Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey
Aux: G. Cuevas, J. Gacitúa, R. Szederkenyi

Clase Auxiliar 16: Cadenas de Markov

Martes 21 de Octubre de 2008

Problema 1

Suponga que al inicio de cada período, cada uno de los N individuos de una población pueden encontrarse en 3 condiciones de salud distintas: Sano, Infeccioso e Infectado.

En cada período se forman $N/2$ parejas al azar (suponga N par), cada una de las cuales puede mantener un contacto peligroso con probabilidad p (independiente de lo que hagan las demás). Al final del período todas las parejas se desarman pudiéndose formar otra vez.

Si una pareja que mantuvo un contacto peligroso está formada por un individuo que está Sano y por uno Infeccioso, quien estaba sano contraerá la enfermedad pasando a estar Infeccioso al inicio del siguiente período. Un individuo Infeccioso permanece en ese estado durante sólo 1 período después de lo cual pasa a ser un individuo Infectado.

Los individuos Infectados nunca abandonan esta condición, bajo la cual no pueden contagiar a nadie durante un contacto peligroso, y la que los hace inmunes a un nuevo contagio (porque ya tiene anticuerpos en su organismo).

1. Considere a un individuo particular de esta población, que actualmente se encuentra sano. Si hay i individuos infecciosos, ¿Cuál es la probabilidad de que este individuo se contagie durante el siguiente período?. Llame a esta probabilidad q_i.
2. Si consideramos X_t como el número de individuos infecciosos al inicio del período t, ¿Es posible modelar la situación descrita utilizando cadenas de Markov con X_t como variable de estado?.
3. Considere X_t, e Y_t como el número de individuos infecciosos y sanos, respectivamente, al inicio del período t. Modele la situación descrita como una cadena de Markov. Clasifique los estados, caracterice las clases y encuentre la matriz de transición de 1 período.
   Hint: No es necesario que dibuje todo el grafo, basta con identificar las transiciones de los distintos tipos de estado.
4. ¿Existirá una ley de probabilidades estacionarias?, ¿Cambia su respuesta si permitimos que un individuo pueda mejorar, es decir, pasar de infectado a sano con probabilidad r en un período?.

Problema 2

Considere una población con sólo dos individuos que en cada generación producen dos nuevos individuos y después mueren (el tamaño de la población es, por tanto, constante igual a dos). Cada individuo porta dos genes que determinan el color de los ojos. Estos genes pueden ser los dos recesivos, los dos dominantes o tener un gen recesivo y uno dominante. Llamaremos

$$\begin{aligned} X &= \text{Gen Dominante} \\ Y &= \text{Gen Recesivo} \end{aligned}$$

Cada uno de los padres transmite a sus descendientes un sólo gen. Además, es igualmente probable que se transmita cualquiera de los dos genes que porta el progenitor a sus descendientes.

1. Defina una cadena de Markov donde el estado del sistema sea la cadena genética de los dos individuos de la población. Dibuje el grafo asociado y calcule las probabilidades de transición.
2. Defina las clases, los tipos de estados en cada clase y su correspondiente período.
3. ¿Cuál es la probabilidad que, en el largo plazo, sólo hayan individuos con genes recesivos si originalmente se parte con dos individuos idénticos con carga genética (X,Y)?.

Problema 3

Un individuo posee r paraguas, que usa para ir caminando de su casa a la oficina y viceversa. Si él está en su casa al comienzo del día y está lloviendo, entonces, si al menos hay un paragua en la casa, él tomará uno para ir a su oficina. Análogamente, si él está en su oficina, tomará uno para ir a su casa. Si no está lloviendo no toma ningún paragua. Suponga, que independiente del pasado, llueve al comienzo (final) del día con probabilidad p.

1. Defina una cadena de Markov de $r + 1$ estados que ayude a determinar que proporción del tiempo el individuo se moja.
   Hint: Defina los estados de la cadena como el número de paraguas que tiene la persona en el lugar en que se encuentra (ya sea su casa o la oficina). Suponga que existe una transición cada vez que el individuo cambia de lugar (de la casa a la oficina o viceversa)
2. Encuentre las probabilidades estacionarias.
3. ¿Qué fracción del tiempo (porcentaje de caminatas) el individuo se moja?.