AUXILIAR 3 - IN51A
Primavera 2008

Profesor : Felipe Balmaceda
Auxiliares : Francisco Hawas, Jorge Vásquez

Problema 1 Un monopolista debe servir a dos mercados (integrados por consumidores homogéneos) cuyas preferencias están dadas por: $D_1(p) = 4 - p$ y $D_2(p) = 3 - p$. El costo marginal de producción es cero. Este monopolista tiene especial predicción por las tarifas de dos partes, por lo que su política de precio siempre tiene la forma $T(q) = A - pq$

1. Suponga que le monopolista cuenta con la información necesaria para discriminar en forma perfecta en cada uno de los mercados. Calcule los valores A_i y p_i, $i = 1, 2$ que cobraría en cada mercado. Calcule el excedente de los consumidores.

2. Suponga ahora que el monopolista no es capaz de distinguir entre ambos mercados; sólo sabe que la mitad de la población pertenece al mercado $i = 1, 2$. Además, está prohibido ofrecer menú de precios, por lo que debe cobrar el mismo cargo (A) y el mismo precio (p) por unidad a TODOS los consumidores.

   a) Plantee el problema que resuelve el monopolista para definir el cargo fijo A y el precio p que cobrará. ¿Qué restricciones son activas y por qué?

   b) Encuentre el cargo fijo A y el precio p por unidad que fija el monopolista. ¿Cuánto se consume en cada mercado? Compare el excedente de los consumidores en cada mercado con el que obtienen en el caso de discriminación perfecta.

Problema 2 En un lejano país existe un monopolio de la telefonía local: CTCENTEL (C). Esta única firma atiende un mercado en el que existen dos tipos de consumidores: los "habladores"(H) y los "silenciosos"(S). La demanda que enfrenta el monopolio en estos dos mercados es $q_H = a - p$ y $q_S = 1 - p$ con $a > 1$. La tecnología de telecomunicaciones tiene costo marginal cero. El problema, desde el punto de vista de la empresa, es que no es capaz de distinguir si un cliente determinado es H o S. Lo único que sabe es que la probabilidad que un cliente sea tipo H es λ.

1. Suponga que puede cobrar un cargo fijo y un precio por uso. Si CTCENTEL decide atacar solamente el mercado de los habladores, cuál es su utilidad?

2. Suponga ahora que CTCENTEL decide atacar ambos segmentos de mercado, cuál es su utilidad? ¿Cómo cambia la utilidad si λ aumenta (disminuye)? Haga la estática comparativa.

3. Describa las condiciones que harían que CTCENTEL prefiera olvidarse de servir a los silenciosos cuando $a = 2$.

Problema 3 Encuentre un ejemplo donde hacer *Bundling* sea rentable.
Hint: Suponga un monopolio que ofrece dos bienes, y un consumidor que tiene valoraciones discretas por cada uno de ellos.

Problema 4 Suponga que un monopolio ofrece dos bienes, y un consumidor que posee valoraciones independientes distribuídas uniformes entre [0,1] por ellos. Demuestre que hacer *Bundling mix* es rentable para el monopolista. Asuma por simplicidad que el costo marginal de producción es cero para ambos bienes.

SOLUCIÓN AUXILIAR 3

Problema 1 1. Como el monopolio posee información completa, para cada tipo de demanda escogerá los valores de la cuota y el precio que maximizen su utilidad. Para el mercado 1, el monopolista resuelve:

$$\max_{A_1, p_1} A_1 + p_1(4 - p_1)$$

sujeto a

$$\frac{(4 - p_1)^2}{2} - A_1 \geq 0 \quad \text{(PV)}$$

Suponemos que la utilidad del consumidor de no participar es cero.
Obs: El excedente del consumidor, mide el beneficio o utilidad neta que le reporta al consumidor pagar un precio p o consumir q unidades del bien (a precio p).
Sabemos que la restricción se cumple con igualdad en el óptimo (el monopolista extrae absolutamente todo el excedente, no tiene sentido dejarle excedente mayor que cero al consumidor). Dado esto, se resuelve:

$$\max_{p_1} \frac{(4 - p_1)^2}{2} + p_1(4 - p_1)$$

Las condiciones de primer orden implican

$$\begin{aligned} p_1 &= 0 \\ A_1 &= 8 \end{aligned}$$

Para el mercado 2 el monopolista resuelve:

$$\max_{A_2, p_2} A_2 + p_2(3 - p_2)$$

sujeto a

$$\frac{(3 - p_2)^2}{2} - A_2 \geq 0 \quad \text{(PV)}$$

Que es equivalente a resolver,

$$\max_{p_2} \frac{(3 - p_2)^2}{2} + p_2(3 - p_2)$$

Las condiciones de primer orden implican

$$\begin{aligned} p_2 &= 0 \\ A_2 &= 9/2 \end{aligned}$$

Notar que en ambos casos el monopolista cobra el costo marginal. El excedente de los consumidores en ambos casos es cero.

2. *a*) En este caso hay información incompleta, el monopolista no conoce de que mercado es cada cliente, y además está obligado a satisfacer a todos los consumidores[1] por ende tiene que escoger una cuota y un precio tal que los dos segmentos quieran participar. El monopolista resuelve:

$$\max_{A,p} \frac{1}{2}(A + p(4-p)) + \frac{1}{2}(A + p(3-p))$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \frac{(4-p)^2}{2} - A &\geq 0 \quad \text{(PV1)} \\ \frac{(3-p)^2}{2} - A &\geq 0 \quad \text{(PV2)} \end{aligned}$$

Claramente (PV2)⇒(PV1). La intuición es que el monopolio extraerá todo el excedente al consumidor de menor demanda, pues quiere servir a ambos mercados. Por esto, está obligado a dejarle excendete positivo al los consumidores de alta demanda, cumpliendose (PV1) con holgura y (PV2) con igualdad.

b) El problema anterior se traduce en

$$\max_{p} \frac{1}{2}(\frac{(3-p)^2}{2} + p(4-p)) + \frac{1}{2}(\frac{(3-p)^2}{2} + p(3-p))$$

Las condiciones de primer orden implican

$$\begin{aligned} p &= 1/2 \\ A &= 25/8 \end{aligned}$$

Reemplazamos el precio en las demandas y encontramos lo que se consume en cada mercado:

$$\begin{aligned} D_1(1/2) = q_1 &= 7/2 \\ D_2(1/2) = q_2 &= 5/2 \end{aligned}$$

El excedente en el mercado 2 es, como se dijo antes, igual a cero. En el caso del mercado 1, el excedente queda:

$$EC_1 = \frac{(4-\frac{1}{2})^2}{2} - \frac{25}{8} = 3$$

Así se tiene que el excedente para el mercado 2 es igual al caso de discriminación perfecta, mientras que para el mercado 1 el excedente es mayor en este caso. Esto es asi porque el monopolista no puede discriminar entre ambos mercados, lo que obliga a dejar una renta al consumidor de mayor demanda si es que también quiere servir al de menor demanda.

Problema 2 1. CTCENTEL resuelve

$$\max_{A,p} \lambda(A + p(a-p))$$

[1]eventualmente podría no hacerlo, es decir, comparar que le reporta mayor ganancias, satisfacer a un tipo de cliente o a ambos.

sujeto a

$$\frac{(a-p)^2}{2} \geq A$$

Lo que es equivalente a resolver,

$$\max_{p} \lambda(\frac{(a-p)^2}{2} + p(a-p))$$

Las condiciones de primer orden implican:

$$\begin{aligned} p &= 0 \\ A &= \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

2. El monopolista resuelve

$$\max_{A,p} \lambda(A + p(a-p)) + (1-\lambda)(A + p(1-p))$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \frac{(a-p)^2}{2} &\geq A \quad \text{(PV1)} \\ \frac{(1-p)^2}{2} &\geq A \quad \text{(PV2)} \end{aligned}$$

Obs: (PV2)⇒(PV1). Se resuelve

$$\max_{p} \lambda p(a-p) + (1-\lambda)p(1-p) + \frac{(1-p)^2}{2}$$

Las condiciones de primer orden implican:

$$\begin{aligned} p &= \lambda(a-1) \\ A &= \frac{(1-\lambda a+\lambda)^2}{2} \end{aligned}$$

Luego las cantidades consumidas por cada tipo de cliente son:

$$\begin{aligned} q_H &= a - \lambda a + \lambda \\ q_S &= 1 - \lambda a + \lambda \end{aligned}$$

Por lo tanto, la utilidad del monopolio es:

$$\pi_H = A + p(q_H + q_S)$$

reemplazando obtenemos que

$$\pi_H = \lambda(a-1) + \frac{(1-\lambda a+\lambda)^2}{2}$$

Para ver la estática comparativa, vemos como cambia la utilidad del monopolio antes un aumento en la probabilidad que el cliente sea tipo H

$$\frac{\partial \pi}{\partial \lambda} = (a-1)^2 \lambda > 0$$

Por lo tanto si el monopolio tiene que abastecer a los dos tipos de clientes, él siempre preferirá que haya más clientes tipo H, lo cual es correcto con nuestra intuición.

3. Sea $\pi^{(1)}$ la utilidad que obtiene el monopolio cuando sirve solo a clientes H, y $\pi^{(2)}$ cuando sirve a ambos. Cuando $a = 2$,

$$\begin{aligned} \pi^{(1)} &= 2\lambda \\ \pi^{(2)} &= \lambda + \frac{(1-\lambda)^2}{2} \end{aligned}$$

Buscamos los valores de λ tal que $\pi^{(1)} \geq \pi^{(2)}$. Los cuales se dan $\forall \lambda \in [\lambda^*, 1]$ con $\lambda^* = 2 - \sqrt{3}$

Problema 3 Un ejemplo donde el *Bundling* es rentable: Supongamos un monopolio que ofrece dos bienes, y un consumidor con valoraciones (v_1, v_2) por ellos. Por simplicidad consideramos el costo marginal de producción 0.
Consideremos 4 escenarios equiprobables para las valoraciones (v_1, v_2) como nos decían en el hint.

	v_1	v_2	$\mathbb{P}$
A	90	10	1/4
B	80	40	1/4
C	40	80	1/4
D	10	90	1/4

Suponemos que el consumidor es racional y va a consumir el bien siempre y cuando su valoración sea mayor o igual al precio de compra.
Veamos cual es precio óptimos para ambos bienes, si el consumidor no hace *bundling*.

- Si el monopolista cobra $p_1 = 90$, entonces su utilidad será $\mathbb{E}(u(p_1 = 90)) = 90\frac{1}{4} = 22{,}5$
- Si el monopolista cobra $p_1 = 80$, entonces su utilidad será $\mathbb{E}(u(p_1 = 80)) = 80\frac{1}{4} + 80\frac{1}{4} = 40$
- Si el monopolista cobra $p_1 = 40$, entonces su utilidad será $\mathbb{E}(u(p_1 = 40)) = 40\frac{1}{4} + 40\frac{1}{4} + 40\frac{1}{4} = 30$
- Si el monopolista cobra $p_1 = 10$, entonces su utilidad será $\mathbb{E}(u(p_1 = 10)) = 10$

Luego el precio óptimo es $p_1^* = 80$. Por simetría del problema, $p_2^* = 80$, luego la utilidad esperada del monopolista será 80.
Ahora si el monopolista desea hacer *bundling*, sabemos que el consumidor comprará ambos bienes siempre y cuando la suma de las valoraciones sea mayor o igual al precio del bundling.

	$v_1 + v_2$	$\mathbb{P}$
A	100	1/4
B	120	1/4
C	120	1/4
D	100	1/4

- Si el monopolista cobra $p_b = 100$ su utilidad será 100.
- Si el monopolista cobra $p_b = 120$ su utilidad será 60

Luego $p_b^* = 100$. Por lo tanto, al monopolista le conviene hace bundling, pues obtiene mayor ganacia y con probabilidad 1!.
Analicemos por curiosidad como cambian las ganacias del monopolista cuando decide hacer *bundling mix*,

es decir, vender los bienes de forma separada y ademas como paquete.
En este caso, sabemos que si $p_b = 100$, los compradores siempre comprarán el paquete y nunca comprarán los bienes de forma independientes, por ende, si el monopolista quisiera hacer bundling mix, no le queda otra que cobrar $p_b = 120$. Dado esto, debemos determinar los precios para los bienes 1 y 2, donde slo hay dos opciones: cobrar 90 ó 10, donde haciendo el mismo razonamiento que antes, se concluye que $p_1 = p_2 = 90$ y las ganacias suben a 105. Luego haciendo *bundling mix* el monopolista esta mejor todavía.

Problema 4 Sea v_i la valoración por el bien i, con $v_i \sim U(0,1), i = 1,2$. Al igual que en el problema anterior, veamos cuales serían los precios óptimos del monopolista sino hiciera bundling.
Asumimos que el consumidor es racional, y comprará el bien i siempre y cuando $v_i \geq p_i$. Luego, la utilidad esperada del monopolista será:

$$\max_{p_i \geq 0} p_i \mathbb{P}(v_i \geq p_i)$$

donde $\mathbb{P}(v_i \geq p_i) = 1 - p_i$.
Las condiciones de primer orden implican que:

$$p_1^* = p_2^* = \frac{1}{2}$$

Para que el consumidor prefiera el bundling, se debe tener que $p_b \leq p_1^* + p_2^*$, por ende, la estrategia del monopolista será $p_b = p_1^* + p_2^*$, $p_1 = p_1^*$ y $p_2 = p_2^* + \epsilon$
Observación: si no distorsionamos un precio, entonces el bundling mix no tendría gracia, pues si el consumidor quisiera comprar los dos bienes, comprarlos separados o juntos sería lo mismo.
Bajo esa estrategia:

- Todos los consumidores con $v_1 \geq p_1$ y $v_2 \leq p_2^*$ consumirán sólo bien 1.
- Todos los consumidores con $v_1 \leq p_1 - \epsilon$ y $v_2 \geq p_2$ consumirán sólo bien 2.
- Todos los consumidores con $v_1 \leq p_1 - \epsilon$ y $v_2 \leq p_2$ no consumirán.
- El resto consumirá el bundling, es decir, aquellos con $v_1 \geq p_1 - \epsilon$ y $v_2 \geq p_2^*$ y $v_1 + v_2 \geq p_b$

Lo que hay que notar ahora, es el *trade-off* que enfrenta el mnonopolista: al aumentar el precio del bien 2, se está reduciendo su demanda en ϵ. En otras palabras, la probabilidad que le compren bien 2 disminuye. Al contrario, ganará a los consumidores con $p_1^* \geq v_1 \geq p_1 - \epsilon$ y $v_2 \geq p_2^*$ y $v_1 + v_2 \geq p_b$, es decir, consumidores que antes no estaba dispuestos a comprar bien 1, sin embargo con la oferta del bundling, preferirán llevarse el paquete a llevarse sólo el bien 2.
En resumen, el monopolista pierde por un bien, pero gana por el otro, luego hay que ver cual efecto domina.
Observación 2: Al incorporar el bundling, el monopolista no obtiene ninguna ganacia de los consumidores con $v_1 \geq p_1^*$, ya que su precio nunca se distorsionó. Luego basta ver las ganancias que se obtienen para cuando $v_1 \leq p_1^*$.
Dicho lo anterior, las ganancias del monopolio para $v_1 \leq p_1^*$ las podemos descomponer en las ganancias obtenidas por el bien 2, más las ganancias por el bundling.

$$\pi(\epsilon) = p_2(1 - p_2)(p_1 - \epsilon) + p_b \int_{p_1 - \epsilon}^{p_1} \int_{p_b - v_1}^{1} dv_2 dv_1$$

donde,

$$\begin{array}{rc} p_1 = & \frac{1}{2} \\ p_2 = & \frac{1}{2} + \epsilon \\ p_b = & 1 \end{array}$$

Reemplazamos,

$$\pi(\epsilon) = (\frac{1}{2} - \epsilon)^2(\frac{1}{2} + \epsilon) + \frac{1}{2}\{\frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - \epsilon)^2\}$$

Para que al monopolista le convenga hacer bundling se debe tener que las ganancias marginales que obtiene al incrementar "un poquito" el precio del bien 2, tienen que ser mayores o iguales a cero. En otras palabras,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \pi(\epsilon)^{'} \geq 0$$

Tomamos la derivada de $\pi(\epsilon)$ y hacemos $\epsilon \to 0$,

$$\pi(0)^{'} = \frac{1}{4} > 0$$

Por lo tanto, al monopolista le conviene hacer bundling mix.
Ahora bien, también podemos saber cual es el incremento óptimo que el monopolista debe hacer.
Las condiciones de primer orden implican dos valores para ϵ:

$$\begin{array}{rc} \epsilon_1 = & \frac{1}{2} \\ \epsilon_2 = & \frac{1}{6} \end{array}$$

De los cuales se concluye que el incremento que maximiza las ganacias es 1/6.