_i = 166; \quad \sum_i P_i^2 = 2116; \quad \sum_i P_i Q_i = 1669.$$

Obtenga, para la muestra dada, la estimación MCO de β: Determine una estimación insesgada de la varianza de la perturbación aleatoria σ^2 y los coeficientes de determinación R^2 y $\bar{R}^2$.

Pregunta 3.

Se dispone de observaciones correspondientes a 1958-1972 (ambos inclusive) de las siguientes variables:

$$Y_t: \ PNB \ de \ Taiwán;$$
$$X_{2t}: Stock \ de \ trabajo \ en \ Taiwán;$$
$$X_{3t}: \ Stock \ de \ capital \ en \ Taiwán.$$

Para explicar la producción puede utilizarse la conocida función de Cobb-Douglas:

$$Y_t = \beta_1 X_{2t}^{\beta_2} X_{3t}^{\beta_3} e^{u_t},$$

o bien la llamada "función de producción trascendental", que generaliza la función Cobb-Douglas y que se expresa como:

$$Y_t = \beta_1 X_{2t}^{\beta_2} X_{3t}^{\beta_3} \exp\{\beta_4 X_{2t} + \beta_5 X_{3t} + u_t\},$$

Suponiendo que u_t es una variable normal de media cero que verifica las hipótesis del MLG, explique detalladamente cómo contrastaría si puede afirmarse que, en el caso de Taiwán, no hace falta generalizar la función de Cobb-Douglas para explicar el comportamiento de la variable Y_t.

Solución.

Pregunta 1.

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} T & \sum_{t=1}^{T} D_t \\ \sum_{t=1}^{T} D_t & \sum_{t=1}^{T} D_t^2 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} 30 & 500 \\ & 10000 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 350 \\ 7500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Var}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 30 & 500 \\ & 10000 \end{bmatrix}^{-1} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 0.2 & -0.01 \\ & 0.0006 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\mathbf{Var}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})} = \widehat{\sigma}^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = 8.9286 \begin{bmatrix} 0.2 & -0.01 \\ & 0.0006 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7857 & -0.0893 \\ & 0.00536 \end{bmatrix}$$

donde, $\widehat{\sigma}^2 = \frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{T-k} = \frac{\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}}{T-k} = \frac{1}{28}\left(6000 - \begin{bmatrix} -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 350 \\ 7500 \end{bmatrix}\right) =$ 8.9286

b) ¿Podríamos encontrar otros estimadores insesgados de β_1 y β_2, lineales respecto a P_t, que tuvieran una varianza menor que la obtenida en la estimación MCO del apartado anterior? ¿Por qué?

Solución: No, puesto que se satisfacen las hipótesis del modelo lineal general. Por tanto, no será posible encontrar otro estimador lineal e insesgado con menor varianza. Podemos encontrar otros estimadores con una varianza menor, pero serán sesgados o no lineales.

Pregunta 2.

$$\widehat{\beta} = \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T & \sum P_i \\ & \sum P_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum Q_i \\ \sum P_i Q_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 166 \\ & 2116 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 172 \\ 1669 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.76912 \\ -0.84058 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{e'e}{T-K} = \frac{\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \widehat{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}}{T-K} = \frac{204.64}{13} = 15.74$$

$R^2 = 1 - \frac{e'e}{q'q} = 1 - \frac{204.63938}{401.73} = 0.4906$ donde $q'q = \sum q_i^2 = \sum \left(Q_i - \overline{Q}\right)^2 = \sum Q_i^2 - T\overline{Q}^2$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\frac{e'e}{T-K}}{\frac{q_i' q_i}{T-1}} = 0.4514$$

Pregunta 3.

Tomando logaritmos, $\ln Y_t = \ln \beta_1 + \beta_2 \ln X_{2t} + \beta_3 \ln X_{3t} + \beta_4 X_{2t} + \beta_5 X_{3t} + u_t$
Contrataríamos la hipótesis: $\beta_4 = \beta_5 = 0$, frente a la alternativa $\beta_4 \neq 0$ ó $\beta_5 \neq 0$

Se utilizaría la expresión siguiente:
$F^* = \left(R\widehat{\beta} - r\right)' \left[\widehat{\sigma}^2 R(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} R'\right]^{-1} \left(R\widehat{\beta} - r\right)/q,$

con $q = 2$, $R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\mathbf{0} \vdots \mathbf{I}\right]$ $, r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $T = 15$.