

# Simulación III

Dpto. Ingeniería Industrial, Universidad de Chile

IN47B, Ingeniería de Operaciones

# Contenidos

- 1 Analizando Resultados
- 2 Reduccion de Varianza

# Definiciones

- $\mathbb{E}(X) = \int_{\text{Dom}(X)} x \cdot f(x) \cdot dx.$
- $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2).$
- $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$
- Si  $X, Y$  son independientes  $\text{Cov}(X, Y) = 0.$
- La reciproca no es cierta.
- $\text{Cor}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}.$

# Estimadores

- Consideramos  $X_i : i = 1, \dots, n$  una muestra de  $X$ .

- $$\bar{X}(n) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

- $\bar{X}(n)$  es un estimador no sesgado de  $\mathbb{E}(X)$ .

- $$S^2(n) = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}(n))^2}{n - 1}.$$

- $S^2(n)$  es un estimador no sesgado de  $\mathbb{V}\text{ar}(X)$ .

- $$\mathbb{V}\text{ar}(\bar{X}(n)) = \frac{\mathbb{V}\text{ar}(X)}{n}.$$

# Teorema Central del Límite

- Consideramos  $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  variables aleatorias iid con  $\mathbb{E}(X_i) = \mu$  y  $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$ .
- Definimos  $Z_i = \frac{\bar{X}(n) - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$ .
- Llamamos  $F_n(z) = \mathbb{P}(Z_n \leq x)$

## Teorema Central del Límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z) = \Phi(z)$$

Donde  $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-y^2/2} dy$ .

# Teorema Central del Límite

- Básicamente el TCL dice que  $Z_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$  cuando  $n$  es grande.
- Otro problema es que  $Z_n$  esta definido en términos de  $\sigma^2$ .

- Definimos 
$$t_n = \frac{\overline{X}(n) - \mu}{\sqrt{\frac{S^2(n)}{n}}}.$$

- Se puede demostrar que  $t_n$  tambien converge a una  $\mathcal{N}(0, 1)$ .
- De ahi podemos decir que  $\mathbb{P}(-z_{1-\alpha/2} \leq t_n \leq z_{1-\alpha/2}) \approx 1 - \alpha$  para  $n$  suficientemente grande.

# Intervalos de Confianza

- De lo anterior, podemos concluir que

$$\mathbb{P}(l(n) \leq \mu \leq u(n)) = 1 - \alpha$$

para  $n$  suficientemente grande, donde

$$l(n) = \bar{X}(n) - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S^2(n)}{n}}$$

y

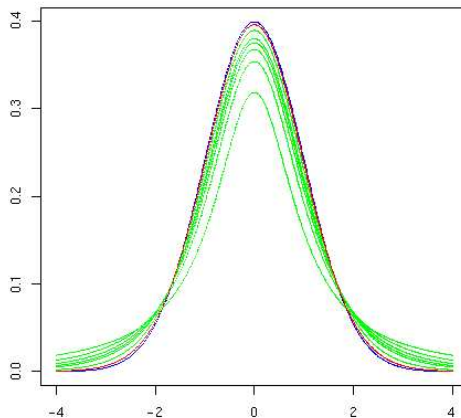
$$u(n) = \bar{X}(n) + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S^2(n)}{n}}$$

# Intervalos de Confianza

- ¿Qué pasa si  $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ?
- En ese caso  $t_n \sim$  T-student de  $n - 1$  grados de libertad.
- Intervalo de confianza exacto esta dado por  $\bar{X}(n) \pm t_{n-1, 1-\alpha/2} \sqrt{S^2(n)/n}$ .
- Se tiene que estos intervalos son mayores a considerar que  $t_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .
- En general, debemos preguntarnos ¿Qué significa  $n$  suficientemente grande?.



# Intervalos de Confianza



# Cobertura Real

- Consideramos intervalos de confianza derivados de la T-student.
- Distinto número de muestras  $n = 5, 10, 20$ , y  $40$ .
- Consideramos  $X_i$  iid con distintas distribuciones.
- Comparamos cobertura real del intervalo estimado a 90 % sobre 500 repeticiones.

Dist	$\nu$	n=5	n=10	n=20	n=40
Normal	0.00	0.910	0.902	0.898	0.900
Exponencial	2.00	0.854	0.878	0.870	0.890
Chi <sup>2</sup>	2.83	0.810	0.830	0.848	0.890
Lognormal	6.18	0.758	0.768	0.842	0.852
Hiper-exp	6.43	0.584	0.586	0.682	0.774

# Midiendo Simetría de Distribuciones

- ¿Qué es  $\nu$ ?
- $$\nu = \frac{\mathbb{E}((X - \mu)^3)}{\sigma^3}.$$
- $\nu$  es una medida de simetria de la distribución.
- Simetría de una distribución es un factor importante al momento de determinar cuando  $n$  es *suficientemente grande* en el contexto del TCL.
- En general, No deberíamos mirar solamente a  $\mu$ , si no que también a  $\sigma^2$  cuando describimos una distribución.

# ¿Cómo obtenemos variables iid?

- Consideremos un sistema de simulación donde hay sólo una medida de desempeño, que es reportada en distintos puntos  $J$  durante la simulación.
- Suponemos además que ejecutamos  $n$  corridas independientes de la simulación, esto define  $X_{i,j}$  con  $i = 1, \dots, n$  y  $j \in J$ .
- Asumiendo buenos números aleatorios, podemos considerar  $\{X_{i,j}\}_{i=1}^n$  como variables iid.
- Desafortunadamente  $\{X_{i,j}\}_{j \in J}$  en la práctica no son independientes, de hecho, usualmente, tienen correlación positiva.

# Algunos Ejemplos prácticos

- Consideramos un modelo M/M/1 con tasa de ocupación  $\rho = ,9$ .
- Estimar promedio de los 25 primeros atrasos.

# Algunos Ejemplos prácticos

- Consideramos un modelo M/M/1 con tasa de ocupación  $\rho = ,9$ .
- Estimar promedio de los 25 primeros atrasos.
- Calculamos 500 intervalos de confianza basados en 5,10,20 y 40 repeticiones.
- Comparamos proporción de intervalos *correctos* y su ancho medio.

# M/M/1, estimando $d_{25}$

n	cobertura	intervalo 90 %	medio ancho
5	0.880	$\pm 0.024$	0.67
10	0.864	$\pm 0.025$	0.44
20	0.886	$\pm 0.023$	0.30
40	0.914	$\pm 0.021$	0.21

# Tiempo medio a Falla

- Sistema con tres componentes.
- Sistema funciona mientras componente 1 funcione y componente 2 o componente 3 funcionen.
- Tiempo falla  $G = \min\{G_1, \max\{G_2, G_3\}\}$ ,  $G_i$  es Weibull(0.5,1).

n	cobertura	intervalo 90 %	medio ancho
5	0.708	$\pm 0.033$	1.16
10	0.750	$\pm 0.032$	0.82
20	0.800	$\pm 0.029$	0.60
40	0.840	$\pm 0.027$	0.44



# Porque queremos reducir varianza?

- La respuesta de una simulación está dada por

$$\left[ \bar{X}(n) - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S^2(n)}{n}}, \bar{X}(n) + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{S^2(n)}{n}} \right]$$

- Más precisión
- Menos trabajo

# Numeros aleatorios communes

Se utiliza cuando se comparan dos o mas sistemas.

Suponga que promueve una modificación en la operacion de cajeros en un banco.

- Sea  $X^m$  el tiempo de espera total de clientes en el banco con la operación original.
- Sea  $X^n$  el nuevo tiempo de espera total.
- Estime  $\mathbb{E}[X^m]$  y  $\mathbb{E}[X^n]$  a partir de simulaciones  $X_1^m, \dots, X_r^m$  y  $X_1^n, \dots, X_r^n$  respectivamente.

Nos interesa  $\theta = \mathbb{E}[X^m] - \mathbb{E}[X^n]$

# Numeros aleatorios communes

## Alternativa 1

- $\bar{\theta} = \overline{X^m} - \overline{X^n}$
- con varianza =  $\text{Var}(\overline{X^m}) + \text{Var}(\overline{X^n})$

# Numeros aleatorios communes

Alternativa 2 (con variables dependientes)

- $Z_i = X_i^m - X_i^n$  tal que  $Z_i$  son IID.
- $\bar{\theta} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r Z_i$
- $\mathbb{V}\text{ar}(\bar{\theta}) = \frac{1}{r} (\mathbb{V}\text{ar}(X_i^m) + \mathbb{V}\text{ar}(X_i^n) - 2\text{Cov}(X_i^m, X_i^n))$

Varianza se reduce si  $\text{Cov}(X_i^m, X_i^n)$  es mayor.

- los mismos números aleatorios al generar  $X^m$  y  $X^n$ .
- la misma sequencia de arriivos a ambos servidores
- la misma sequencia en  $U[0, 1]$  para generar números