Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN47A: Gestión de Operaciones
Prof: Andrés Weintraub, Rafael Epstein
Aux : G. Reyes, S. Souyris

Guía de Problemas de Programación Lineal
Abril, 2004.

1. Una empresa constructora de circuitos eléctricos ha comprado un brazo mecánico a modo de automatizar su producción. La construcción de cada circuito requiere hacer N conexiones, las cuales están separadas entre sí. Dada ésta separación el brazo demora t_{ij} segundos en ir desde la conexión i a la conexión j. Por último, se sabe que al finalizar la construcción de un circuito, el brazo vuelve a una posición inicial para permitir sacar el circuito de la línea productiva. Formule el modelo que permita encontrar el menor tiempo de construcción de cada circuito a modo de aumentar el nivel productivo de la empresa.

2. Suponga que usted que trabaja en la Gerencia de Marketing de una empresa y que le han pedido que defina las promociones que se realizarán durante los distintos meses del año para el producto estrella de la empresa. Estas promociones pueden ser, por ejemplo, distintas reducciones de precio(10 %, 20 %, etc.) por períodos breves, concursos y sorteos, regalos por la compra del producto, entre otros. Para esta planificación, la siguiente información es relevante:

   - Cuenta con un presupuesto de B pesos para todo el año.
   - En cada mes cuenta con H_m horas hombre de personal(por ejemplo, promotoras y vendedores).
   - Existe un conjunto de N promociones posibles del cual usted puede seleccionar hasta n promociones para realizar en cada mes(este conjunto es el mismo para los distintos meses del año).
   - En cada mes no se pueden efectuar más de n promociones.
   - Una promoción i ($i = 1...N$) en el mes m necesitará un presupuesto de b_{im} pesos. Además si se realiza una promoción i en el mes m, las ventas aumentarán en vf_{im} pesos en dicho mes además de vu_{im} por cada hora hombre de personal de ventas incluido. (Nota: Si no se realiza ninguna promoción durante todo el año las ventas serán iguales a v_0.)

   Formule un problema de programación lineal que al resolverlo le permita determinar el calendario óptimo de promociones, es decir, cuál es el conjunto de promociones que se deben llevar a cabo en cada mes y con qué dotación de personal asignado que le permite a usted maximizar las ventas totales del año.

3. La empresa de zapatos MEDIAHORA desea planificar su producción e inventarios para los próximos T períodos de modo de cumplir con la demanda esperada de sus clientes. Para esto, ha agregado sus productos en K familias y dispone de un estudio que predice que la demanda esperada por productos de la familia k en el período t será d_{kt}. La empresa sabe que el cuello de botella en el proceso productivo es la cantidad de horas de artesanos, siedo A_t la cantidad de horas de artesanos disponibles en el período t. Esta cantidad por temas de capacitación, no puede aumentar ni disminuir en el horizonte. Se sabe además que cada unidad de los productos pertenecientes a la familia k consume a_k horas de artesano.

   La empresa posee una bodega con capacidad para almacenar B unidades en cada período. El costo de almacenar cada unidad de productos pertenecientes a la familia k en el período t es b_{kt}. Sin embargo, también existe la posibilidad de almacenar en bodegas de terceros, sín límite, pero a un costo por unidad para los productos pertenecientes a la familia k en el período t igual a g_{kt}.

a) Plantee un modelo de programación lineal que permita encontrar la estrategia óptima para el problema de MEDIAHORA ¿que tipo de modelo de programación lineal obtubo?

b) Comente la validez del modelo si $g_k t$ fuese menor que $b_k t$, pero asumiendo que por política de la empresa la bodega de terceros sólo se puede ocupar cuando se ha copado la bodega propia. ¿Que tipo de modelo estima necesario en este caso?¿Por qué?

4. Una determinada empresa tiene M plantas productoras ubicadas en diferentes regiones, siendo S_i la capacidad de producción por período de la planta i. Ésta empresa produce un único artículo en todas sus plantas y este artículo es demandado en N ciudades diferentes durante T períodos, siendo D_{jt} la demanda de la ciudad j para el período t, demandas que deben ser satisfechas. El costo unitario de producción en la planta i en el período t es c_{it}. No se puede guardar inventario en las plantas.

   La empresa cuenta con P bodegas ubicadas en diferentes puntos geográficos del país. De ésta manera la producción de las plantas es llevada hasta las bodegas y desde allí se abastece a las ciudades. Si una unidad de producto que llega a una bodega en un período es despachada en el mismo período hacia su destino, la empresa no incurre en costos de almacenamiento. Sin embargo, existe la posibilidad de guardar producto en inventario en las bodegas desde un período a otro, lo cual tiene un costo variable de g_k por cada unidad de producto almacenada durante un período en la bodega k, y se debe considerar que la capacidad de inventario en cada bodega es de W_k unidades.

   Finalmente, el costo de transporte desde la planta i a la bodega k en el período t es PB_{ikt} y el costo de transporte desde la bodega k a la ciudad j en el período t es BC_{kjt}, ambos por unidad de producto transportada.

   Plantee un modelo de programación lineal que resuelva el problema de producción y transporte de la empresa de manera de minimizar los costos totales.

5. Una compañía salmonera dispone de S centros de producción de salmones y P distintos países donde venderlos en los próximos T períodos. En el país p en el periodo t, el precio unitario de los salmones es P_p^t y se puede vender a lo mas D_p^t unidades.

   Asuma que la producción de salmones no tiene costo. Sin embargo, deben mantenerse ciertas restricciones en la producción del preciado recurso: en primer lugar debe considerarse que el número de salmones disponibles para la venta en un período cualquiera es el doble del número de salmones que quedaron disponibles en el período anterior. En segundo lugar y por regulaciones medioambientales, debe mantenerse una cantidad mínima de MIN salmones en cada centro productivo cada período. Asuma como conocida la cantidad inicial de salmones en cada centro.

   El transporte de salmones desde el centro s al país p tiene un costo fijo por período de F_{ps}^t y un costo variable por período de C_{ps}^t. No existen restricciones a la cantidad mínima o máxima que deba transportarse desde los centros hacia los paises.

   Con la información anterior, construya un modelo de programación lineal que permita a la empresa salmonífera maximizar sus utilidades respetando las restricciones inherentes al problema. +

Solución

1. Este tipo de problemas se conoce como el problema del vendedor viajero, porque equivale a resolver el problema de un vendedor que debe recorrer N casas en su recorrido, devolviendose al punto de partida.

   a) **Variables:**

   x_{ij}: 1 si el brazo mecánico va desde i a j, 0 en cualquier otro caso.

b) **Función Objetivo:**

$$Min \quad Z = \sum_{i,j} t_{ij} x_{ij}$$

c) **Restricciones:**

1) Ingresar exactamente una vez a una conexion.

$$\sum_{i} x_{ij} = 1 \qquad \forall\, j.$$

2) Salir exactamente una vez de una conexion.

$$\sum_{j} x_{ij} = 1 \qquad \forall\, i.$$

3) No permitir que se realicen ciclos disjuntos.

$$\sum_{i \in S, j \in S} x_{ij} \leq card(S) - 1 \qquad \forall\, S.$$

Con S el conjunto de todos los posibles ciclos, es decir, un S corresponde a todos los subconjuntos de i nodos posibles, otro S corresponde a todos los subconjuntos de i+1 nodos, otro con i+2, así sucesivamente desde i = 1 hasta i = (número total de nodos). card(S) corresponde a la función que entrega el cardinal o módulo de S.

4) Naturaleza de las variables

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall\, i,j.$$

2. *a*) **Variables de Decisión:**

x_{im} : 1 si se realiza promoción i en mes m. 0 en cualquier otro caso

y_{im} : Cantidad de personal asignado a promoción i en mes m

b) **Restricciones:**

1) Presupuesto.

$$\sum_{im} b_{im} \leq B$$

2) Cantidad máxima de empleados a utilizar

$$\sum_{i} y_{im} \leq H_m \qquad \forall m$$

3) Solo asigno personal a promoción i en m si se ha decidido hacerla

$$y_{im} \leq M x_{im} \qquad \forall i, m,$$

con $M >> 1$, en este caso el máximo valor que puede tomar M es H_m

4) Máxima cantidad de promociones cada mes

$$\sum_{i} x_{im} \leq n \qquad \forall m$$

5) Naturaleza de las variables.

$$x_{im} \in \{0,1\} \qquad \forall\ i,m$$

$$y_{im} \geq 0$$

c) **Función Objetivo:**

Máximizar las ventas

$$\text{máx} \sum_{im} vf_{im}x_{im} + \sum_{im} vu_{im}y_{im}$$

3. *a*) 1) Variables de Decisión:

x_{kt}	:	cantidad de producción de k en t
y_{kt}	:	cantidad de inventario de k en t en bodega propia (inventario al termino de t)
z_{kt}	:	cantidad de inventario de k en t en bodega de terceros (inventario al termino de t

2) Restricciones:

a' Capacidad de producción.

$$\sum_{k} a_k x_{kt} \leq A_t \qquad \forall t$$

b' Flujo de producción

$$y_{k,t-1} + z_{k,t-1} + x_{k,t} = d_{k,t} + y_{k,t} + z_{k,t} \qquad \forall k,t$$

c' Capacidad de Bodega

$$\sum_{k} y_{kt} \leq B \qquad \forall t$$

d' Naturaleza de las variables.

$$x_{kt} \in \{0,1\} \qquad \forall\ i,m$$

$$x_{kt}, y_{kt}, z_{kt} \geq 0$$

3) Función Objetivo:

Minimizar los costos

$$\text{mín} \sum_{kt} y_{kt}b_{kt} + z_{kt}g_{kt}$$

b) Este problema es complejo. Si el modelo se mantiene como en la parte (a) y $g < b$, siempre se llenarán primero las bodegas de terceros y como se tiene capacidad finita NUNCA se utilizarán las bodegas propias.

Es por esto que se debe agregar una nueva restricción para solucionar este problema. Esta restricción debe asegurar que se llene hasta su capacidad máxima la bodega propia para luego llenar la bodega de terceros.

Es necesario incluir una restricción y una variable binaria que sea capaz de producir este salto. Lo que genera un modelo mixto.

Sean:

Y_t	:	cantidad de inventario total a guardar en bodegas propias en t
Z_t	:	cantidad de inventario total a guardar en bodegas arrendadas en t
∂_t	:	1 si se tiene que $Y_t = B$, 0 si $Y_t < B$

Luego si tenemos que $Y_t < B \Rightarrow (B - Y_t > 0) \Rightarrow (1 - \partial_t) = 1$
Esto lo podemos expresar como $(B - Y_t) < (1 - \partial_t)M$ con $M >> 1$. Ya que si $\partial_t = 1$ entonces tenemos que en ese caso $(B - Y_t) < 0$, luego $Y_t \geq B$, pero como sabemos que $Y_t \leq B$ entonces $Y_t = B$
Agregando la restricción $Z_t \leq \partial_t M, M >> 0$ obligamos a que Z_t sea ≥ 0 solo cuando $\partial_t = 1$

4. Variables de Decisión:

$$\begin{array}{rcl} x_{it} & : & \text{unidades de producto producidas en la planta } i \text{ en el período } t \\ f_{ikt} & : & \text{unidades de producto transportadas desde la planta } i \text{ a la bodega } k \text{ en el período } t \\ v_{kjt} & : & \text{unidades de producto transportadas desde la bodega } k \text{ a la ciudad } j \text{ en el período } t \\ I_{kt} & : & \text{unidades de producto mantenidas en inventario en la bodega } k \text{ en el período } t \end{array}$$

Restricciones:

a) No producir más que la capacidad en cada planta en ningún período.

$$x_{it} \leq S_i \qquad \forall\ i, t$$

b) Transportar todas las unidades producidas en una planta en un período hacia alguna bodega en cada período.

$$x_{it} = \sum_k f_{ikt} \qquad \forall\ i, t$$

c) Conservación de flujo en cada bodega para cada período.

$$\sum_i f_{ikt} + I_{k(t-1)} = \sum_j v_{kjt} + I_{kt} \qquad \forall\ k, t$$

d) Satisfacción de demanda en cada ciudad para cada período.

$$\sum_k v_{kjt} = D_{jt} \qquad \forall\ j, t$$

e) No sobrepasar la capacidad de inventario en cada bodega para cada período.

$$I_{kt} \leq W_k \qquad \forall\ k, t$$

f) Naturaleza de las variables.

$$\begin{array}{rcll} x_{it} & \geq & 0 & \forall\ k, t \\ f_{ikt} & \geq & 0 & \forall\ i, k, t \\ v_{kjt} & \geq & 0 & \forall\ k, j, t \\ I_{kt} & \geq & 0 & \forall\ k, t \end{array}$$

Función Objetivo:

$$\text{mín } z = \sum_{it} c_{it} \cdot x_{it} + \sum_{ikt} PB_{ikt} \cdot f_{ikt} + \sum_{kjt} BC_{kjt} \cdot v_{kjt} + \sum_{kt} g_k \cdot I_{kt}$$

5. *a*) **Variables:**
y_{sp}^t: 1 existe flujo entre el centro s y el país p en el período t.
f_{sp}^t: cantidad de salmones transportados desde el centro s al país p en el período t.
x_s^t: cantidad de salmones que se tienen en el criadero del país s en el período t (al inicio).

b) **Función Objetivo:**

$$\text{máx} \sum_p \sum_t P_p^t \sum_s f_{sp}^t - \sum_s \sum_p \sum_t F_{sp}^t y_{sp}^t - \sum_s \sum_p \sum_t C_{sp}^t f_{sp}^t$$

c) **Restricciones:**

1) Inventario de salmones que se tienen en el criadero p.

$$x_s^{t+1} = 2(x_s^t - \sum_p f_{sp}^t) \qquad \forall\, s, t.$$

2) Relación entre variables.

$$M y_{sp}^t \geq f_{sp}^t \qquad \forall\, s, p, t.$$

$$\text{Con } M = \sum_p D_p^t$$

3) No entregar más que la demanda máxima.

$$\sum_s f_{sp}^t \leq D_p^t \qquad \forall\, p, t.$$

4) Naturaleza de las variables.

$$y_{sp}^t \in \{0, 1\} \qquad \forall\, s, p, t.$$

$$f_{sp}^t \geq 0 \qquad \forall\, s, p, t.$$

$$x_s^t \geq 0 \qquad \forall\, s, t.$$

`Dudas, consultas y comentarios a`

`ssouyris@ing.uchile.cl`