El Problema del Vendedor Viajero

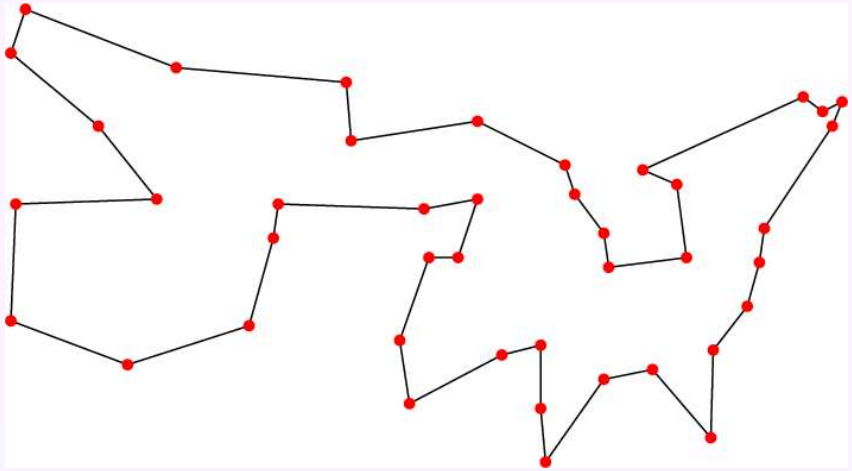
Dpto. Ingeniería Industrial, Universidad de Chile

IN47B, Ingeniería de Operaciones

Contenidos

Definición:

Dado un conjunto finito de *ciudades*, y costos de viaje entre todos los pares, visitar todas las ciudades exactamente una vez a costo mínimo.



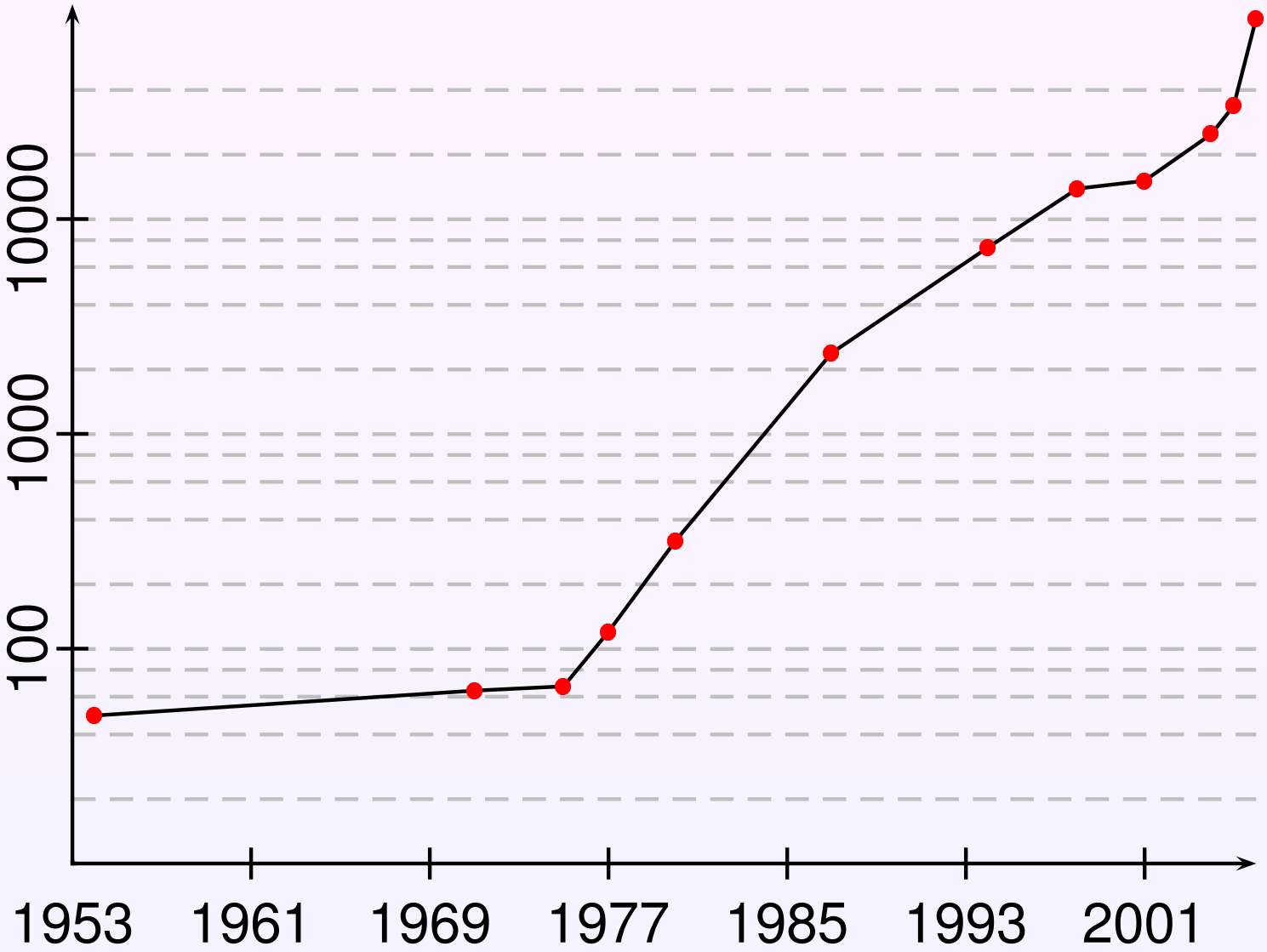
Mas precisamente:

Asumimos costos *simétricos*, i.e. viajar desde la ciudad X a la ciudad Y tiene el mismo costo que viajar desde la ciudad Y a la ciudad X. La condición *de visitar todas las ciudades* implica que el problema se reduce a decidir en que orden las ciudades van a ser visitadas.

- Primeras referencias datan del 1832, para vendedores viajeros.
- Karl Menger, 1930, (Shortest Hamiltonian Path).
- J.B. Robinson, “On the Hamiltonian game (a traveling-salesman problem)”, 1949. Esta es la primera referencia del problema como es conocido hoy en día.
- G. Dantzig, R. Fulkerson, and S. Johnson, ”Solution of a large-scale traveling-salesman problem”, 1954. Solución de una instancia de 49 ciudades (capitales de los estados de USA), introducción de cortes y branching.
- M. Held and R.M. Karp, .A dynamic programming approach to sequencing problems”, 1962. introducción de heurísticas basadas en programación dinámica.

Año	Autores	Ciudades
1954	Dantzig, Fulkerson, and Johnson	49
1971	Held and Karp	64
1975	Camerini, Fratta, and Maffioli	67
1977	Grötschel	120
1980	Crowder and Padberg	318
1987	Padberg and Rinaldi	532
1987	Grötschel and Holland	666
1987	Padberg and Rinaldi	2,392
1994	Applegate, Bixby, Chvátal, and Cook	7,397
1998	[idem]	13,509
2001	[idem]	15,112
2004	[idem] and Helsgaun	24,978
2005	Cook, Espinoza and Goycoolea	33,810
2006	Cook	85,900

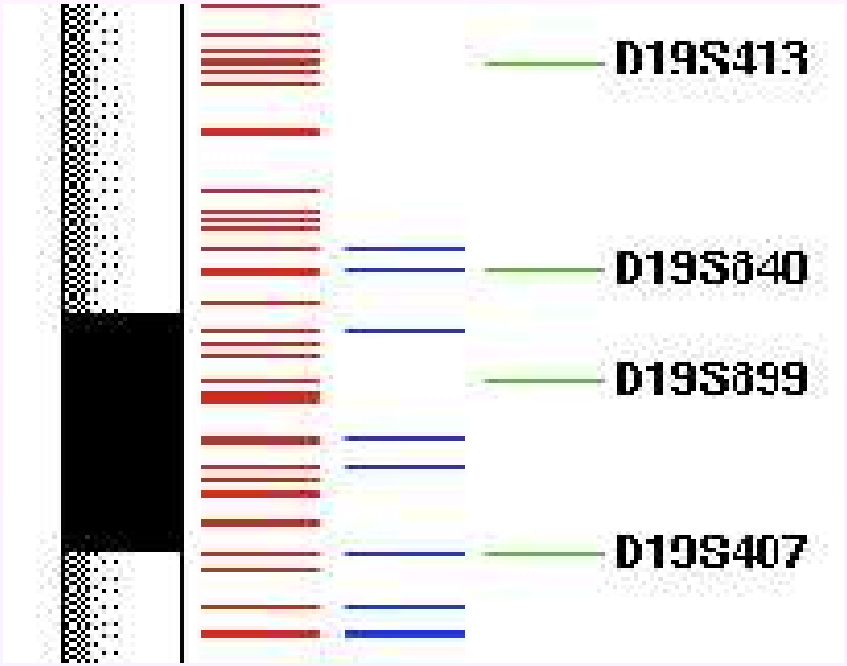
Récord TSP en el tiempo



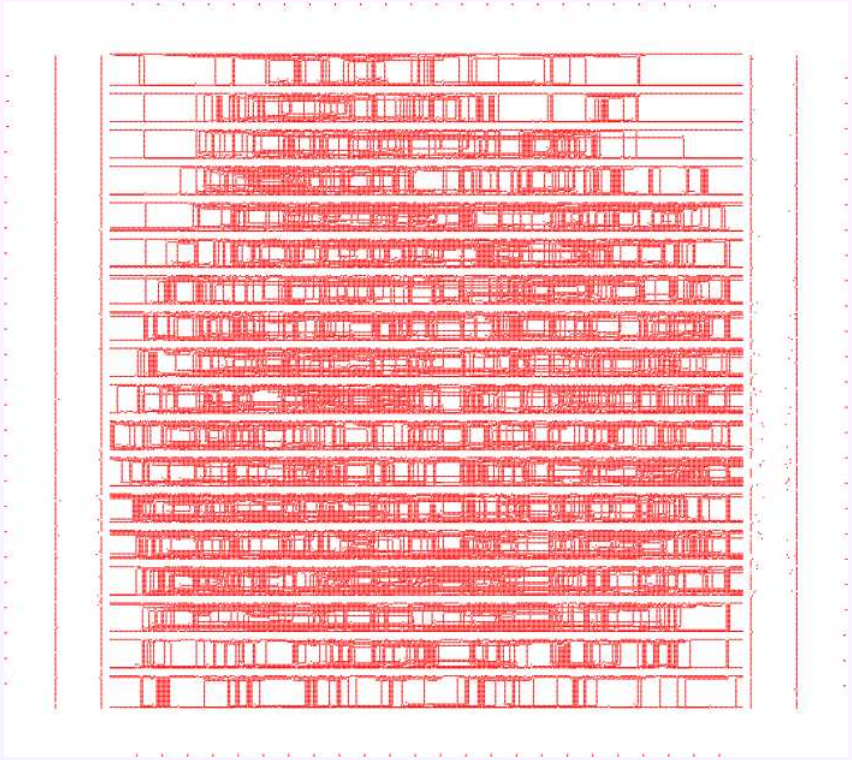
- Ruteo de Vehículos.
  - Bus Escolar.
  - Atención de Llamadas de Emergencia.
  - Servicio de Correo Expreso.

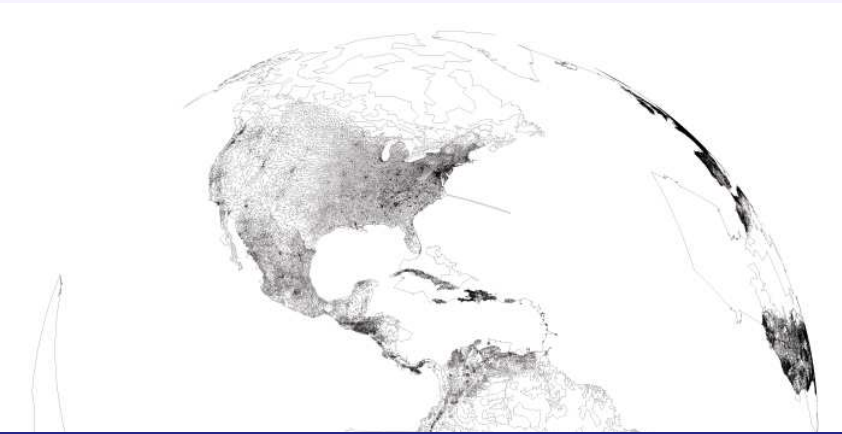
Algunas Aplicaciones del TSP

- Ruteo de Vehículos.
  - Secuenciamiento de genes.
  - Ordenamiento de observaciones en telescopios (NASA).
  - Diseño de chips.
  - Tour Mundial.
  - El problema del Viejo Pascuero.



Algunas Aplicaciones del TSP



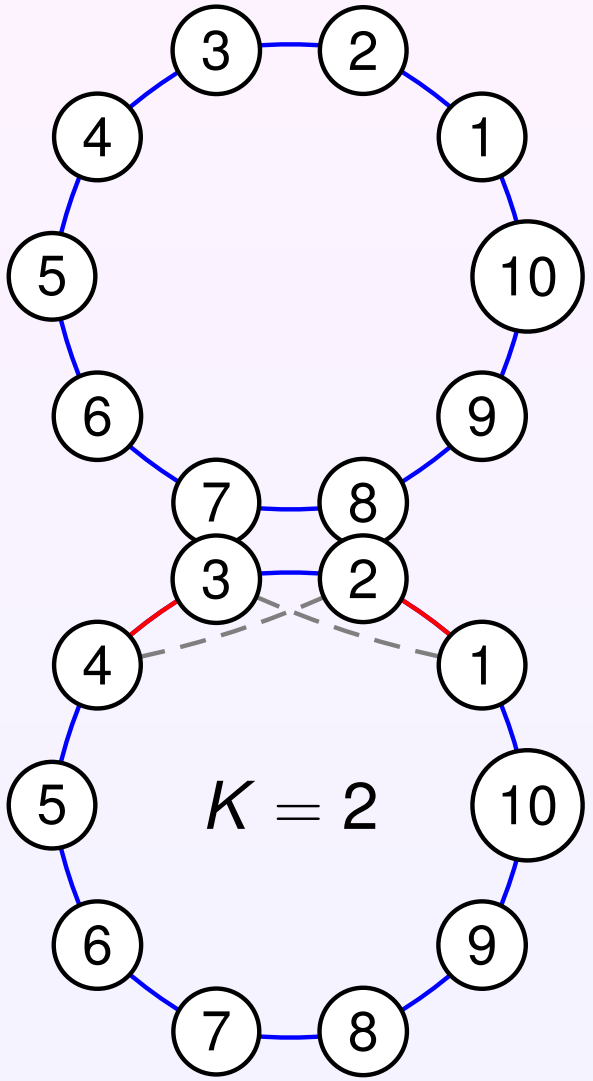


Enumeración y Heurísticas

- ¿Podemos enumerar las soluciones y escoger la mejor?
  - 10 ciudades : $\approx 10^{5,56}$ posibilidades.
  - 100 ciudades : $\approx 10^{155,97}$ posibilidades.
  - 1,000 ciudades : $\approx 10^{2,564,60}$ posibilidades.
  - 85,900 ciudades : $\approx 10^{386,522,04}$ posibilidades.
  - Edad del universo : $\approx 10^{18}$ segundos.
  - Número de átomos en el universo: $< 10^{100}$.
  - Enumeración solo para problemas muy pequeños.

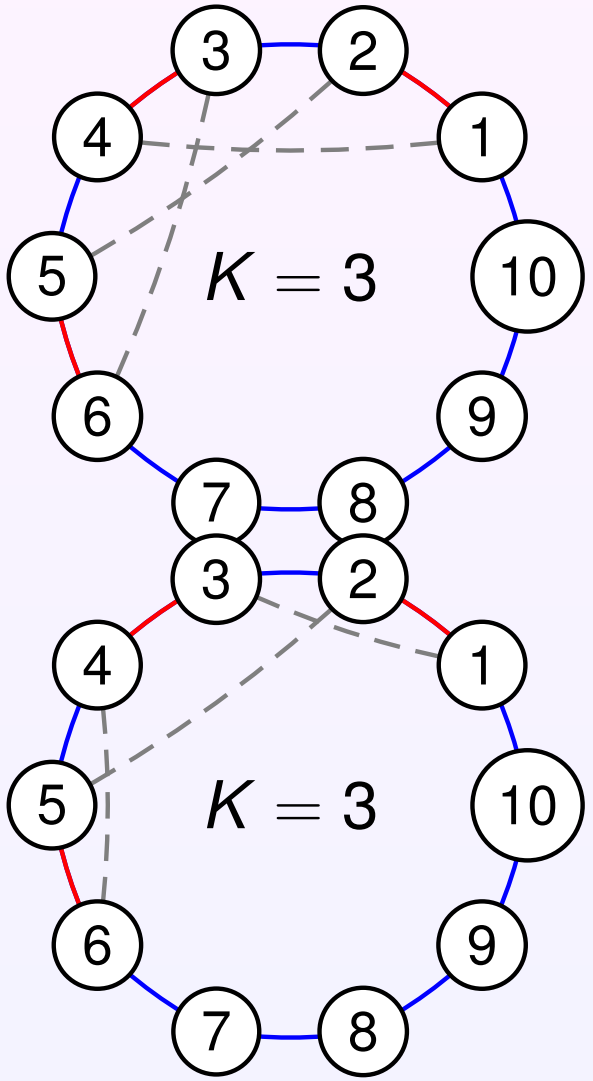
Heurísticas K-Opt

- Reemplazar 2 arcos.
- Reemplazar 3 arcos
- Reemplazar K arcos.
- Lin-Kernighan usa reemplazos de pares.
- Lin-Kernigham-Helsgun usa reemplazos de 5 arcos.
- Heurísticas no proveen cotas para el problema.



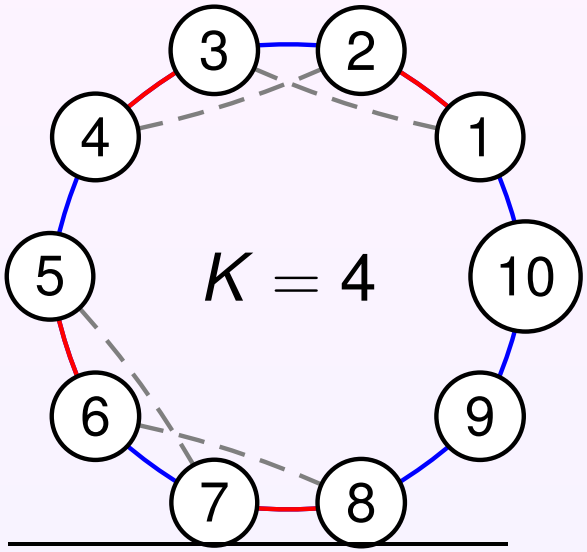
Heurísticas K-Opt

- Reemplazar 3 arcos
- Reemplazar K arcos.
- Lin-Kernighan usa reemplazos de pares.
- Lin-Kernigham-Helsgun usa reemplazos de 5 arcos.
- Heurísticas no proveen cotas para el problema.



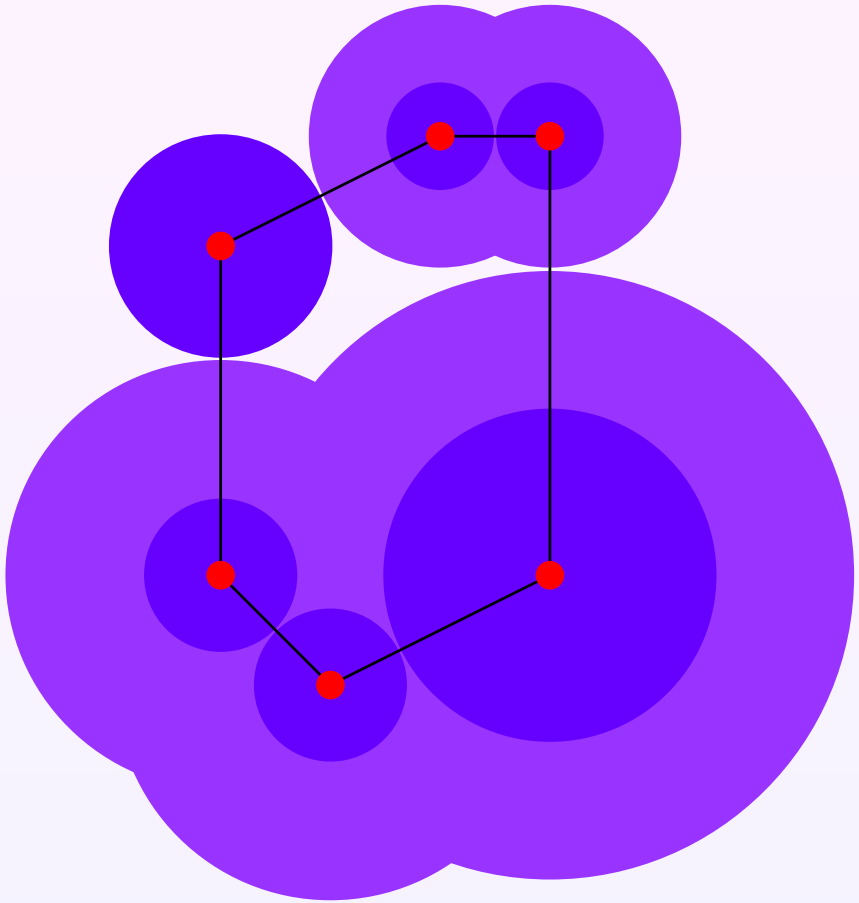
Heurísticas K-Opt

- Reemplazar K arcos.
- Lin-Kernighan usa reemplazos de pares.
- Lin-Kernigham-Helsgun usa reemplazos de 5 arcos.
- Heurísticas no proveen cotas para el problema.

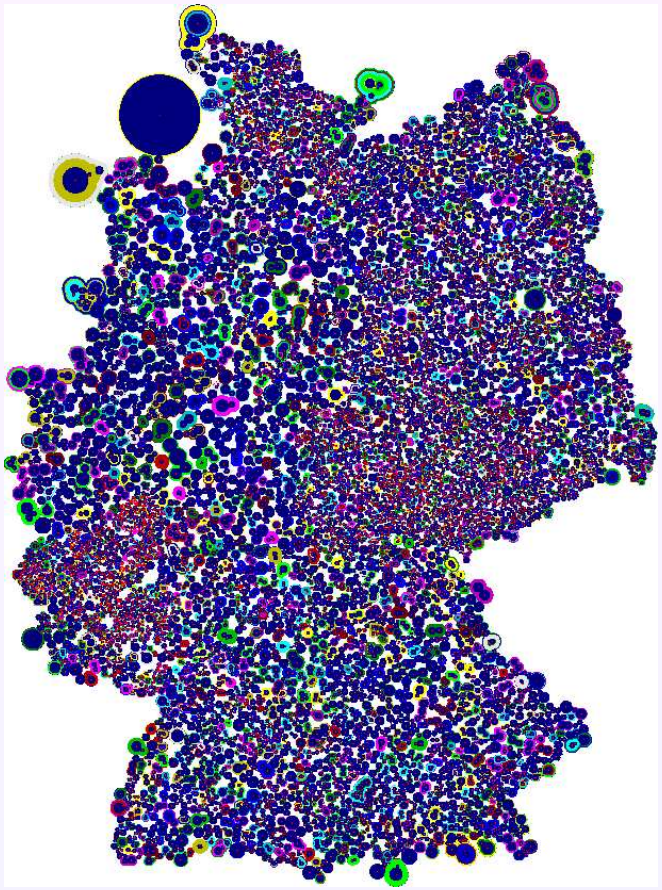


K	Casos
2	1
3	4
4	20
5	148
6	1368
7	15104

- ¿Como obtener cotas o garantías?
- Círculos disjuntos a ciudades.
- Bandas sin intersección a subconjuntos de ciudades.
- Dos veces la suma de los radios da cota inferior.
- ¿Como encontramos radios y bandas?



15,112 ciudades en Alemania, cota a 0.74 % de la solución óptima



Definiciones previas:

V Conjunto de ciudades a considerar.

E Conecciones entre ciudades, i.e. $E = \{(a, b) : a, b \in V, a \neq b\}$.

c Costo de las conecciones entre ciudades.

$\delta(S)$ Arcos cruzando la frontera de un conjunto, i.e. $\delta(S) = \{(a, b) \in E : a \in S, b \in V \setminus S\}$.

Formulación como IP:

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \sum (c_e x_e : e \in E) & \\
& \sum (x_e : e \in \delta(\{v\})) = 2 & \forall v \in V \\
s.t. \quad & \sum (x_e : e \in \delta(S)) \geq 2 & \forall \emptyset \subsetneq S \subsetneq V \\
& x_e \in \{0, 1\} & \forall e \in E
\end{aligned}
$$

Problemas de la formulación discreta

- Tanto o más difícil que contar permutaciones.
- Número de variables es $|V|(|V|-1)/2$.
- No existen algoritmos eficientes para resolver.

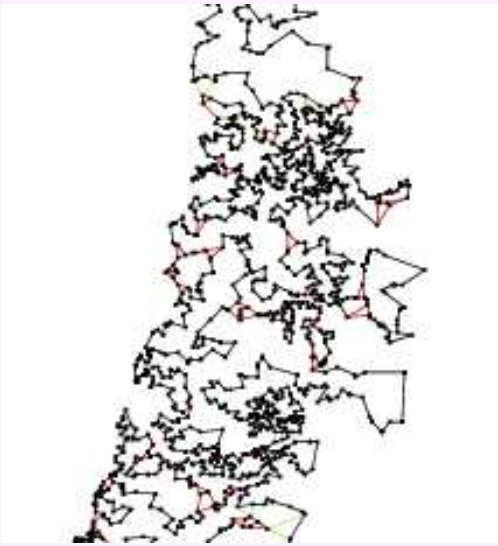
Relajación continua (SEP):

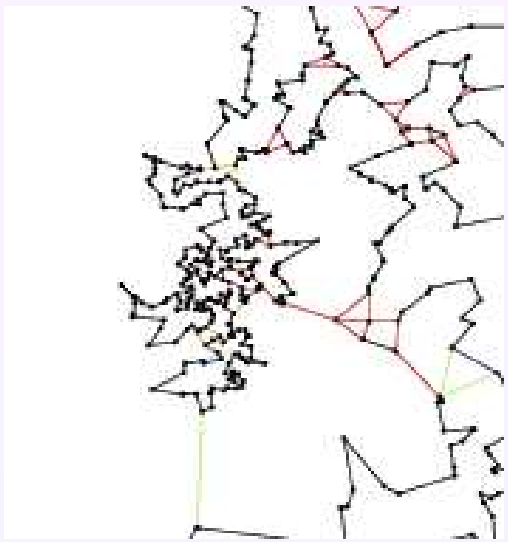
$$
\begin{array}{lrll}
\text{mín} & \sum(c_e x_e : e \in E) & & \\
\text{s.t.} & \sum(x_e : e \in \delta(\{v\})) = 2 & \forall v \in V & (r_v) \\
& \sum(x_e : e \in \delta(S)) \geq 2 & \forall \emptyset \subsetneq S \subsetneq V & (W_S) \\
& x_e \in [0,1] & \forall e \in E &
\end{array}
$$

Puede Resolverse eficientemente.

Cotas obtenidas del SEP

0.69 % gap para chile5445

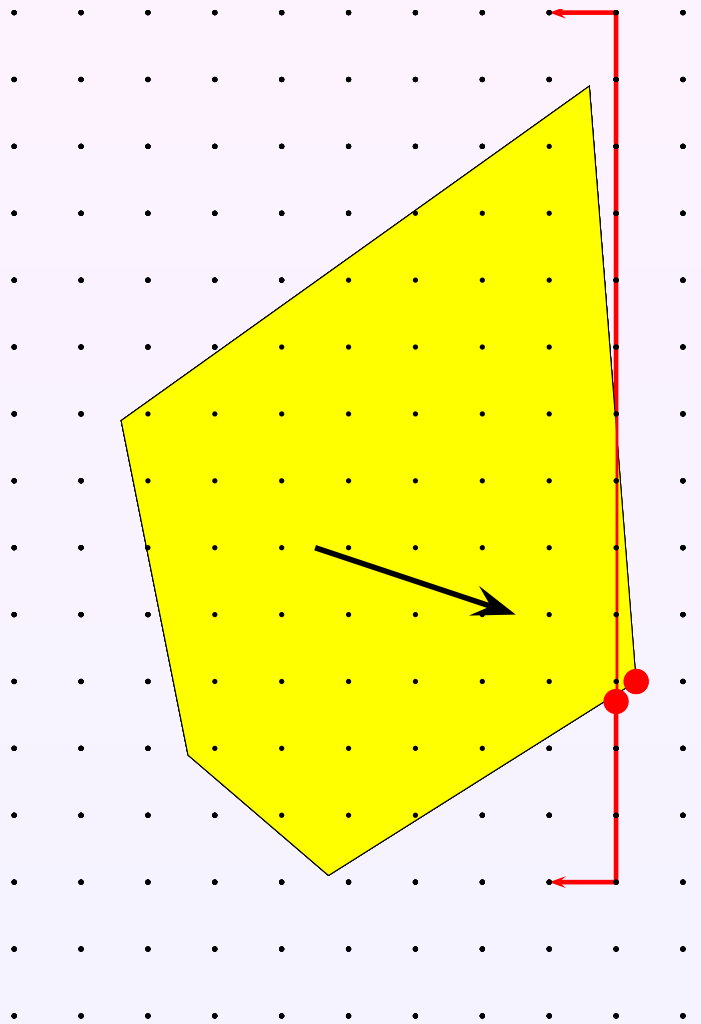




Resolviendo IP usando LP

Propuesto por Dantzig, Fulkerson y Johnson (1954) para al TSP.

1. Considerar relajación continua.
2. Obtener solución óptima x^*.
3. x^* entera?, terminar.
4. Buscar restricción válida para puntos enteros.
5. Agregar a la formulación continua.
6. Volver a 2.

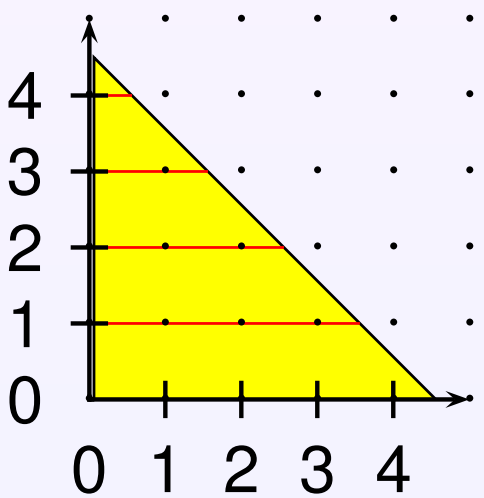


(Algunos) Cortes Estructurales

- Subtour (separable)
- Blossom (Edmonds 1965)(separable)
- Combs (Chvátal 1973, Grötschel y Padberg 1979)
- Clique-Tree (Grötschel y Pulleyblank 1986)
- Star, Path (Fleischmann 1988, Cornuéjols et al. 1985)
- Bipartition (Boyd y Cunningham 1991)
- Binested (Nadeff 1992)
- Double Deckers (Applegate et. al. 1994)
- Domino Parity (Letchford 2000)(planar)
- K-Parity (Cook, Espinoza, Goycoolea 2004)(planar)

Cortes no estructurados

- Idea: generar cortes automáticamente.
- Base: usar una versión simplificada del problema.
- Cortes de Gomory (1958) dentro de esta clase.
  - Considerar solo una restricción (básica).
  - Redondeo entrega corte automáticamente.
  - En teoría resuelve cualquier IP.



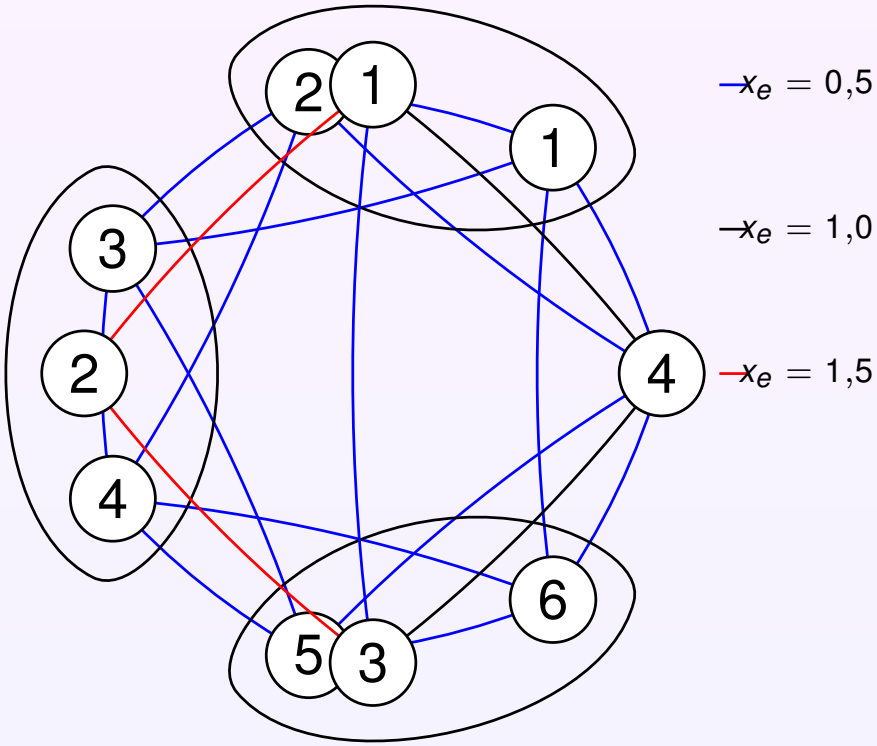
- $x_2 \in \mathbb{Z}$, $x_1 \in \mathbb{R}^+$
- $P = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 \leq 4{,}5\}$.
- $x_1 + x_2 \leq 4{,}5, x_1 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 4{,}5$
- $x_2 \leq 4$.

Cortes no estructurados

Local Cuts en el TSP:

- Reducir a un GTSP pequeño (16-48 nodos).
- Separar punto fraccionario.
- Si punto es separable, agregar corte.
- Problemas numéricos.
- Extensión a MIP.
- Cuando todo falla, ¿Qué podemos hacer?

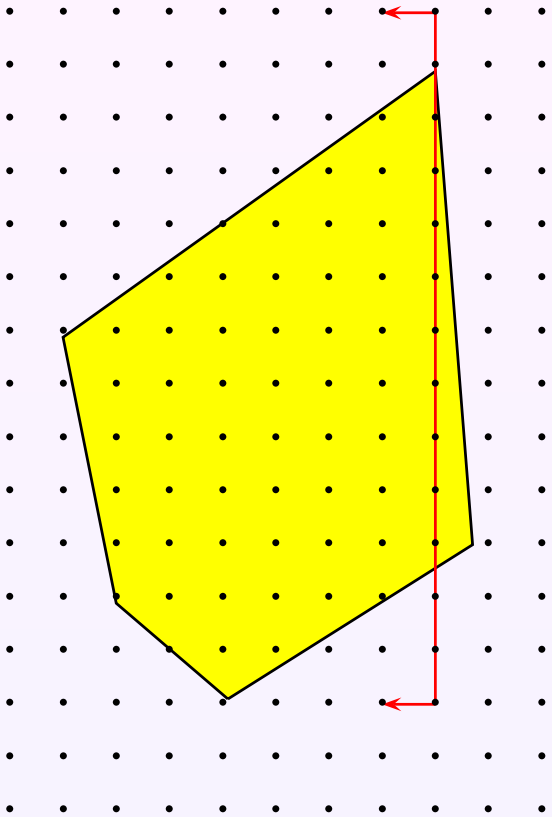
Cortes no estructurados



Dado x^* solución fraccionaria, y P poliedro: $x^* \in P$?

Sean $\{v_k : k = 1, \ldots, K\}$ puntos extremos de P.

$$
\begin{aligned}
\textit{min} \quad & 0 \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{k=1,\ldots,K} \alpha_k v_k = x^* \\
& \sum_{k=1,\ldots,K} \alpha_k = 1 \\
& \alpha_k \in [0, 1]
\end{aligned}
$$



Formulación de MIP:

$$\begin{array}{lll} min & cx & \\ \text{s.t.} & Ax & \leq b \\ & Rx & \in \mathbb{Z}^k \end{array}$$

Relajación:

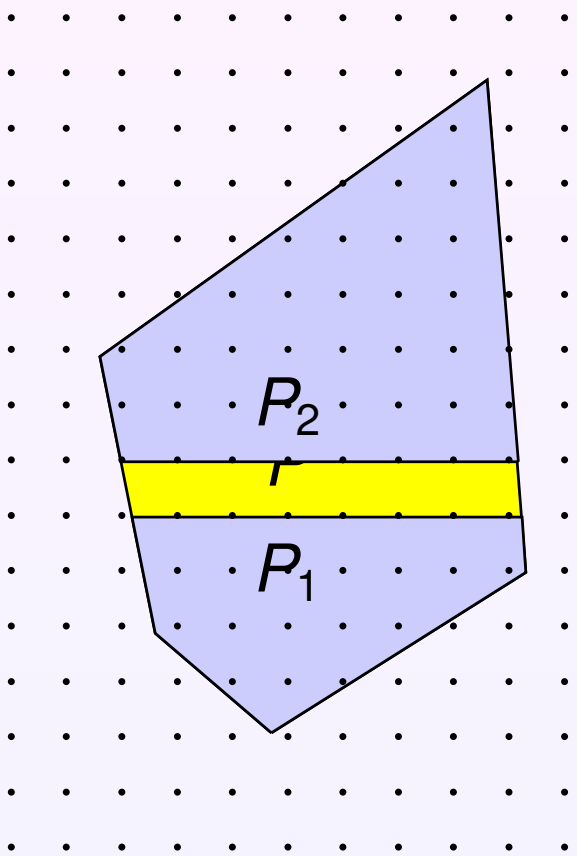
$$\begin{array}{lll} min & cx & \\ \text{s.t.} & Ax & \leq b \\ & QRx & \in \mathbb{Z}^3 \end{array}$$

Usar separación como antes

Entre enumeración y Programación Lineal

Strong Branching (Dividir para reinar)

- Crear sub-problemas mas fáciles.
- Fijar cotas para una variable.
- Resolver cada sub-problema.
- Escoger mayor impacto.
- Usar junto con planos cortantes.



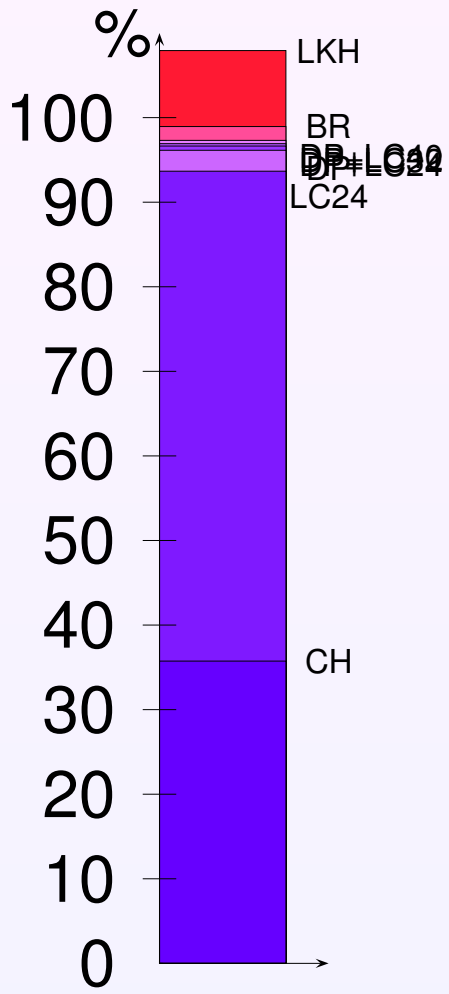
Resultados Numéricos (chile5445)

Mejor solución: 40011.091Km

Conf.	Valor	Tiempo	GAP (%)
Subtour	39755.198	134	0.639
Cortes Heurísticos	39846.738	25518	0.470
Local Cuts (24)	39994.941	14509	0.040
Domino Parity	40001.294	10863	0.024
DP + LC 24	40002.578	14160	0.021
DP + LC 32	40003.294	21159	0.019
DP + LC 40	40004.291	60269	0.017
DP + LC + Branching	40008.475	+3 días	0.007
LKH	40031.459	46	-0.051
Primera Solución	44594.459	3	-11.455

Resultados Numéricos (Sobre Sub-Tour)

Configuración	GAP Relativo
Cortes Heurísticos	35.773
Local Cuts (24)	93.689
Domino Parity	96.171
DP + LC 24	96.673
DP + LC 32	96.953
DP + LC 40	97.343
DP + LC + Branching	98.978
LKH	107.960



Conclusiones

- TSP ofrece un punto de referencia dentro de IP.
- Estrategia depende del objetivo:
  - Solución factible.
  - Buena solución.
  - Optimalidad.
- Muchas técnicas generales han nacido del TSP.
- Importancia de generación de cortes.
- Problemas numéricos.
- Posibilidad de extender Local Cuts para MIP.