AUXILIAR 5 - IN51A

Primavera 2008

Profesor : Felipe Balmaceda
Auxiliares : Francisco Hawas, Jorge Vásquez

Problema 1 Suponga dos firmas que producen bienes homogéneos. El mercado de dicho bien tiene una demanda $Q(P) = a - P$, y además los costos de cada firma son $C_i(q_i) = cq_i$.

- a) Encuentre el equilibrio si ambas firmas compiten a lo Cournot. Grafique las funciones de mejor respuesta.
- b) Suponga ahora que las firmas producen un bien diferenciado, y que las demandas están dadas por $q_i(p_i, p_j) = a - p_i + bp_j$. Encuentre el equilibrio si las firmas compiten a lo Bertrand. Grafique las funciones de mejor respuesta.

Problema 2 Existen 2 firmas en un mercado, donde la demanda está dada por $P = 1 - (q_1 + q_2)$. Ambas firmas pueden producir con una función de costos $C(q) = \frac{q^2}{2}$

- a) Calcule el equilibrio de Cournot.

De ahora en adelante suponga que la firma 1 puede además, vender en otro mercado una cantidad adicional x_1 . Sus costos totales son entonces $C(q_1, x_1) = \frac{(q_1 + x_1)^2}{2}$. La demanda en este mercado externo está dada por $P = A - x_1$.

- b) Encuentre el equilibrio de Cournot en este nuevo juego.
- c) Muestre que para $A = 1$, un pequeño incremento en A daña a la firma 1. Explique por qué esto es paradójico a primera vista, y explique luego por qué es razonable.

Problema 3 Considere un mercado habitado por dos firmas, que enfrentan una demanda $D(p) = 1 - p$. Las dos firmas poseen restricciones de capacidad $\bar{q}_i$, que fue adquirida antes de interactuar estratégicamente. El costo unitario por inversión en capacidad es $c_0 \in [\frac{3}{4}, 1]$. El costo marginal una vez que se instaló la capacidad es:

$$C'(q_i) = \begin{cases} 0 & q_i \leq \bar{q}_i \\ \infty & \sim \end{cases}$$

- a) Demuestre que ninguna firma invertirá en capacidad mayor a $1/3$.
- b) Suponga que el racionamiento es eficiente. Demuestre que cuando ambas firmas cobran $p^* = 1 - \bar{q}_1 - \bar{q}_2$ es equilibrio de Nash.
- c) Suponga ahora que el racionamiento es proporcional, y que $\bar{q}_i \in [0, \frac{1}{4}]$. Demuestre que cuando ambas firmas cobran $p^* = 1 - \bar{q}_1 - \bar{q}_2$ es equilibrio de Nash.

SOLUCIÓN AUXILIAR 5

Problema 1 a) Como ambas firmas son iguales, basta con resolver el problema de una

$$\text{máx } \pi = (a - q_1 - q_2)q_i - cq_i$$

CPO:

$$a - q_j - 2q_i - c = 0 \Rightarrow q_i(q_j) = \frac{a - c - q_j}{2}$$

La función de mejor respuesta de cada firma a lo que hace la otra es $q_i(q_j)$. El gráfico de estas funciones no lo voy a poner, pero son dos rectas. El equilibrio entonces es cuando las dos funciones se intersectan, es decir, cuando $q_i(q_j(q_i)) = q_i$. En otras palabras, cada firma juega su mejor respuesta.

$$\begin{aligned} q_i &= \frac{a - c - \frac{a - c - q_i}{2}}{2} \\ q_i &= \frac{a - c}{3} \quad i = 1, 2 \\ P &= a - 2\frac{a - c}{3} = \frac{a + 2c}{3} \\ \pi_i &= (P - c)q_i = \left(\frac{a + 2c}{3} - c\right)\frac{a - c}{3} = \left(\frac{a - c}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

b) Ahora las demands cambian, pero las firmas siguen siendo simétricas así que resolvemos para una:

$$\text{máx } \pi_i = (p_i - c)(a - p_i + bp_j)$$

CPO:

$$a - p_i + bp_j - p_i + c = 0 \Rightarrow p_i(p_j) = \frac{1}{2}(a + bp_j + c)$$

Al igual que antes las funciones resultantes son rectas. Asumimos que b es menor estricto que 2 para que la intersección sea en el cuadrante positivo, y obtememos el equilibrio haciendo $p_i = p_i(p_j(p_i))$.

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{1}{2}\left(a + b\frac{1}{2}(a + bp_i + c) + c\right) \\ p_i &= \frac{2 + b}{4 - b^2}(a + c) = \frac{a + c}{2 - b}, \quad i = 1, 2 \\ q_i &= a + (b - 1) * \frac{a + c}{2 - b} = \frac{a + cb - c}{2 - b}, \quad i = 1, 2 \\ \pi_i &= (p_i - c)q_i = \left(\frac{a + c}{2 - b} - c\right)\frac{a + cb - c}{2 - b} = \left(\frac{a + cb - c}{2 - b}\right)^2 \end{aligned}$$

Problema 2 a) Como ambas firmas son iguales, basta con resolver el problema de una

$$\text{máx } \pi = (1 - q_1 - q_2)q_i - 0,5q_i^2$$

CPO:

$$1 - q_j - 2q_i - q_i = 0 \Rightarrow q_i(q_j) = \frac{1 - q_j}{3}$$

La función de mejor respuesta de cada firma a lo que hace la otra es $q_i(q_j)$. El gráfico de estas funciones no lo voy a poner, pero son dos rectas. El equilibrio entonces es cuando las dos funciones se intersectan, es decir, cuando $q_i(q_j(q_i)) = q_i$.

$$q_i = \frac{1 - \frac{1 - q_i}{3}}{3}$$

$$q_i = \frac{1}{4}, i = 1, 2$$

$$P = \frac{1}{2}$$

$$\pi_i = \frac{1}{2} \frac{1}{4} - 0,5 \frac{1^2}{4} = \frac{1}{8} - \frac{1}{32} = \frac{3}{32}$$

b) Ahora las dos firmas no son iguales. Una sigue con el mismo juego que en la parte a) y la otra no. La firma con dos mercados:

$$\text{máx } \pi = (1 - q_1 - q_2)q_1 + (A - x_1)x_1 - 0,5(x_1 + q_1)^2$$

CPO:

$$1 - 2q_1 - q_2 - x_1 - q_1 = 0 \quad (1)$$

$$A - 2x_1 - x_1 - q_1 = 0 \quad (2)$$

De donde por (1) y (2)

$$x_1 = \frac{A - q_1}{3}$$

$$q_1 = \frac{3 - 3q_2 - A}{8}$$

El equilibrio es entonces:

$$\begin{aligned}
 q_1 &= \frac{3 - 1 + q_1 - A}{8} \\
 q_1 &= \frac{2 - A}{7} \\
 q_2 &= \frac{1 - \frac{2-A}{7}}{3} = \frac{5 + A}{21} \\
 x_1 &= \frac{A - \frac{2-A}{7}}{3} = \frac{8A - 2}{21} \\
 P &= 1 - q_1 - q_2 = 1 - \left(\frac{2 - A}{7} + \frac{5 + A}{21}\right) = \frac{10 + 2A}{21} \\
 P_x &= A - x_1 = A - \frac{8A - 2}{21} = \frac{13A + 2}{21}
 \end{aligned}$$

c) En esta parte hay que encontrar la utilidad de la firma que está en los dos mercados. Esto es:

$$\begin{aligned}
 \pi_1 &= Pq_1 + P_x x_1 - 0,5(x_1 + q_1)^2 \\
 \pi_1 &= \frac{10 + 2A}{21} \frac{2 - A}{7} + \frac{13A + 2}{21} \frac{8A - 2}{21} - 0,5\left(\frac{8A - 2}{21} + \frac{2 - A}{7}\right)^2 \\
 2 * 21^2 \pi_1 &= 2(10 + 2A)(6 - 3A) + 2(13A + 2)(8A - 2) - (5A + 4)^2
 \end{aligned}$$

Ahora, hay que encontrar a derivada con respecto a A :

$$\begin{aligned}
 2 * 21^2 \frac{\partial \pi_1}{\partial A} &= 4(6 - 3A) - 6(10 + 2A) + 26(8A - 2) + 16(13A + 2) - 10(5A + 4) \\
 21^2 \frac{\partial \pi_1}{\partial A} &= 12 - 6A - 30 - 6A + 13 * 8A - 26 + 13 * 8A + 16 - 25A - 20 \\
 21^2 \frac{\partial \pi_1}{\partial A} &= -58 + A(208 - 25 - 12) = 171A - 58
 \end{aligned}$$

Es decir, la derivada de los beneficios de la firma uno con respecto al parámetro A vale $\frac{\partial \pi_1}{\partial A} = \frac{171A - 58}{21^2}$. Al evaluar en $A = 0,25$ el resultado es negativo, luego un pequeño incremento en A le causa un daño a la firma 1.

Esto es paradójico pues al aumentar A deberían aumentar las rentas de la firma en el mercado del bien x pues es monopolio. Que aumente A es lo mismo a que aumente la demanda. Sin embargo existe otro efecto, pues al producir más en ese mercado, la firma 1 deja de producir en el otro, y la firma dos se aprovecha haciendo que las utilidades de la 1 disminuyan. La suma de los dos efectos depende del nivel de A que se esté empleando.

Problema 3 a) El mejor escenario en que pueda estar una firma, es el monopolístico, es decir, que no haya competencia. Luego una vez hecha la inversión, la firma resuelve:

$$\text{máx } p(1 - p)$$

La condición de primer orden nos dice que $p^* = \frac{1}{2}$.

Sabiendo esto, la firma cuando decida cuanto $\bar{q}$ invertir, mirará la siguiente función de ganancias:

$$\pi = \frac{1}{4} - c_0 \bar{q}$$

Por lo tanto, si la firma es racional, escogerá $\bar{q}$ tal que

$$\frac{1}{4} - c_0 \bar{q} \geq 0$$

Lo que es equivalente a pedir que:

$$\bar{q} \leq \frac{1}{4c_0}$$

Como $c_0 \in [\frac{3}{4}, 1]$, sigue que $\bar{q} \leq \frac{1}{3}$.

- b) ¹ Para ver que (p^*, p^*) es un N.E. basta ver que una firma no tenga incentivos a desviarse²
 Supongamos que la firma 1 se desvia y cobra $p \geq p^*$ ³. Esta firma **enfrentará** a todos los consumidores que no pudieron ser atendidos por la firma 2, es decir, $D(p^*) - \bar{q}_2$. Sin embargo a precio p la demanda es $D(p)$, por ende la firma **venderá** a $D(p) - \bar{q}_2$ consumidores.

Observación: Como $p \geq p^*$ entonces

$$\begin{aligned} D(p) &\leq D(p^*) \\ q + \bar{q}_2 &\leq \bar{q}_1 + \bar{q}_2 \\ q &\leq \bar{q}_1 \end{aligned}$$

Teniendo esto en cuenta, las ganancias de la firma 1 serán:

$$\pi_1(q, \bar{q}_2) = (1 - q - \bar{q}_2)q - c_0 \bar{q}_1$$

Para ver si la desviación es óptima, diferenciamos localmente en $\bar{q}_1$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q} = 1 - 2q - \bar{q}_2$$

Evaluamos en $q = \bar{q}_1$,

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q} = 1 - 2\bar{q}_1 - \bar{q}_2$$

Como $\bar{q}_i \leq \frac{1}{3}$, sigue que

$$\frac{\partial \pi_1(\bar{q}_1, \bar{q}_2)}{\partial q} > 0$$

Por lo tanto, la firma 1 la desviarse y cobrar un precio mayor a p^* , su cantidad vendida disminuye, lo que implica que disminuyen sus ganancias.

$\Rightarrow$ el desvio no es óptimo

$\Rightarrow (p^*, p^*)$ es N.E.

¹Un racionamiento eficiente quiere decir que todos los consumidores que no pudieron ser atendidos por una firma, se irán hacia la otra.

²Como ambas firmas son simétricas, basta ver que una firma no tenga incentivos a desviarse.

³Notemos que la firma no gana absolutamente nada desviandose y cobrando $p \leq p^*$, pues como tiene restricciones de capacidad, seguirá vendiendo lo mismo, sólo que ahora tendrá menos margen, lo que claramente no le conviene.

- c) ⁴ Si la firma 1 se desvía y cobra $p \geq p^*$, entonces la proporción de individuos a los cuales les venderá es la siguiente:

$$\frac{D(p^*) - \bar{q}_2}{D(p^*)} = \frac{1 - p^* - \bar{q}_2}{1 - p^*}$$

Luego, las ganancias de la firma serán:

$$\pi_1 = p(1 - p) \frac{1 - p^* - \bar{q}_2}{1 - p^*}$$

Por lo tanto, la desviación óptima de la firma es cobrar $p = \frac{1}{2}$, sin embargo, $p^* = 1 - \bar{q}_1 - \bar{q}_2 > \frac{1}{2}$, pues $\bar{q}_i \in [0, \frac{1}{2})$.

$\Rightarrow$ el desvío no es óptimo

$\Rightarrow (p^*, p^*)$ es N.E.

⁴Un racionamiento proporcional quiere decir que sólo una proporción de consumidores que no fueron atendidos por una firma serán atendidos por la otra.