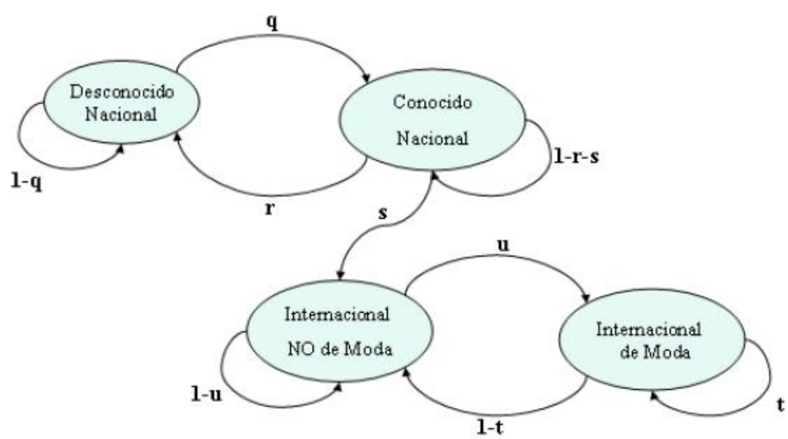
Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey
Aux: G. Cuevas, J. Gacitúa, R. Szederkenyi

Solución Auxiliar 22

Problema 1

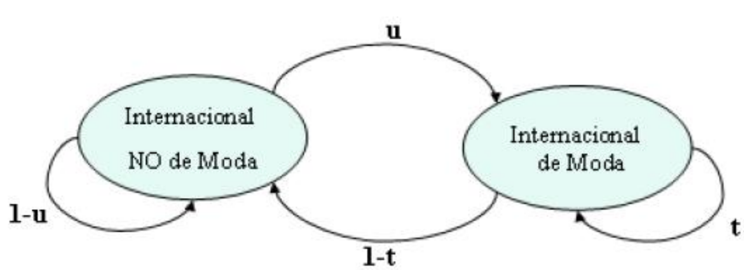
1. Para responder esta pregunta debemos modelar la trayectoria de la banda de Pepe como una cadena de Markov en tiempo discreto. Del enunciado se desprenden claramente tanto los estados como las probabilidades de transición:



2. Para responder esta pregunta clasificaremos los estados de la cadena. Ambos estados del tipo "Nacional" son transientes y conforman una única clase transiente, por lo tanto en algún momento en el futuro el sistema abandonara esta clase para no volver más. Es así como obligatoriamente en el largo plazo el sistema se encontrará en alguno de los otros dos estados que conforman una única clase recurrente. Es decir Pepe alcanzará la fama irremediablemente.

3. Dado que la cadena posee una única clase recurrente aperíodica (es obvio dado que los estados de esta clase pueden "ciclar" sobre si mismos) existirá una ley de probabilidades estacionarias.

4. Los estados transientes necesariamente tendrán probabilidades estacionarias nulas. Es por esto que el sistema a resolver para calcular las probabilidades estacionarias es el asociado a la siguiente cadena:



De esta forma simplemente calculamos:

$$
\begin{aligned}
P_{INM} &= (1-u)\cdot P_{INM} + (1-t)\cdot P_{IM} \\
P_{IM} &= u\cdot P_{INM} + t\cdot P_{IM} \\
1 &= P_{IM} + P_{INM}
\end{aligned}
$$

Entonces:

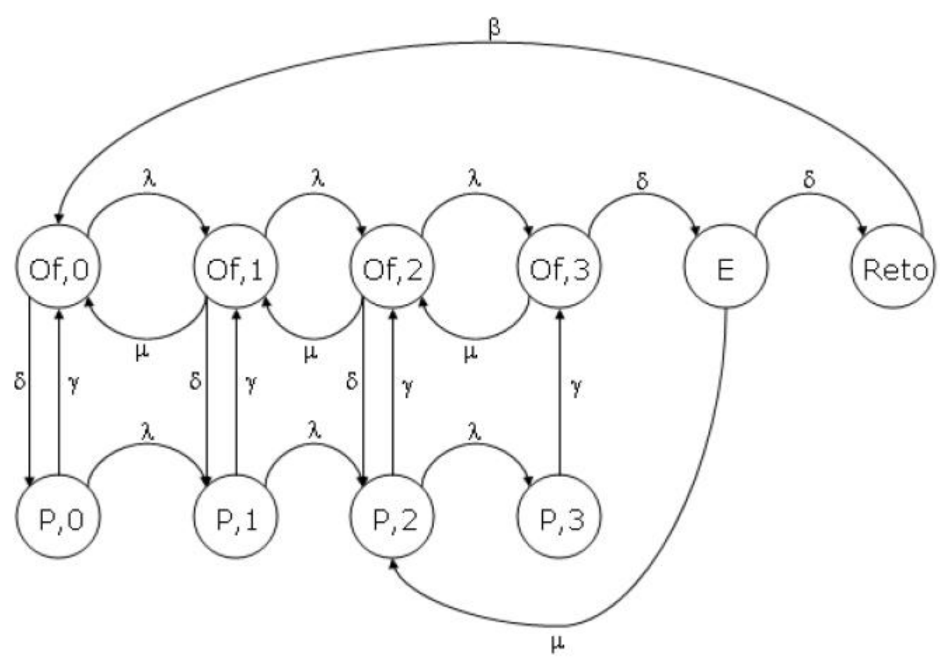
$$P_{INM} = \frac{1-t}{1+u-t}$$

5. En el largo plazo (a esto se refiere la pregunta) la probabilidad de que la banda de Pepe sea famosa y este de moda es P_{IM}. Entonces las ganancias esperadas (mensuales) en el largo plazo son:

$$E[Utilidad] = K\cdot P_{IM}$$

Problema 2

1. Para modelar esta situación como una cadena de Markov debemos considerar la localización de Armijo, ya que solo si se encuentra trabajando podrá responder correo, pero el correo le llegará en cualquier localización. Además debemos distinguir un estado especial donde Armijo tendrá tres mails acumulados y un llamado perdido por parte de su novia, esto por que solo desde aquí se podrá viajar a un estado de reto o al estado donde esta con su novia y tiene 2 mails. Es importante notar que minetras esta con su novia pueden llegarle mails por lo que no nos sirve un estado que solo nos diga si esta con su novia, adicionalmente nos debe entregar información acerca de la carga de trabajo acumulada. De acuerdo a esto la cadena de Markov toma la siguiente forma:



2. Estamos frente a una cadena finita, por lo que definitivamente existirán probabilidades estacionarias (aquí no tiene sentido hablar de periodos de estados o clases, por lo que justificaciones del tipo "existe una única clase recurrente aperiódica" están malas)

   Las ecuaciones que determinan el valor de las probabilidades estacionarias son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
\pi_{Of,0} \cdot (\lambda + \delta) &= \pi_{Reto} \cdot \beta + \pi_{Of,1} \cdot \mu + \pi_{P,0} \cdot \gamma \\
\pi_{Of,1} \cdot (\lambda + \delta + \mu) &= \pi_{Of,0} \cdot \lambda + \pi_{Of,2} \cdot \mu + \pi_{P,1} \cdot \gamma \\
\pi_{Of,2} \cdot (\lambda + \delta + \mu) &= \pi_{Of,1} \cdot \lambda + \pi_{Of,3} \cdot \mu + \pi_{P,2} \cdot \gamma \\
\pi_{Of,3} \cdot (\delta + \mu) &= \pi_{Of,2} \cdot \lambda + \pi_{P,3} \cdot \gamma \\
\pi_{P,0} \cdot (\gamma + \lambda) &= \pi_{Of,0} \cdot \delta \\
\pi_{P,1} \cdot (\gamma + \lambda) &= \pi_{Of,1} \cdot \delta + \pi_{P,0} \cdot \lambda \\
\pi_{P,2} \cdot (\gamma + \lambda) &= \pi_{Of,2} \cdot \delta + \pi_{P,1} \cdot \lambda + \pi_E \cdot \mu \\
\pi_{P,3} \cdot \gamma &= \pi_{P,2} \cdot \lambda \\
\pi_E \cdot (\delta + \mu) &= \pi_{Of,3} \cdot \delta \\
\pi_{Reto} \cdot \beta &= \pi_E \cdot \delta \\
\sum_i \pi_i &= 1
\end{aligned}
$$

3. Supongamos que estamos durante toda una hora en el estado de reto. La tasa de salida del estado es β, por lo que en términos esperados habrán β retos durante esa hora. Sin embargo dado que no estoy todo el tiempo en ese estado debo ponderar por el tiempo que efectivamente estoy en ese estado. Entonces:

$$E[Retos/hora] = \pi_{Reto} \cdot \beta$$

Otra respuesta valida es suponer que estamos durante una hora en el estado E. Si fuese así habrían δ retos por hora. Entonces análogamente al caso anterior la respuesta sería:

$$E[Retos/hora] = \pi_E \cdot \delta$$

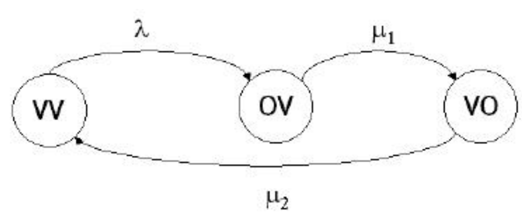
Ambas respuestas son equivalentes (basta revisar las ecuaciones de la parte 2).

4. La respuesta es simplemente

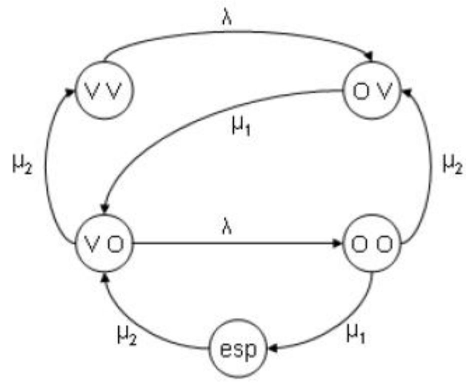
$$\pi_{Of,0}$$

Problema 3

1. La cadena (y las tasas de transición) se muestran en la figura .



2. Es importante notar que en una cadena de Markov en tiempo continuo los tiempos entre transiciones deben distribuirse exponencialmente. Por esto es que debemos modelar explícitamente el estado en el cual la persona sentada en el primer asiento se encuentra esperando. De acuerdo a esto, la cadena es la mostrada en la figura .



3. Para esto necesitaremos calcular las probabilidades estacionarias. Las ecuaciones (conservación de flujo) son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\Pi_{VV}\lambda &= \Pi_{VO}\mu_2 \\
\Pi_{OV}\mu_1 &= \Pi_{VV}\lambda + \Pi_{OO}\mu_2 \\
\Pi_{VO}(\lambda+\mu_2) &= \Pi_{VO}\mu_1 + \Pi_{ESP}\mu_2 \\
\Pi_{OO}(\mu_1+\mu_2) &= \Pi_{VO}\lambda \\
\Pi_{ESP}\mu_2 &= \Pi_{OO}\mu_1 \\
\sum_i \Pi_i &= 1
\end{aligned}$$

   Suponiendo los valores de Π como conocidos y utilizando el mismo tipo de argumento de la pregunta 2 tendremos que:

$$\text{Fracción} = \Pi_{VV} + \Pi_{VO}$$

4. Utilizando la parte anterior, la tasa efectiva de entrada será:

$$\lambda \cdot [\Pi_{VV} + \Pi_{VO}]$$

5. Interpretando las probabilidades estacionarias la probabilidad de encontrar al sistema (en el largo plazo) en un estado en particular tendremos que:

$$E[\text{Personas en el sistema}] = \Pi_{VO} + \Pi_{OV} + 2\cdot\Pi_{OO} + 2\cdot\Pi_{Esp}$$

6. Si llega y los dos puestos están vacíos estará en el local en promedio $\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}$. Si llega y el segundo puesto está ocupado, estará en promedio:

$$\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\cdot\frac{1}{\mu_2}$$

   Esto puesto que siempre deberá estar el tiempo de atención en la primera silla y en la segunda silla y con una probabilidad $\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$ deberá esperar la atención del tipo en la segunda silla.
   Ocupando probabilidades totales:

$$E[T] = \frac{\Pi_{VV}}{\Pi_{VV}+\Pi_{VO}}\cdot[\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}] + \frac{\Pi_{VO}}{\Pi_{VV}+\Pi_{VO}}\cdot[\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}+\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\cdot\frac{1}{\mu_2}]$$