Métodos de Descomposición para PL

Dpto. Ingeniería Industrial, Universidad de Chile

IN47B, Ingeniería de Operaciones

Contenidos

Algoritmo generico

1- Escriba el problema reducido (RP) (omitiendo vars.)
2- Resuelva (RP)
3- Resuelva sub-problema que encuentre vars. rentables
4- Si existe variable rentable, agregue a (RP)
 - si no, STOP solución de (RP) es optima
5- GOTO 2

Cadena de Supermercados

- Gran numero de variables en cada tienda:
  – espacio de repisas, inventarios, servicios (limpieza, mantención), programación de turnos
- variables que relacionan tiendas:
  – compra de productos, presupuesto, contrato laboral

Para dos tiendas

$$
\begin{array}{rrllll}
(P) & z = \min & c_1^T x_1 + & c_2^T x_2 & & \\
& \text{s.t.} & B_1 x_1 + & B_2 x_2 & = & b \\
& & A_1 x_1 & & = & b_1 \\
& & & A_2 x_2 & = & b_2 \\
& & x_1, & x_2 \geq 0 & &
\end{array}
$$

Descomposicion del problema

El método de generación de columnas funciona mejor cuando $m << m_1, m_2$.
Defina $S_i := \{x \mid A_i x = b_i,\ x \geq 0\}$, $i = 1, 2$. El problema es equivalente a

$$
\begin{array}{llllll}
(P) & z = \min & c_1^T x_1 + & c_2^T x_2 & & \\
 & \text{s.t.} & B_1 x_1 + & B_2 x_2 & & = b \\
 & & x_1 \in S_1 & & & \\
 & & & x_2 \in S_2 & &
\end{array}
$$

Descomposicion del problema

Como S_i es polyhedral, todo $x \in S_i$ se puede escribir

$$x = \sum_{k \in J_i} \lambda_i^k x_i^k + \sum_{k \in R_i} \theta_i^k w_i^k \text{ donde } \sum_{k \in J_i} \lambda_i^k = 1, \; \lambda_i^k \geq 0, \; \theta_i^k \geq 0$$

- x_i^k son puntos extremos de S_i
- w_i^k son rayos extremos de S_i

Escribimos x asi en (P) para obtener el problema equivalente (M) con $m + 2$ restricciones.

¿Cuantas variables tiene (M)?

Generación de Columnas

Para resolver un problema manejable, consideramos subconjuntos de los puntos y rayos extremos ($\overline{J}_i \subset J_i$ y $\overline{R}_i \subset R_i$).
Esto nos da el problema maestro reducido (RM):

$$
\begin{aligned}
z_{RM} = \\
\min \; & \sum_{k\in\overline{J}_1} \lambda_1^k c_1^T x_1^k + \sum_{k\in\overline{R}_1} \theta_1^k c_1^T w_1^k + && \sum_{k\in\overline{J}_2} \lambda_2^k c_2^T x_2^k + \sum_{k\in\overline{R}_2} \theta_1^k c_2^T w_2^k \\
\text{s.t.} \; & \sum_{k\in\overline{J}_1} \lambda_1^k B_1 x_1^k + \sum_{k\in\overline{R}_1} \theta_1^k B_1 w_1^k + && \sum_{k\in\overline{J}_2} \lambda_2^k B_2 x_2^k + \sum_{k\in\overline{R}_2} \theta_1^k B_2 w_2^k && = b \\
& \textstyle\sum_{k\in\overline{J}_1} \lambda_1^k && && = 1 \\
& && \textstyle\sum_{k\in\overline{J}_2} \lambda_2^k && = 1 \\
& \lambda_1^k, \theta_1^k \geq 0 && \lambda_2^k, \theta_2^k \geq 0
\end{aligned}
$$

Generación de Columnas

Demuestre que $z_{RM} \geq z$

¿Como verificar que solución optima de (RM) resuelva (M)?

Ver costos reducidos de las variablems en (M): optimo si $c_j - c_B^T B^{-1} A_j \geq 0$, (donde $c_B^T B^{-1}$ son var. duales)

Sean (y, σ_1, σ_2) var. duales optimas de (RM). Para ver costos reducidos de los puntos extremos de S_i usamos

(P_1) $\qquad$ (P_2)

$$u_1 = \min \; (c_1 - y^T B_1)x \quad \text{s.t.} \; x \in S_1 \qquad \text{y} \qquad u_2 = \min \; (c_2 - y^T B_2)x \quad \text{s.t.} \; x \in S_2$$

Generación de Columnas

Prop *Si* $u_i \geq \sigma_i$, $i = 1, 2$ *entonces la solución* z_{RM} *es óptima para* (M).

Además, para $i = 1, 2$, *si* $-\infty < u_i < \sigma_i$, *la variable* λ_i^j *tiene costo reducido negativo* $(c_i^T x_i^j - y^T B_i x_i^j < \sigma_i)$. *Si* $u_i = -\infty$, *la variable* θ_i^j *tiene costo reducido negativo.* $(c_i^T w_i^j - y^T B_i w_i^j < 0)$

Dantzig-Wolfe Algorithm

1- Escriba el problema (RM)
2- Resuelva (RM), obtenga (y, σ_1, σ_2)
3- Resuelva (P_i), obtenga u_i y sol optima x_i^j (o w_i^j)
4- IF $u_i \geq \sigma_i$ para todo i
- STOP: solución de (RM) es óptima para (M)
- ELSE IF $-\infty < u_i < \sigma_i$
- agregue x_i^j a $\overline{J}_i$
- ELSE IF $u_i = -\infty$
- agregue w_i^j a $\overline{R}_i$
5- GOTO 2

Temas pendientes

- Para encontrar la base inicial de (RM) use el sgte. problema Fase I: Dado puntos $x_i^1 \in S_i$ escriba

$$\begin{array}{llllll} q = \min & e^T\alpha & & & & \\ \text{s.t.} & \lambda_1^1 B_1 x_1^1 + & \lambda_2^1 B_2 x_2^1 & + (-)\alpha & = b \\ & \lambda_1^1 & & & = 1 \\ & & \lambda_2^1 & & = 1 \\ & \lambda_1^1,\ \lambda_2^1, & \alpha \geq 0 & & \end{array}$$

  Use Dantzig-Wolfe para resolver la Fase I ($\lambda_i^1 = 1$, $\alpha = |b - \sum_i B_i x_i^1|$ es base inicial). Si sol. optima satisface:

  $q = 0$ (P) es factible, se puede encontrar base inicial

  $q > 0$ (P) no tiene solución factible

- ¿Y si paramos antes de encontrar el óptimo?

Temas pendientes

Prop $z_{RM} \geq z \geq z_{RM} + \sum_{i=1}^{2} u_i - \sum_{i=1}^{2} \sigma_i$
proof: Considere (P) y su dual:

$$
\begin{array}{rllll}
(P) z = \text{mín} & c_1^T x_1 + & c_2^T x_2 & & \\
\text{s.t.} & B_1 x_1 + & B_2 x_2 & = b \\
 & A_1 x_1 & & = b_1 \\
 & & A_2 x_2 & = b_2 \\
 & x_1, & x_2 \geq 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rllll}
(D) & & & & \\
z = & & & & \\
\text{máx} & b^T s + b_1^T \pi_1 + & b_2^T \pi_2 & & \\
\text{s.t.} & B_1^T s + A_1^T \pi_1 & & \leq c_1 \\
 & B_2^T s + & A_2^T \pi_2 & \leq c_2
\end{array}
$$

y también (P_i) y sus duales:

$$
\begin{array}{rll}
(P_i) \quad u_i = \text{mín} & (c_i - B_i^T y)^T x \\
\text{s.t.} & A_i x = b_i \\
 & x \geq 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rll}
(D_i) \quad \text{máx} & b_i^T h \\
\text{s.t.} & A_i^T h \leq c_i - B_i^T y
\end{array}
$$

$z_{RM} \geq z \geq z_{RM} + \sum_{i=1}^{2} u_i - \sum_{i=1}^{2} \sigma_i$

$Z_{RM} \geq z$ es porque z considera mas variables

otra desigualdad

- Dualidad debil $\Rightarrow z \geq b^T s + \sum_{i=1}^{2} b_i^T \pi_i$ si (s, π_1, π_2) dual factible.
- (y, σ_1, σ_2) opt dual de $(RM) \Rightarrow Z_{RM} = b^T y + \sum_i \sigma_i$
- Sean h_i sol optima de $(D_i) \Rightarrow$
  - (y, h_1, h_2) sol factible de (D)
  - $u_i = b_i^T h_i$
- $z \geq b^T y + \sum_{i=1}^{2} b_i^T h_i = Z_{RM} - \sum_i \sigma_i + \sum_i u_i$

Ejemplo

Muchas resticciones

Considere el problema con n variables, donde $n << m$:

$$\begin{array}{lll} (P) & \min & c^T x \\ \text{s.t.} & & a_i^T x \leq b_i \quad i = 1 \ldots m \end{array}$$

¿Como usaria un algoritmo de generación de columna para resolver este problema eficientemente?

considere el dual!

Generando restricciones

Definimos un problema restringido usando solamente $k < m$ restricciones

$$\begin{array}{lll} (RM) & \min & c^T x \\ & \text{s.t.} & a_i^T x \leq b_i \quad i = 1 \ldots k \ . \end{array}$$

- Si x^* optimo para (RM) satisface restricciones $i = 1 \ldots m$ entonces resuelve (P)
- Si no, debemos identificar una desigualdad violada

Aqui generación de columnas en el dual = planos cortantes en el primal
Cotas superior e inferior?

Una Compañia de Electricidad

Como satisfacer demanda a costo minimo. x_i generacion térmica, h_i generación hidrica. Satisfacer la demanda en 2 periodos se escribe:

$$
\begin{array}{ll}
\text{mín} & 3x_1 + 3x_2 \\
& x_1 + h_1 \geq 10 \\
& x_2 + h_2 \geq 12 \\
& h_1 \leq 5 \\
& h_2 \leq V_2 \\
& V_2 + h_1 = 5 + r \\
& x_i, h_i \geq 0
\end{array}
$$

Una Compañia de Electricidad

Suponemos
- demanda 2do periodo: 15 or 10 con prob. 1/2
- costo gen termal 2do periodo: 1 or 5 con prob. 1/2
- agua a emalse r: 0 o 10 con prob. 1/2

Pregunta: ¿Mejor estrategia para satisfacer demanda considerando incertidumbre?

scen.	prob.	2^o dem	costo term.	lluvia	best strategy
1	0.125	15	5	0	guardar H20, x_1 alto
2	0.125	10	3	10	usar H20, x_1 bajo
$\vdots$	$\vdots$				

Una Compañia de Electricidad

Solucion: Minimize el valor esperado: $\sum_{i=1}^{8} p_i z_i$.

- z_i es sol. optima para cada escenario.
- algunas variables se deciden antes de la incertidumbre (x_1 y h_1)
- otras se deciden despues de la incertidumbre (x_2 y h_2).

Esto genera un problema con *recurso*:

Formulaciones y notación

Descomposicion de Bender (generación de restricciones) funciona mejor en problemas con gran nro. de restricciones y la sgte estructura:

$$
\begin{array}{lllllll}
\min\limits_{x,y_1,\ldots,y_k} & c^T x + & f^T y_1 & \ldots & f^T y_k & & \\
\text{s.t.} & Ax & & & & = & b \\
 & B_1 x & Dy_1 & & & = & d_1 \\
 & B_2 x & & Dy_2 & & = & d_2 \\
 & \vdots & & \ddots & & = & \vdots \\
 & B_k x & & & Dy_k & = & d_k \\
 & \multicolumn{5}{c}{x,\ y_1,\ \ldots,\ y_k \geq 0} & \\
\end{array}
$$

Formulaciones y notación

Resolvemos cada minimización separadamente:

$$\begin{array}{ll} \min_x & c^T x + \sum_{i=1}^{k} \phi_i(x) \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

donde

$$\phi_i(x) = \begin{array}{ll} \min_{y_i} & f^T y_i \\ \text{s.t.} & Dy_i = d_i - B_i x \\ & y_i \geq 0 \end{array} \qquad \text{para todo } i = 1, \ldots, k.$$

Formulaciones y notación

La función $\phi_i(x)$ es lineal por partes y convexa
$\phi_i(x)$ se construye agregando restricciones:

- Corte de optimalidad: Si $\gamma \geq \phi_i(x)$, $(d_i - B_i x)^T z^k \leq \gamma$ para todo z^k punto extremo de $D^T z \leq f$
- Corte de factibilidad: Si x hace $\phi_i(x) = \infty$ (infactible, dual no acotado) esto se evita restringiendo $(d_i - B_i x)^T w^k \leq 0$ para todo w^k rayo extremo de $D^T z \leq f$

Formulaciones y notación

El problema maestro es:

$$\begin{array}{ll}
\min_x & c^T x + \sum_{i=1}^k \gamma_i \\
\text{s.t.} & Ax = b \\
& x \geq 0 \\
& d_i^T z^k - x^T B_i^T z^k \leq \gamma_i \;\text{ para } z^k \text{ BFS de } D^T z \leq f \\
& d_i^T w^k - x^T B_i^T w^k \leq 0 \;\text{ para } w^k \text{ rayo extrm de } D^T z \leq f
\end{array}$$

Ojo que D y f pueden variar por escenario tambien.

Algoritmo

1- Formule (RM) (i.e. encuentre una BFS para $D^T z \leq f$)
2- Resuelva (RM) y obtenga sol optima (x^*, γ^*)
3- Resuelva subproblema $\phi_i(x^*)$ para todo i
4- IF todos subproblemas satisfacen $\phi_i(x^*) \leq \gamma_i^*$
- STOP: (x^*, γ^*) es óptima, satisface todos los cortes
- ELSE IF un i tiene $\infty > \phi_i(x^*) > \gamma_i^*$
- agregue corte optimalidad $d_i^T z^k - x^T B_i z^k \leq \gamma_i$
- ELSE IF un i tiene $\phi_i(x^*) = \infty$
- agregue corte de factibilidad $d_i^T w^k - x^T B_i w^k \leq 0$
5- GOTO 2