AUX 2 IN540

Pregunta 1.

Sea $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ una muestra aleatoria simple de una población de media μ y varianza σ^2. Se consideran los siguientes estimadores de μ:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{Y_1 + 2Y_2 + 3Y_3}{6}$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{Y_1 + 4Y_2 + Y_3}{6}$$

$$\hat{\mu}_3 = \frac{Y_1 + 2Y_2 + 3Y_3}{6} - 5$$

a) Calcule la media y la varianza de cada uno de los estimadores, identificando a los insesgados.

b) De los estimadores insesgados, ¿Cuál es el más eficiente?

Calcule el error cuadrático medio de los dos primeros estimadores.

Pregunta 2.

Considere el modelo lineal con solo una variable explicativa

$$Y_t = \beta X_t + u_t$$

Donde la variable X es siempre positiva. Se definen los siguientes estimadores alternativos del parámetro unidimensional β:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{T} Y_i}{\sum_{i=1}^{T} X_i}; \ \hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{T} X_i Y_i}{\sum_{i=1}^{T} X_i}; \ \hat{\beta}_3 = \frac{\sum_{i=1}^{T} X_i Y_i}{\sum_{i=1}^{T} X_i^2}; \ \hat{\beta}_4 = \frac{\sum_{i=1}^{T} \frac{Y_i}{X_i}}{T}$$

a) Si se cumplen todos los supuestos del MLG, determine la esperanza y la varianza de cada uno de estos estimadores y seleccione, entre los que sean insesgados, aquel que sea óptimo.

b) Suponga que en realidad no se cumplen las hipótesis del MLG, porque falla el supuesto de homocedasticidad, ya que las perturbaciones son independientes con media 0 y $\mathbb{V}ar(u_i) = \sigma^2 \lambda_i$

   - Determine cuál es el estimador lineal insesgado óptimo de β y calcule su esperanza y su varianza.
   - ¿Es posible encontrar λ_i de manera que el estimador óptimo obtenido en el anteriormente sea $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3\ o\ \hat{\beta}_4$,?

Pregunta 3.

Un analista estime el modelo de regresión lineal simple: $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$. Otro analista estima el mismo modelo, con los mismos datos, pero medidos en unidades diferentes, es decir, estima $Y_t^* = dY_t,\ X_t^* = cX_t$, siendo d y c dos números positivo.

Estime la relación que hay entre los dos analistas con respecto a:

a) Los estimadores MCO de los parámetros β_1 y β_2.

b) Los residuos del modelo.

c) El coeficiente de determinación R^2.

d) La varianza de los estimadores MCO de los parámetros β_1 y β_2.

SOLUCIÒN

Pregunta 1.

a)

$$\mathbb{E}(\hat{\mu}_1) = \mathbb{E}\left(\frac{Y_1 + 2Y_2 + 3Y_3}{6}\right) = \frac{\mu + 2\mu + 3\mu}{6} = \mu$$

$$\mathbb{E}(\hat{\mu}_2) = \mu$$

$$\mathbb{E}(\hat{\mu}_2) = \mu - 5$$

b)

$$\mathbb{V}ar(\hat{\mu}_1) = \frac{1}{6^2}(\sigma^2 + 4\sigma^2 + 9\sigma^2) = \frac{14}{36}\sigma^2$$

$$\mathbb{V}ar(\hat{\mu}_2) = \frac{1}{6^2}(\sigma^2 + 16\sigma^2 + \sigma^2) = \frac{18}{36}\sigma^2$$

El error cuadrático medio está definido como

$$ECM = \mathbb{V}ar + Sesgo^2$$

Por lo que el estimador de menor varianza será el de menor error cuadrático medio, dado que son insesgados.

Pregunta 2.

- $\hat{\beta}_1$:

$$E(\hat{\beta}_1) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{T}(X_i\beta + u_i)}{\sum_{i=1}^{T} X_i}\right) = E\left(\beta + \frac{\sum_{i=1}^{T} u_i}{\sum_{i=1}^{T} X_i}\right) = \beta.$$

Este estimador es insesgado. Aplicando que las perturbaciones no están correlacionadas se obtiene:

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) = \mathrm{Var}\left(\beta + \frac{\sum_{i=1}^{T} u_i}{\sum_{i=1}^{T} X_i}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{T}\mathrm{Var}(u_i)}{\left(\sum_{i=1}^{T} X_i\right)^2} = \frac{T\sigma^2}{\left(\sum_{i=1}^{T} X_i\right)^2}.$$

- $\hat{\beta}_2$:

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}_2) &= E\left(\frac{\sum_{i=1}^{T} X_i(X_i\beta + u_i)}{\sum_{i=1}^{T} X_i}\right) = E\left(\beta\frac{\sum_{i=1}^{T} X_i^2}{\sum_{i=1}^{T} X_i} + \frac{\sum_{i=1}^{T} X_i u_i}{\sum_{i=1}^{T} X_i}\right) \\ &= \beta\frac{\sum_{i=1}^{T} X_i^2}{\sum_{i=1}^{T} X_i} \end{aligned}$$

Este estimador es sesgado. Su varianza es:

$$Var(\hat{\beta}_2) = Var\left(\beta\frac{\sum_{i=1}^{T} X_i^2}{\sum_{i=1}^{T} X_i} + \frac{\sum_{i=1}^{T} X_i u_i}{\sum_{i=1}^{T} X_i}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{T} X_i^2\mathrm{Var}(u_i)}{\left(\sum_{i=1}^{T} X_i\right)^2} = \sigma^2\frac{\sum_{i=1}^{T} X_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{T} X_i\right)^2}$$

- $\hat{\beta}_3$: Este estimador es el de MCO, por tanto como se cumplen los supuestos básicos

$$E(\hat{\beta}_3) = \beta.$$

Su varianza es

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_3) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{T} X_i^2}.$$

- $\hat{\beta}_4$:

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}_4) &= E\left(\frac{\sum_{i=1}^{T}\frac{(X_i\beta+u_i)}{X_i}}{T}\right) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{T}\beta\frac{X_i}{X_i}}{T} + \frac{\sum_{i=1}^{T}\frac{u_i}{X_i}}{T}\right) \\ &= \beta + \frac{\sum_{i=1}^{T}\frac{E(u_i)}{X_i}}{T} = \beta. \end{aligned}$$

Por tanto es insesgado. Su varianza es

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_4) = \mathrm{Var}\left(\beta + \frac{\sum_{i=1}^{T}\frac{u_i}{X_i}}{T}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{T}\frac{\mathrm{Var}(u_i)}{X_i^2}}{T^2} = \frac{\sigma^2}{T^2}\sum_{i=1}^{T}\frac{1}{X_i^2}.$$

  - Los cuatro estimadores son lineales (funciones lineales de los Y_i). Como el modelo sigue las hipótesis del MLG, el estimador MCO ($\hat{\beta}_3$) será, entre los insesgados ($\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_3$ y $\hat{\beta}_4$), el óptimo. (Teorema. de Gauss-Markov).

b) Supongamos que en realidad no se cumplen las hipótesis del MLG porque falla el supuesto de homocedasticidad, ya que las perturbaciones son independientes con media 0 y $Var(u_i) = \sigma^2\lambda_i$.

b1) Determine cuál es ahora el estimador lineal insesgado óptimo de β y calcule su esperanza y su varianza.

Solución:

Ahora $\mathrm{var}(u) = \sigma^2\Omega$, con

$$\Omega = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_T \end{bmatrix},$$

El estimador lineal insesgado óptimo será por tanto el estimador MCG que es el estimador MCO del modelo transformado premultiplicando el modelo original por la matriz $\mathbf{\Omega}^{-1/2}$. En este ejercicio

$$\Omega^{-1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{1/\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ & \sqrt{1/\lambda_2} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \sqrt{1/\lambda_T} \end{bmatrix} = L' * L.$$

y por tanto el modelo transformado es

$$\frac{Y_i}{\sqrt{\lambda_i}} = \beta \frac{X_i}{\sqrt{\lambda_i}} + \frac{u_i}{\sqrt{\lambda_i}},$$

y el estimador MCG es

$$\hat{\beta}_{\text{MCG}} = \frac{\sum_{i=1}^{T} \frac{X_i Y_i}{\lambda_i}}{\sum_{i=1}^{T} \frac{X_i^2}{\lambda_i}}$$

El estimador es insesgado y por tanto

$$E(\hat{\beta}_{\text{MCG}}) = \beta$$

la varianza es

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\hat{\beta}_{\text{MCG}}\right) &= \sigma^2 (X^{*\prime} X^*)^{-1} = \sigma^2 (X' \Omega^{-1} X)^{-1} \\ &= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{T} \frac{X_i^2}{\lambda_i}}. \end{aligned}$$

b2) ¿Es posible encontrar λ_i de manera que el estimador óptimo obtenido en el subapartado anterior sea $\widehat{\beta}_1$? Responda también a esta pregunta cambiando $\widehat{\beta}_1$ por $\widehat{\beta}_2$, $\widehat{\beta}_3$ y $\widehat{\beta}_4$.

Solución:

Comparando el estimador obtenido en el apartado anterior, se comprueba que:

$$\begin{aligned} &\text{si } \lambda_i = X_i, \quad \hat{\beta}_{\text{MCG}} = \hat{\beta}_1; \\ &\text{si } \lambda_i = 1, \quad \hat{\beta}_{\text{MCG}} = \hat{\beta}_3; \\ &\text{si } \lambda_i = X_i^2, \quad \hat{\beta}_{\text{MCG}} = \hat{\beta}_4. \end{aligned}$$

Pregunta 3.

a)

$$\hat{\beta}_2^* = \frac{\sum_{i=1}^{T}(X_i^* - \bar{X}^*)(Y_i^* - \bar{Y}^*)}{\sum_{i=1}^{T}(X_i^* - \bar{X}^*)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{T} c(X_i - \bar{X}) d(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{T} c^2 (X_i - \bar{X})^2}$$

$$\hat{\beta}_2^* = \frac{cd \sum_{i=1}^{T}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{c^2 \sum_{i=1}^{T}(X_i - \bar{X})^2} = \frac{d}{c}\hat{\beta}_2$$

$$\hat{\beta}_1^* = \bar{Y}^* - \hat{\beta}_2^* \bar{X}^* = d\bar{Y} - \frac{d}{c}\hat{\beta}_2 c\bar{X} = d\hat{\beta}_1$$

b)

$$u_t^* = Y_t^* - \hat{Y}_t^* = d\left(Y_t - \hat{Y}_t\right) = du_t$$

c)

$$SST = \sum (Y_t - \bar{Y})^2$$

$$SSR = \sum u_t^2$$

$$SSE = \sum \left(\hat{Y}_t - \bar{Y}\right)^2$$

$$R^{2^*} = 1 - \frac{SSR^*}{SST^*} = 1 - \frac{\sum u_t^{*2}}{\sum(Y_t^* - \bar{Y}^*)^2} = 1 - \frac{SSR}{SST} = R^2$$

d)

$$\hat{\beta}_2^* = \frac{d}{c}\hat{\beta}_2$$

$$\mathbb{V}ar(\hat{\beta}_2^*) = \left(\frac{d}{c}\right)^2 \mathbb{V}ar(\hat{\beta}_2)$$

$$\hat{\beta}_1^* = d\hat{\beta}_1$$

$$\mathbb{V}ar(\hat{\beta}_1^*) = d^2 \mathbb{V}ar(\hat{\beta}_1)$$