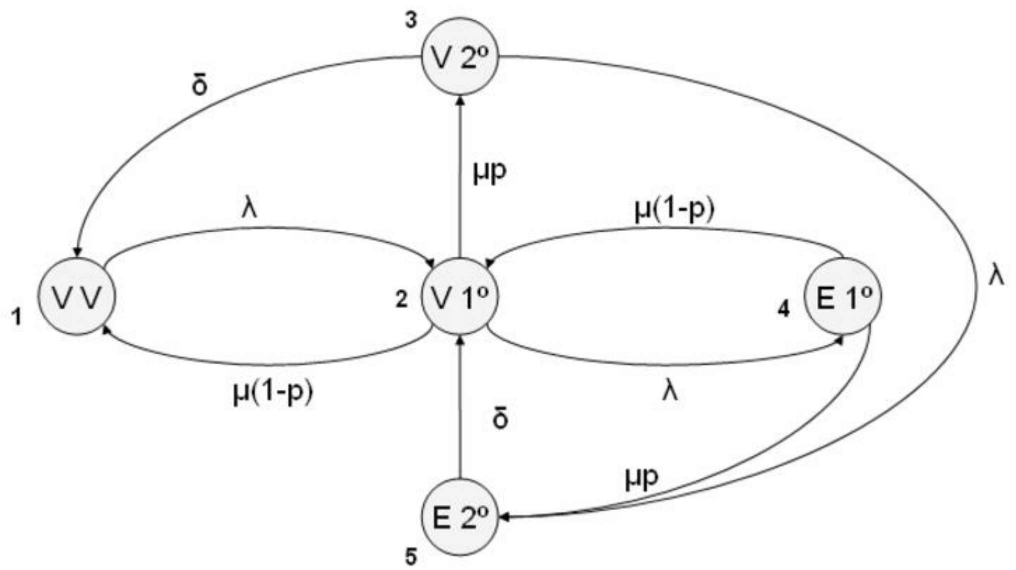
Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey
Aux: G. Cuevas, J. Gacitúa, R. Szederkenyi

Solución Auxiliar 20

Problema 1

1. La cadena queda de la siguiente forma (se deben especificar las tasas de transición en lugar de las probabilidades de transición)



El por que se puede modelar como una cadena de Markov tiene que ver con la distribución de los tiempos entre transiciones y la perdida de memoria de la distribución exponencial. Las ecuaciones de estado estacionario son bastante parecidas a ecuaciones de conservación de Flujo. Lo que entra (a la tasa a la que lo hace) es igual a todo lo que sale (la tasa a la que lo hace).

$$
\begin{aligned}
\pi_1 \lambda &= \Pi_2 \mu(1-p) + \Pi_3 \delta \\
\Pi_2(\mu + \lambda) &= \Pi_1 \lambda + \Pi_3 \delta + \Pi_4 \mu(1-p) \\
\Pi_3(\delta + \lambda) &= \Pi_2 \mu p \\
\Pi_4 \mu &= \Pi_2 \lambda \\
\Pi_5 \delta &= \Pi_4 \mu p + \Pi_3 \lambda \\
\sum_i \Pi_i &= 1
\end{aligned}
$$

2. En el largo plazo del total de clientes que llegan al sistema, solo podrán entrar los que lo encuentren en los estados 1, 2 o 3, en los cuales hay un puesto vacío. Si interpretamos las probabilidades estacionarias como la fracción del tiempo que (en el largo plazo) el sistema se encuentra en un estado, entonces la fracción de clientes que usan el cajero será:

$$\text{Fracción} = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$$

3. Siguiendo el mismo tipo de razonamiento vemos que (utilizando $\frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}}$):

$$P[\text{al llegar había 1 en } 2^a \text{ transacción}] = \frac{\Pi_3}{\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3}$$

4. Si lo encuentra en la segunda operación esperaran en promedio $\frac{1}{\delta}$.
Si lo encuentran en la primera esperaran en promedio $\frac{1}{\mu} + p \cdot \frac{1}{\delta}$ (con probabilidad p debe esperar una segunda transacción).

5. Utilizando las partes anteriores y los resultados de la primera clase auxiliar del ramo:

$$E(\text{Espera}) = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\Pi_3}{\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3} + [\frac{1}{\mu} + p \cdot \frac{1}{\delta}] \cdot \frac{\Pi_2}{\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3}$$

6. La tasa efectiva de llegadas de clientes al sistema es

$$\lambda \cdot \frac{\Pi_3}{\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3}$$

Ahora, si filtramos el proceso de llegada tendremos que los clientes que pagan solo b llegan con tasa:

$$\lambda \cdot \frac{\Pi_3}{\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3} \cdot (1 - p)$$

y los que pagan $2b$ llegan con tasa:

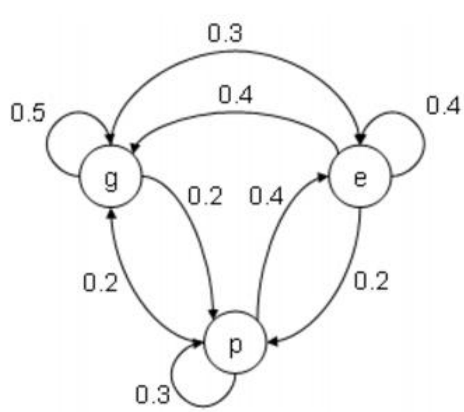
$$\lambda \cdot \frac{\Pi_3}{\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3} \cdot p$$

Entonces las ganancias esperadas en una hora (en el largo plazo) serán:

$$E[\text{Beneficios}] = \lambda \cdot \frac{\Pi_3}{\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3} \cdot (1 - p) \cdot b + \lambda \cdot \frac{\Pi_3}{\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3} \cdot p \cdot 2b$$

Problema 2

Antes de responder las preguntas debemos determinar la estructura de la cadena. Los estados serán el resultado del partido de la semana. La cadena asociada se muestra en la figura.



1. La pregunta va orientada a definir una estructura de costos y ocupar las formulas de Markov con beneficios. Para esto definimos la siguiente estructura:

$$r_g = 3 \qquad r_e = 1 \qquad r_p = 0 \qquad r_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

Esto implica que:

$$\widehat{r}_g = 3 \qquad \widehat{r}_e = 1 \qquad \widehat{r}_p = 0$$

Adicionalmente necesitaremos los valores de las probabilidades estacionarias (existirán dado que se trata de una cadena irreductible de una clase recurrente aperiódica). Sin embargo si observamos P^{16}(en el enunciado) vemos que todas las filas son iguales por lo que podemos argumentar que ya convergió a su forma de estado estacionario, por lo que se puede decir que:

$$\pi_g = 0{,}42 \qquad \pi_e = 0{,}36 \qquad \pi_p = 0{,}22$$

De esta forma tendremos que

$$g = 3 \cdot 0{,}42 + 1 \cdot 0{,}36 = 1{,}62$$

Ahora debemos encontrar el valor de $\overrightarrow{W}$, que satisface:

$$\overrightarrow{W} + \begin{pmatrix} 1{,}62 \\ 1{,}62 \\ 1{,}62 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{W}$$

Imponiendo que $W_p = 0$ se tiene que:

$$\overrightarrow{W} = \begin{pmatrix} 3{,}5\overline{6} \\ 1{,}3\overline{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces calculamos cuántos puntos se acumularán en 16 partidos (los restantes) si parto en el estado g:

$$\overrightarrow{v}(16) = 16 \cdot \begin{pmatrix} 1{,}62 \\ 1{,}62 \\ 1{,}62 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3{,}5\overline{6} \\ 1{,}3\overline{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}42 & 0{,}36 & 0{,}22 \\ 0{,}42 & 0{,}36 & 0{,}22 \\ 0{,}42 & 0{,}36 & 0{,}22 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3{,}5\overline{6} \\ 1{,}3\overline{4} \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

En particular nos interesa conocer $V_g(16)$. Esto es:

$$V_g(16) = 25{,}92 + 3{,}5\overline{6} + 0{,}42 \cdot 0{,}5\overline{6} - 0{,}36 \cdot 0{,}3\overline{4} \approx 30{,}1792$$

Entonces, si considero que ya llevaba un punto ganado, entonces espero juntar 31,1792 puntos en lo que queda de campeonato.

2. Ahora me preguntan por los puntos acumulados desde un partido empatado hasta 17 fechas más. Para calcular esto no debo cambiar la estructura de beneficios por lo que el W será el mismo de la parte anterior. También puedo asumir que $P^{16} = P^{17}$. Es por esto que tendremos que:

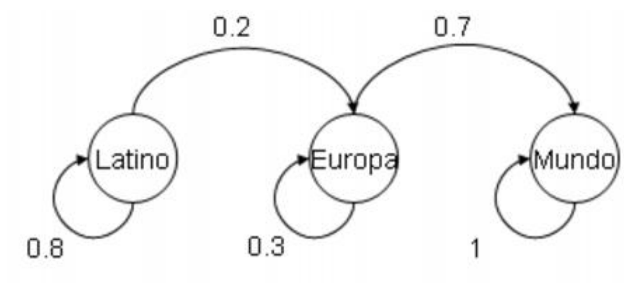
$$\overrightarrow{v}(17) = 17 \cdot \begin{pmatrix} 1{,}62 \\ 1{,}62 \\ 1{,}62 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3{,}5\overline{6} \\ 1{,}3\overline{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}42 & 0{,}36 & 0{,}22 \\ 0{,}42 & 0{,}36 & 0{,}22 \\ 0{,}42 & 0{,}36 & 0{,}22 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3{,}5\overline{6} \\ 1{,}3\overline{4} \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

En particular:

$$V_e(17) = 27{,}54 + 1{,}3\overline{4} + 0{,}42 \cdot 0{,}5\overline{6} - 0{,}36 \cdot 0{,}3\overline{4} \approx 29{,}572$$

que es lo que nos están pidiendo calcular (en este caso no sumo un punto adicional)

3. Si modelamos el estado de la carrera del técnico tendremos que la cadena asociada es la que se muestra el la figura.



Entonces, sólo debemos calcular w_{latino} utilizando las siguiente estructura de costos:

$$r_{latino} = r_{europa} = 1 \qquad r_{mundo} = 0 \qquad y \quad r_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

Entonces $\overrightarrow{W}$ debe cumplir con:

$$\overrightarrow{W} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{W}$$

Si imponemos $W_{mundo} = 0$ tendremos que la segunda ecuación es:

$$W_{europa} = 1 + 0{,}3 \cdot W_{europa} \quad \Rightarrow \quad W_{europa} = \frac{10}{7}$$

Remplazando en la primera ecuación tendremos que:

$$W_{latino} = 6{,}42$$

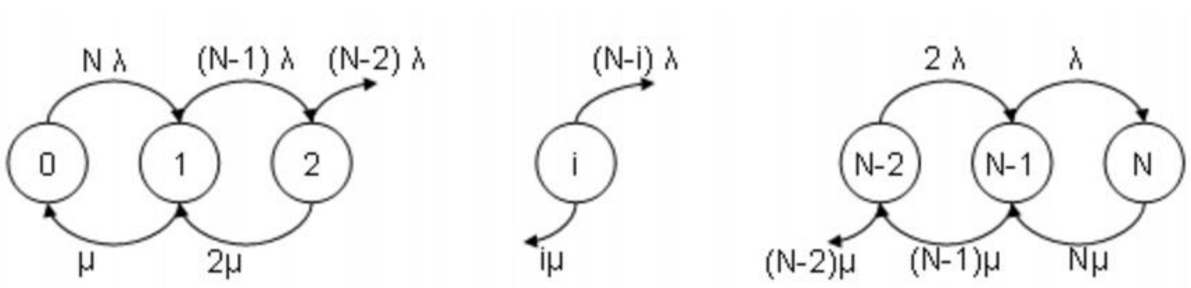
Que es exactamente el número esperado de temporadas que tardará el entrenador chileno en alcanzar la fama a nivel Mundial.

Problema 3

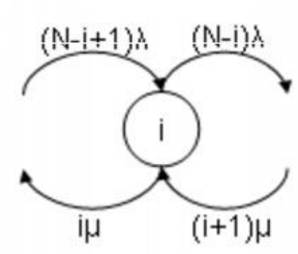
1. Los estados del sistema quedan definidos como:

   (i) : Número de demócratas en el sistema.

   De esta forma la cadena queda de la siguiente forma



Para un estado en particular donde existen i demócratas se tendrá que la transición entre el estado i y el $i+1$ ocurre cuando alguno de los $N-i$ republicanos decide cambiarse de bando, lo que ocurre con tasa $(N-i) \cdot \lambda$. De la misma forma la transición entre el estado i y el $i-1$ ocurre cuando alguno de los i demócratas decide cambiarse de bando, lo que ocurre con tasa $i \cdot \mu$.



Dado que el proceso anterior es de nacimiento y muerte se pueden aplicar las fórmulas para las probabilidades estacionarias.

$$\pi_i = \prod_{k=1}^{i} (\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}) \cdot \pi_0$$

$$\Rightarrow \quad \pi_i = \frac{N \cdot (N-1) \cdot (N-2) ... \cdot (N-i) \cdot \lambda^i}{i \cdot (i-1) \cdot (i-2) ... \cdot 2 \cdot 1 \cdot \mu^i} \cdot \pi_0$$

$$\Rightarrow \quad \pi_i = \frac{N! \cdot \lambda^i}{(N-i)! \cdot i! \cdot \mu^i} \cdot \pi_0 \quad = \quad \binom{N}{i} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \cdot \pi_0$$

donde $\pi_0 = \frac{1}{(1+\frac{\lambda}{\mu})^N}$ se encuentra ocupando el binomio de Newton y que la suma de las probabilidades estacionarias es 1.

2. De esta manera, la probabilidad de que los demócratas ganen las elecciones será igual a encontrarse en algún estado con más demócratas que republicanos, es decir:

$$\sum_{i=\frac{N}{2}+1}^{N} \pi_i \text{ ó } \sum_{i=\frac{N+1}{2}}^{N} \pi_i$$

En caso de que N sea par o impar respectivamente. Notar que en el caso par si el número de votantes demócratas es $\frac{N}{2}$ la elección se empata.

3. si $\lambda = \mu \Rightarrow \pi_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^N$

De esta manera $\pi_k = \binom{N}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{N-k} \rightsquigarrow B(N, \frac{1}{2})$

En el largo plazo, dado que una persona se cambia de partido con probabilidad $\frac{1}{2}$ tener, por ejemplo, 20 personas de N votando por el partido demócrata es equivalente a tirar N veces una moneda y contar 20 sellos.

Por esto la probabilidad de ganar será $\frac{1}{2}$ en el caso de N impar, mientras que si N es par como existe alguna probabilidad de empatar debemos pensar en

$$2 \cdot P(ganar) + P(empatar) = 1$$

donde la probabilidad de empatar viene dada por:

$$P(empatar) = \binom{N}{\frac{N}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

4. Cuando permitimos que el número de personas cambie vía nacimientos y muertes la cadena de la parte anterior ya no sirve puesto que es necesario saber no sólo el número de demócratas sino la cantidad total de votantes.

Una manera de modelar esta situación es utilizando una cadena de Markov continua con pares ordenados en cada nodo, que representen el número de demócratas y el número de republicanos respectivamente (D, R).

De esta manera, la población total será $N = D + R$ y las transiciones serán las que se muestran en el grafo. En estos casos la probabilidad de que los demócratas ganen una elección en el largo plazo será igual a,

$$\sum_{i>j} \pi_{(i,j)}$$