

Algoritmos Exactos para IP

Dpto. Ingeniería Industrial, Universidad de Chile

IN47B, Ingeniería de Operaciones

Contenidos

- 1 Relajación y Cortes
- 2 Branch and Bound
- 3 Branch and Cut
- 4 Branch and Price

Relajación Lineal

La relajación lineal de un IP es el PL que se obtiene al ignorar las restricciones de variables enteras.

Considere

$$\begin{array}{ll}\text{máx} & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ & -4x_1 + x_2 \geq -9 \\ & 4x_1 + x_2 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \text{ integer}\end{array}$$

Relajación Lineal

- 1 Región factible
- 2 Encuentre solución óptima
- 3 Encuentre solución óptima al problema relajado
- 4 ¿Que obtenemos al multiplicar 2da restricción por -3 y restamos al primero?
- 5 ¿Como cambian las soluciones al agregar esta nueva restricción?
- 6 ¿Cual es la mejor relajación lineal?

Notación

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0, \text{ integer} \end{array}$$

Una solución x del problema lineal, con base B , satisface:

$$x_B + B^{-1}A_N x_N = B^{-1}b$$

Note que $B^{-1}A_j$ y $B^{-1}b$ están en el Tablau. Empezando con $u_{i0} = (B^{-1}b)_i$ fraccional, escribimos:

$$u_{i0} = x_i + \sum_{j \in N} u_{ij} x_j \geq x_i + \sum_{j \in N} \lfloor u_{ij} \rfloor x_j,$$

Ejemplo

Considere

$$\begin{array}{ll}\text{mín} & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} & -4x_1 + 6x_2 \leq 9 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \text{ integer}\end{array}$$

Descripción del Metodo

Resuelve problemas como

$$\begin{aligned} z^* = \quad & \text{mín} \quad c^T x + d^T y \\ \text{s.t.} \quad & Ax + By = b \\ & x, y \geq 0 \\ & x \text{ integer} \end{aligned} \quad (P)$$

Las ideas principales son:

- Sacar la restriccion “ x_j entero”, el problema que queda es una cota inferior de z^* .
- Si fijamos x_j a un entero factible el problema modificado entrega una cota superior en z^*

Descripción del Metodo

BB separa el problema en partes manejables:

- 1 *divide (branch)* se separa el conjunto factible con restricciones adicionales;
- 2 *conquer (bound)* mostrar que un subproblema solo puede entregar soluciones peores.

Método BB

(P_k) el problema (P) con restricciones adicionales
 $U_k \geq z^*$ (valor de mejor solución entera –incumbent)

- Resuelva (P_k) relajado. x^{*k} solución y z_{P_k} valor óptimo
- (bounding) Si $z_{P_k} \geq U_k$ borrar (P_k) (incumbent es mejor)
- (branching) Seleccione x_j^{*k} fraccional. 2 problemas:
 (P_k) mas $x_j \leq \lfloor x_j^{*k} \rfloor$ and (P_k) mas $x_j \geq \lfloor x_j^{*k} \rfloor + 1$.

Ejemplo:

$$\begin{array}{ll}\text{mín} & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} & -4x_1 + 6x_2 \leq 9 \\ & x_1 + x_4 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \text{ integer}\end{array}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{ll}\text{mín} & 12x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 6x_4 \\ \text{s.t.} & 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 \leq 15 \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, 4\end{array}$$

Descripción

Generar cortes para apretar la relajacion LP en cada nodo del arbol BB. Temas: ¿Como generar estos cortes?, ¿Como compartir estos cortes entre nodos?

- V/F? Un corte para la relajacion (P_k) es valida para todos los nodos hijos.
- V/F? Un corte para la relajacion (P_k) que no incluye las variables fijadas es valida para el nodo padre.

Descripción

Cortamos rollos de papel de ancho W para satisfacer una demanda de rollos de papel de anchos $w_1, \dots, w_m$.

Digamos que esta demanda es b_i rollos de ancho w_i para $i = 1, \dots, m$. Queremos minimizar el número de rollos de ancho W utilizados.

e.g. si $W = 70$, podemos obtener 3 rollos de ancho $w_1 = 17$, 1 rollo de ancho $w_2 = 15$, y tenemos un exceso de ancho 4 que no es utilizado.

Descripción

Si x_j es el numero de rollos que se cortan haciendo patron j entonces el problema es:

¿Porque es facil/difícil de resolver?

Use generación de columnas para resolver la relajación del problema cutting stock.

- ¿Qual es el Reduced Master problem?
- ¿Que es el subproblema?

Combinando

C. Barnhart, E.L. Johnson, G.L. Nemhauser, M.W.P. Savelsbergh, P.H. Vance, "Branch-and-Price: Column Generation for Huge Integer Programs, .^operations Research 46 (1998), pp. 316-329.

Suponga que resuelve el nodo raiz del arbol branch and bound con generación de columnas.

¿Que problemas tiene esta combinación?

¿Como influencia a los hijos que el nodo padre no se resuelva con todos las variables?