Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey
Aux: G. Cuevas, J. Gacitua, R. Szederkenyi

Clase Auxiliar 20: Cadenas de Markov

Miércoles 5 de Noviembre de 2008

Problema 1

Considere un cajero automático al cual llegan clientes de acuerdo a un proceso Poisson de tasa λ [clientes/hora]. En el lugar donde se encuentra el cajero hay espacio para dos personas (una utilizando el cajero y otra esperando su turno). Si un cliente que llega encuentra que ya hay 2 personas ahí, se ve obligado a retirarse (buscará otro cajero).

Cuando un cliente accede al cajero realiza alguna operación financiera, la que toma un tiempo exponencialmente distribuido, con media $\frac{1}{\mu}$ [horas]. Una fracción $1 - p$ de los clientes se retira al terminar su primera operación, mientras que una fracción p de los clientes requiere una operación adicional, lo cual toma un tiempo exponencialmente distribuido con media $\frac{1}{\gamma}$ [horas]. Nadie realiza más de 2 operaciones.

1. Modele el estado de ocupación del cajero como una cadena de Markov en tiempo continuo. Justifique la existencia de una ley probabilidades estacionarias o de equilibrio. Plantee un sistema de ecuaciones a partir del cual se puedan obtener las probabilidades estacionarias.
2. Respecto del comportamiento de largo plazo de este sistema, conteste las siguientes preguntas.
   a) ¿Qué fracción de los clientes que llegan con intenciones de usar el cajero logran su propósito?
   b) Dado que un cliente logró utilizar el cajero, cuál es la probabilidad que al llegar haya encontrado el cajero ocupado por una persona que estaba realizando su segunda operación?
   c) Suponga que usted llega al lugar donde se ubica el cajero y lo encuentra ocupado por otro cliente (y nadie más esperando). Si dicho cliente está realizando su segunda operación ¿cuál es el valor esperado del tiempo que ud. deberá esperar (en cola) antes de poder usar el cajero? ¿Y si el otro cliente está realizando su primera operación?
   d) ¿Cuánto tiempo esperan en cola, en promedio, los clientes que logran utilizar el cajero?
3. Suponga que el banco que administra este cajero cobra b [$] por cada operación realizada (un cliente que realiza 2 operaciones significa un ingreso de $2b$). Además, mantener el cajero funcionando en ese lugar tiene un costo de c [$/hora]. ¿Qué relación deben cumplir los parámetros del problema para que el cajero se autofinancie?

Problema 2

Un prestigioso técnico nacional, más conocido como *El Ingeniero*, le ha pedido su asesoría para estimar cuántos puntos obtendrá en el presente Torneo de Apertura del Fútbol argentino.

Supondremos que los resultados de cada partido que juega su equipo se pueden modelar como una cadena de Markov, es decir, el resultado del próximo partido depende del último resultado obtenido. A partir de datos históricos se ha estimado la siguiente matriz de transición:

$$P = \begin{array}{c|ccc|} & g & e & p \\ \hline g & 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ e & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ p & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{array}$$

Se sabe que por cada partido ganado se obtienen tres puntos, si se empata obtiene un punto y si pierde no obtiene puntos. Se han jugado 2 partidos hasta ahora y lleva sólo un punto. Además el último resultado obtenido fue un empate y según el técnico estos resultados no afectarán el rendimiento futuro de sus dirigidos.

1. Construya un modelo de Markov con Beneficios que le permita estimar el valor esperado de los puntos que obtendrá el equipo del *Ingeniero* en el campeonato de Apertura, si el primer partido de los que le resta por jugar se gana. Suponga que restan 16 partidos y recuerde que ya tiene un punto.

$$P^{16} = \begin{vmatrix} 0{,}42 & 0{,}36 & 0{,}22 \\ 0{,}42 & 0{,}36 & 0{,}22 \\ 0{,}42 & 0{,}36 & 0{,}22 \end{vmatrix}$$

2. Suponiendo que el último partido jugado (el cual fue empatado) si afectará el rendimiento futuro del equipo, de la manera descrita por matriz P, ¿cúal es el valor esperado de los puntos que obtendrá en el Torneo?.

Independiente de las partes anteriores, suponga ahora que la carrera del técnico chileno también puede ser modelada como una Cadena de Markov. Actualmente *El Ingeniero* es conocido sólo a nivel Latinoamericano, sin embargo cada temporada existe una probabilidad q=0.2, de que sea tentado por un equipo de la Liga Italiana, con lo que pasaría a ser conocido a nivel Europeo. Una vez en la Liga Italiana con probabilidad r=0.3 el D.T no saldrá campeón con su equipo por lo que seguirá siendo conocido sólo a Nivel Europeo, pero con probabilidad $1-r$ será Campeón de Liga pasando a formar parte de la elite de técnicos famosos mundialmente, nivel del que nunca dejará de pertenecer.

3. Calcule el número esperado de temporadas que tardará el entrenador chileno en alcanzar la fama a nivel Mundial.

Problema 3

En Estados Unidos existen dos partidos políticos que concentran la gran mayoría de las preferencias electorales (alrededor del 95 %): el partido demócrata y el republicano. Por lo tanto, supondremos que la gente sólo vota por alguno de estos dos partidos.

Se sabe que la población electoral norteamericana es bastante flexible y ocasionalmente cambia sus preferencias electorales, de acuerdo a las circunstancias. Por ello, supondremos que un votante republicano (que vota por ese partido) cambiará su preferencia, pasando a ser un votante demócrata en un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido de media $\frac{1}{\lambda}$. Por su parte, un votante demócrata pasara a ser un votante republicano en un tiempo aleatorio exponencialmente distribuido de media $\frac{1}{\mu}$. Suponga que el total de la población electoral de Estados Unidos es de tamaño N.

1. Modele la dinámica de la población electoral de Estados Unidos (el número de votantes demócratas en cada instante) como una cadena de Markov en tiempo continuo. Dibuje el diagrama de estados con las tasas de transición respectivas.
2. Calcule las probabilidades estacionarias. ¿Cuál es la probabilidad que una elección sea ganada por el partido demócrata en el largo plazo? Suponga que el número total de votantes es N.
3. Para el caso $\lambda = \mu$, muestre que la distribución de las probabilidades estacionarias es binomial de parámetros $N,\ 1/2$. Interprete el resultado. Entregue la esperanza del número de votantes demócratas en el largo plazo y la probabilidad que una elección sea ganada por el partido demócrata.
4. (**Propuesto**) En el mismo modelo anterior ahora sabemos que una persona nace independiente de todo lo demás, de acuerdo a un tiempo aleatorio exponencialmente distribuida de media $\frac{1}{a}$. De la misma manera una persona muere de acuerdo a un tiempo exponencialmente distribuido de media $\frac{1}{b}$. Si cada individuo que nace tiene iguales posibilidades de ser republicano o demócrata, modele la situación anterior como una cadena de Markov de tiempo continuo.