Repaso Optimización

Dpto. Ingeniería Industrial, Universidad de Chile

IN47B, Ingeniería de Operaciones

Contenidos

Definición

Problema de optimización con todas funciones lineales.

- Un avance científico mayor del siglo XX
- Un modelo relativamente simple
- Versátil, representa o aproximar muchas aplicaciones
- Análisis de sensibilidad, insight en solución
- El método de Simplex, introducido en 1947 (G. Dantzig) (válido hasta el dia de hoy)
- Softwares: CPLEX, Minos, LOQO, MOSEK..

Un problema lineal en forma estandar:

$$\begin{aligned} z_* = \quad \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Ejemplo

$$
\begin{array}{rll}
z = & \text{máx} & x_1 + x_2 \\
& \text{s.t.} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\
& & x_1 \leq 4 \\
& & -x_1 + x_2 \leq 2 \\
& & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

La region factible es un polihedro
Las esquinas de un polihedro son *puntos extremos*.
Puntos extremos no pueden ser escritos como una comb. convexa de otros puntos en la region.

Definición problema dual

Sean a_i^T las filas y A_j las columnas de la matrix A.
Dado un problema lineal (P)

$$
\begin{array}{llll}
(P) & \text{mín} & c^T x & \\
 & \text{s.t.} & a_i^T x = b_i & i \in M_1 \\
 & & a_i^T x \leq b_i & i \in M_2 \\
 & & a_i^T x \geq b_i & i \in M_3 \\
 & & x_j \geq 0 & j \in N_1 \\
 & & x_j \leq 0 & j \in N_2 \\
 & & x_j \text{ no acotado} & j \in N_3
\end{array}
$$

Definición problema dual

...existe un LP relacionado (D):

$$
\begin{array}{llll}
(D) & \text{máx} & y^T b & \\
 & \text{s.t.} & y^T A_j \leq c_j & j \in N_1 \\
 & & y^T A_j \geq c_j & j \in N_2 \\
 & & y^T A_j = c_j & j \in N_3 \\
 & & y_i \text{ no acotado} & i \in M_1 \\
 & & y_i \leq 0 & i \in M_2 \\
 & & y_i \geq 0 & i \in M_3
\end{array}
$$

Definición problema dual

Encuentre el problema dual de

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \text{mín} & 2x_1 + x_2 \\
& \text{s.t.} & -x_1 + 3x_2 = 5 \\
& & 2x_1 + 7x_2 \geq 3 \\
& & x_1 \leq 1 \\
& & x_1 \geq 0 \\
& & x_2 \text{ unrestricted}
\end{array}
$$

Relación entre (P) y (D)

En notación matricial tenemos

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \text{then} \quad (D)\quad \begin{array}{ll} \max & y^T b \\ \text{s.t.} & y^T A \leq c^T \end{array}$$

Que también se expresa de forma más simetrica

$$(D)\quad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y + s = c \\ & s \geq 0 \end{array}$$

Relación entre (P) y (D)

Teorema El dual del dual es el primal.
dem: Calcule el dual de

$$\begin{array}{lll} (D) & \text{máx} & y^T b \\ & \text{s.t.} & y^T A \leq c^T \end{array}$$

Relación entre (P) y (D)

Teorema (Dualidad Débil) Si x es factible en (P) e y es factible en (D), entonces $y^T b \leq c^T x$

Teorema (Dualidad fuerte) Si (P) tiene una solución optima x^* entonces (D) tiene una solución optima y^*. Además se tiene que $(y^*)^T b = c^T x^*$
dem: Encuentre una base optima del problema (P)...

Relación entre (P) y (D)

Complete

$(P) \quad \ddots \quad (D)$	optimo finito	no acotado	no factible
optimo finito			
no acotado			
no factible			

Problema de camino mínimo

Encuentre el dual del problema de camino mínimo escrito como problema de flujo

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Nx = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

donde b t.q. $b_s = 1$, $b_t = -1$, y $b_i = 0$ para $i \neq s, t$.

Problema de flujo

Encuentre el (D) para el problema de flujo en general:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Nx = b \\ & 0 \leq x \leq u \, . \end{aligned}$$

Definición

$$
\begin{array}{llll}
(P) & \text{mín} & c^T x & \\
 & \text{s.t.} & Ax \geq b & \text{and} \\
 & & x \geq 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
(D) & \text{máx} & y^T b \\
 & \text{s.t.} & y^T A \leq c \\
 & & y \geq 0
\end{array}
$$

Teorema (Holgura Complementaria) Sean x e y soluciones primal y dual factibles. Entonces $x,\ y$ son optimos si y solo si

$$
\begin{cases}
y_i(a_i^T x - b_i) = 0 & i = 1, \ldots, m \\
x_j(c_j - y^T A_j) = 0 & j = 1, \ldots, n
\end{cases}
$$

dem:

Ejemplo:

$$
\begin{array}{lll}
\text{mín} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\
\text{s.t.} & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\
& 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\
& 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_5 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(D) & \text{máx} & y_1 + 3y_2 + 4y_3 \\
& \text{s.t.} & 3y_1 + 5y_2 + 2y_3 \leq 1 \\
& & 2y_1 + y_2 + 5y_3 \leq 1 \\
& & y_1 + y_2 + y_3 \leq 1 \\
& & y_2 \leq 1 \\
& & y_3 \leq 1 \\
& & y_1, y_2, y_3 \text{ sinrestricciones}
\end{array}
$$

¿Es $x_1 = 0$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 5/2$, $x_5 = 3/2$ optimo?

Interpretación de variables duales

Recuerde si x^* es optimo para $\min c^T x \ : \ Ax = b, \ x \geq 0$, con base optima B, entonces $(y^*)^T = c_B^T B^{-1}$ es la variable dual optima.

Si x^* es una solución optima no-degenerada y cambiamos b a $b' = b + \Delta b$, con Δb pequeño. ¿Como cambia la función objetivo?

Variables duales se conocen tambien como *shadow prices*.

Interpretación de variables duales

Ejemplo Considere el sgte problema de producción e inventario.

$$\begin{array}{rl} \text{mín} & x_1 + 10x_2 + 3I \\ \text{s.t.} & x_1 \quad - I \geq 10 \\ & \quad x_2 + I \geq 12 \\ & \qquad I \leq 5 \\ & x_1, x_2, I \geq 0 \end{array}$$

¿Cual es la solución optima? ¿Como cambia la función objetivo si aumentamos la capacidad de almacenaje a 6?

Resumen

- Variables duales de restricciones no activas son cero (no hay costo en cambiar este b_i).
- Dado $\min c^T x : Ax \geq b$, una solucion basica primal es factible dual si c se puede expresar como una combinación positiva de las restriciones activas.
- Una solución basica infactible en $(P) \leftrightarrow$ una BFS en el dual.
- Para $\min c^T x : Ax \geq b$ al menos uno de (P) o (D) es no acotado.

Algoritmos básicos

- Solución gráfica
- Evaluar todos los puntos extremos.
  Para $\min c^T x \ : \ Ax = b, \ x \geq 0$, podemos:
  1. Construir solución basica
  2. Si factible, determine si es de valor minimo.
  3. Repetir 1 hasta visitar todas las BFS.

¿Como mejoramos esto?

Direcciones factibles de un BFS

- **Definición** Para P conjunto convexo y punto $x \in P$, el vector d es una direción factible si $x + \theta d \in P$ para algun $\theta > 0$.
- El algoritmo de simplex se mueve entre BFS adjacentes (solo se diferencian por 1 variable básica)
- Sea la BFS $x = (x_B, x_N)$ y la dirección factible $d = (d_B, d_N)$ tal que la dirección mete la variable no basica j a la basis, dejando el resto en zero.

Direcciones factibles de un BFS

- Entonces la *j-th dirección basica* satisface:
  - $d_j = 1$ y $d_i = 0$ para variables non-basicas $i \neq j$
  - $d_B = -B^{-1}A_j$
- Cuanto nos podemos mover en d depende de x y d:
  - Si x es no-degenerado, entonces $x_B > 0$,
  - Si x is degenerado, entonces $x_{B(i)} = 0$ para alguna variable basica y ademas $(-B^{-1}A_j)_{B(i)}$ podria ser negativo.

Costos Reducidos y Condiciones de Optimalidad

Definición Dado x un BFS con base B y $c = (c_B, c_N)$. El **costo reducido** $\bar{c}_j$ de variable x_j es $\bar{c}_j = c_j - c_B^T B^{-1} A_j$.

Condiciones de Optimalidad

- Un BFS $x \in P = \{x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ es optimo si $\bar{c} \geq 0$
- Una base B es optima si: (a) $B^{-1}b \geq 0$ y (b) $\bar{c} \geq 0$

Iteración del Método de Simplex

- Empieza en un BFS x:

$$\begin{array}{lll} Ax = b & A = [B\ N] & x_B = B^{-1}b \geq 0 \\ x \geq 0 & x = (x_B, x_N) & x_N = 0\ . \\ & c = (c_B, c_N) & \end{array}$$

- Encuentra una dirección factible d

$$\begin{array}{lll} (d_N)_j = 1 & j \in N & \\ (d_N)_i = 0 & i \in N, i \neq j & b = Bx_B + \theta(Bd_B + Nd_N) \Rightarrow d_B = -B^{-1}A_j \\ d_B = -B^{-1}A_j & & \end{array}$$

que **reduce costo** $c^T(x + \theta d) < c^T x \Rightarrow c^T d < 0$, o equivalentemente que el *costo reducido* de x_j

$$\bar{c}_j := (c_N)_j - c_B^T B^{-1} A_j < 0$$

Iteración del Método de Simplex

- Move as much as possible in that direction, i.e. need to enforce that $x + \theta d \geq 0$

$$\min_{i:(B^{-1}A_j)_i>0} \frac{(x_B)_i}{(B^{-1}A_j)_i} \leq \theta \leq 0$$

Ejemplo

Considere el LP siguiente con $n = 5$ y $n - m = 2$, y haga una iteración de Simplex:

$$\begin{array}{lcccccccccl}
\text{mín} & 0x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 0x_5 & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = 5 \\
 & & & x_2 & - & x_3 & & & + & x_5 & = 3 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & & & & & & & = 4
\end{array}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \ \geq 0$$

Ejemplo

- **Encuentre un BFS:** (¿Pueden ser x_3, x_4, x_5 basicas?, y x_2, x_4, x_5?)
- ¿Que *direcciones basicas* hay del BFS con x_2, x_3, x_4 basicas?
- ¿Cuanto nos podemos mover en esta dirección?
- **Costos Reducidos:** ¿Cuanto cambia la función objetivo con estos movimientos?

El Método de Simplex en Tableau

El tableau is una forma de mantenerse organizado. Se mantienen todos los coeficientes de interes en un arreglo. Se hacen operaciones elementales de matrices a fin de mantener I sobre las variables basicas.

- Multiplica fila por numero
- Multiplica fila por numero y suma a otra fila

Por ejemplo

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & c_B^T & c_N^T \\ \hline b & B & N \\ \hline \end{array} \quad \text{pivoteo} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline -c_B^T B^{-1} b & 0 & c_N^T - c_B^T B^{-1} N \\ \hline B^{-1} b & I & B^{-1} N \\ \hline \end{array}$$

El Método de Simplex en Tableau

¿Como encontramos:?

- x_B
- $\bar{c}_j$
- d_B
- B^{-1}

El Método de Simplex en Tableau

Escriba el tableau para:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & -2x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 \qquad\;\; \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

- Muevase de un BFS a uno adjacente
- En el Tableau mantenga la base representada por la matriz I.

El Método de Simplex en Tableau

Resumiendo:
si la dirección obtenida al meter la variable no-basica j a la basis es:

$$(d_B, d_N) = (-B^{-1}A_j, e_j) = (-u_{1j}, \ldots, -u_{mj}, e_j)$$

entonces nos podemos mover en dirección d a lo mas

$$\theta = \min_{i: u_{ij} > 0} \frac{(x_B)_i}{u_{ij}}$$

Encontramos $u_j = B^{-1}A_j = -d_B$ en el tableau bajo la variable no-basica j.

Condiciones de Optimalidad

Teorema Dado x BFS con basis asociada B, y vector de costos reducidos $\bar{c}$ entonces

(a) Si $\bar{c} \geq 0$ entonces x es optima

(b) Si x es optima y nondegenerada entonces $\bar{c} \geq 0$.

Definicion Una basis B es optima si

(a) $B^{-1}b \geq 0$, y

(b) $\bar{c}^T = c^T - c_B^T B^{-1} A \geq 0^T$.

Outline del Metodo de Simplex

Sean u_{ij} los elementos del tableau, $i = 0, \ldots, m$ and $j = 0, \ldots, n$.

1. Test de optimalidad: Si $\bar{c}_j \geq 0 \ \forall\ j$ STOP, encontro el optimo
2. Test de no acotado: Si $\bar{c}_j < 0$ y $u_{ij} \leq 0 \ \forall\ i$ STOP, no-acotado
3. Si $\bar{c}_j < 0$ y al menos uno $u_{ij} > 0$:
   - x_j entra a la basis
   - x_l deja la basis: $\dfrac{x_l}{u_{lj}} = \min\limits_{u_{ij}>0} \dfrac{x_i}{u_{ij}}$
   - Actualize el Tableau: $u'_{lq} = \frac{u_{lq}}{u_{lj}}$ y $u'_{iq} = u_{iq} - \frac{u_{lq}}{u_{lj}} u_{ij}$
   - Ir a 1.

Temas Pendientes

- ¿Siempre obtenemos un BFS al movernos por d hasta θ^*?
- ¿Cuando paramos el algoritmo?
- ¿Podemos visitar una misma BFS nuevamente?
- ¿Cuantas esquinas visitamos en total?
- ¿Cual es el trabajo por iteración?
- ¿Como encontramos la BFS inicial?
- ¿Como resolvemos un problema casi igual?
- ¿Como representamos conjuntos no acotados