Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey
Aux: G. Cuevas, J. Gacitúa, R. Szederkenyi

Solución Auxiliar 16

Problema 1

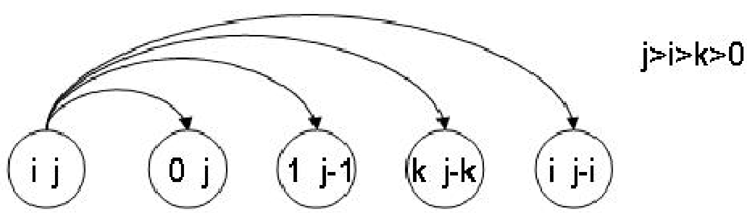
1. Lo único importante es distinguir $\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}}$.

   Si las parejas se forman al azar tengo $N-1$ individuos candidatos a emparejarse con alguien en particular (casos totales), de los cuales hay i infecciosos. Si me emparejo con un infeccioso la probabilidad de contagio es p y por lo tanto: $q_i = \frac{i}{N-1} \cdot p$

2. No, con sólo tener el número de infecciosos no es posible determinar, en probabilidad, la evolución del sistema (condición de Markov). Por ejemplo, si $X_t = 10$, pero tenemos a todo el resto infectado $X_{t+1} = 0$ con seguridad, sin embargo si hay alguien sano la probabilidad que $X_{t+1} = 0$ es estrictamente menor que 1.

3. Para simplificar el dibujo del grafo consideraremos las posibles transiciones desde un nodo (i, j) donde i= X_t y j= Y_t.

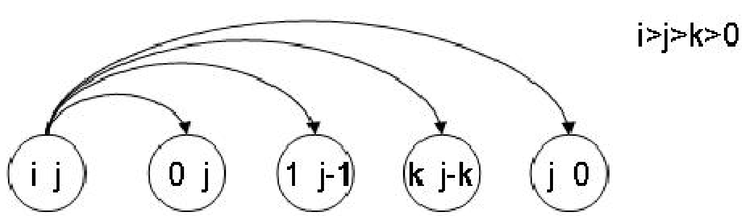
   Caso 1



En este caso la probabilidad de transición entre el estado (i, j) y uno (k, j-k), con $0 <$ i $\leq$ j, implica que k personas de las que inicialmente estaban sanas se contagian, pasando a estar infectadas al inicio del período siguiente. Ocupando q_i tenemos que:

$$P[(\text{i, j}), (\text{k, j-k})] = \binom{j}{k} \cdot {q_i}^k \cdot (1-q_i)^{j-k} \quad \forall k,\, 0 \leq k \leq i$$

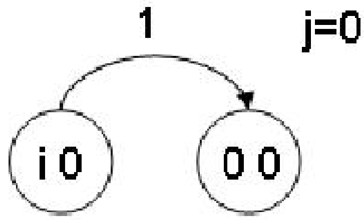
Caso 2



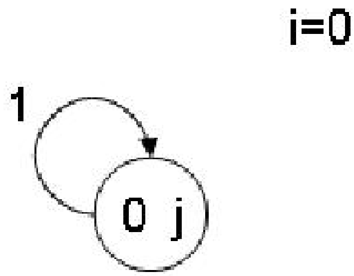
Esta situación es análoga al caso anterior, pero el número máximo de personas infectadas al inicio del período siguiente ahora es j. Así, la probabilidad de transición en una etapa que empezamos en el estado (i, j), con i $\geq$ j > 0 será:

$$P[(\text{i, j}), (\text{k, j-k})] = \binom{j}{k} \cdot {q_i}^k \cdot (1-q_i)^{j-k} \quad \forall k,\, 0 \leq k \leq j$$

Caso 3



En estos casos los individuos infecciosos ya no tienen a quien contagiar, por lo que con probabilidad 1 estarán en el estado (0, 0) en el período siguiente.
Caso 4



En esta situación ya no quedan individuos que puedan contagiar, por lo que no se modificará el número de individuos sanos ni nadie se enfermará.

Clasisficación de estados y caracterización de clases:

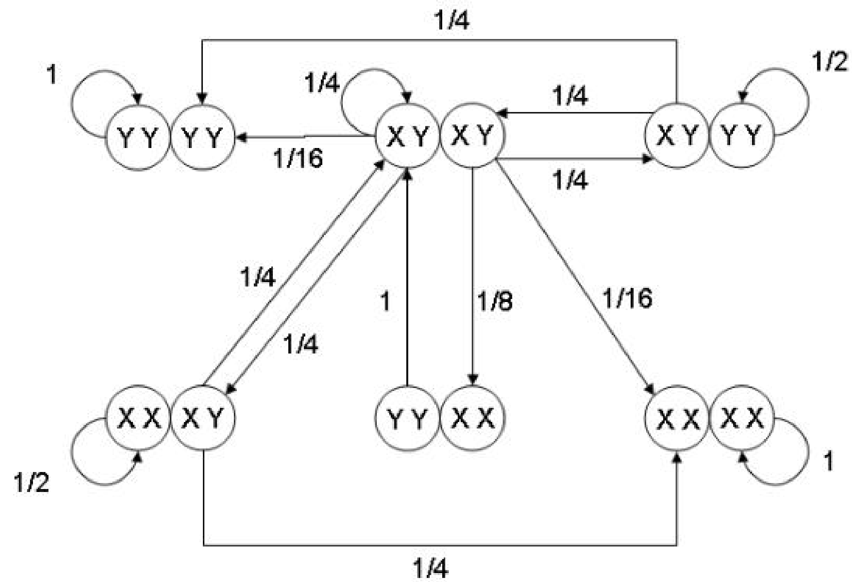
En este problema no hay ningún par de nodos que esté comunicado, por lo que c/u es su propia clase de equivalencia y tendremos $(N+1)^2$ clases distintas. Las clases de los casos 1, 2 y 3 son transcientes, mientras que las clases del caso 4 son todas recurrentes y aperiódicas.

4. Dado que hay múltiples clases recurrentes NO es posible tener una ley de probabilidades estacionarias en el problema original, lo que significa que la evolución del sistema en el largo plazo no será independiente de las condiciones iniciales. Por ejemplo si empezamos de cualquier estado $(0, Y_0)$ nunca lo abandonaremos porque no se puede enfermar ni mejorar nadie.

   Si permitimos que la gente con alguna probabilidad se mejore, se logran comunicar muchos estados que pertenecían a clases distintas, creándose una clase transiente formada por los estados $(0, X)$, con $0 \leq X < N$ la que confluye a la clase recurrente formada por el estado $(0, N)$, es decir toda la población sana. En el caso de empezar con i individuos infectados estaremos en una clase transiente, y necesariamente luego de algún número finito de días estaremos en un estado de la clase $(0, X)$ (porque no existen transiciones a estados tipo (j, X) con $j > i$). Como en el largo plazo la probabilidad de encontrarnos en un estado transiente es 0, con probabilidad 1 estaremos en la única clase recurrente de esta cadena. Por esto, si permitimos que la gente eventualmente mejore en el largo plazo esta enfermedad se habrá erradicado completamente, y existirá una ley de probabilidades estacionarias.

Problema 2

1. Definiremos los estados como la carga genética de cada individuo de la población: De esta forma la cadena se muestra en la figura.

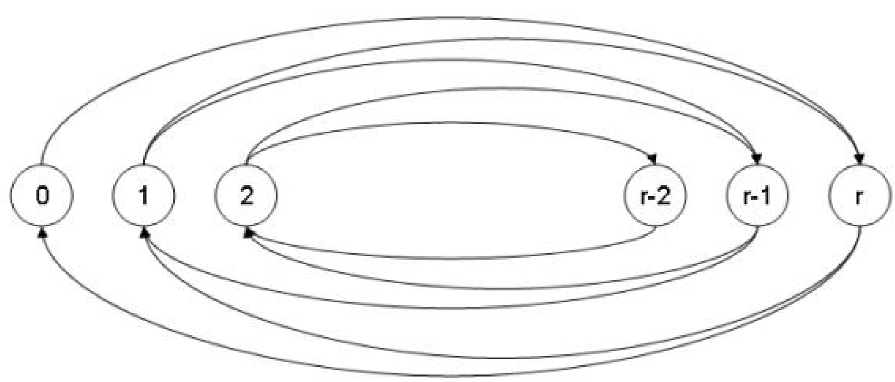


2. Claramente existen 3 clases. Dos recurrentes (aperiódicas): la asociada al estado xx-xx y la asociada al estado yy-yy. Por otro lado existe una clase de estados transientes, compuesta por todos los otros estados.

3. Por simetría la probabilidad es $\frac{1}{2}$. Un desarrollo más riguroso puede ser logrado mediante un análisis de primer paso (es decir condicionar sobre el resultado de la primera transición y aplicando condiciones de borde, como por ejemplo que la probabilidad dado que estoy en el estado de sólo genes recesivos es 1 y si estoy en el estado de genes no recesivos es 0, dado que ambos son recurrentes de clases distintas). Propuesto.

Problema 3

1. Para definir la cadena debemos especificar los estados de la misma y las probabilidades de transición entre cada par de estado (elementos de la matriz de transición). Utilizando la indicación del enunciado la cadena es la que se muestra en la figura.



Entonces, del dibujo se ve que:

$$P[\text{i paraguas,j paraguas}] = \begin{cases} p & si \quad j = r - i + 1 \\ 1 - p & si \quad j = r - i \\ 0 & \sim \end{cases} \qquad \forall i > 0$$

La definición de la matriz de transición se completa con:

$$P[[0 \text{ paraguas,j paraguas}] = \begin{cases} 1 & si \quad j = r \\ 0 & \quad \sim \end{cases}$$

2. Las ecuaciones que nos permiten encontrar las probabilidades estacionarias (existirán dado que se trata de una cadena ergódica) son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \pi_r \cdot (1-p) \\
\pi_1 &= \pi_r \cdot p + (1-p) \cdot \pi_{r-1} \\
\pi_2 &= \pi_{r-1} \cdot p + (1-p) \cdot \pi_{r-2} \\
\pi_3 &= \pi_{r-2} \cdot p + (1-p) \cdot \pi_{r-3} \\
&\vdots \\
\pi_{r-1} &= \pi_2 \cdot p + (1-p) \cdot \pi_1 \\
\pi_r &= \pi_1 \cdot p + \pi_0 \\
\sum_{i=0}^{r} \pi_i &= 1
\end{aligned}$$

Utilizando las r primeras ecuaciones descubrimos que:

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 \ldots = \pi_r = \frac{\pi_0}{(1-p)} = \pi$$

Si utilizamos esto en la última ecuación llegamos a que:

$$\begin{aligned}
\pi \cdot (r+1-p) &= 1 \\
\pi &= \frac{1}{r+1-p} \\
\pi_0 &= \frac{1-p}{r+1-p}
\end{aligned}$$

3. Se mojará sólo en las ocasiones que esté en un lugar donde no hayan paraguas (fracción π_0 de los casos) y le toque la mala suerte que llueva (con probabilidad p). Entonces el resultado es:

$$\text{fracción que se moja} = \frac{p(1-p)}{r+1-p}$$