Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey
Aux: G. Cuevas, J. Gacitua, R. Szederkenyi

Solución Auxiliar 12

Miércoles 24 de Septiembre de 2008

Problema 1

1. Supongamos que se decide colocar N camas en el hospital. Además consideremos que el día comienza en $t = 0$ (7:00 am) y termina en $t = T$ (7:00 am del día siguiente). De esta forma, la probabilidad de atender a todos los pacientes graves será:

$$P_N[\text{Lleguen a lo más N pacientes graves}] \quad = \quad \sum_{i=0}^{N} \frac{(\lambda_G T)^i e^{-\lambda_G T}}{i!}$$

   Donde λ_G es la tasa de llegada de los pacientes graves. Entonces buscamos un N^* tal que:

$$N^* \quad = \quad \text{ínf}\left\{ N | N \in \{0, 1, \ldots\} \quad \wedge \quad \sum_{i=0}^{N^*} \frac{(\lambda_G T)^i e^{-\lambda_G T}}{i!} \geq 0{,}95 \right\}$$

2. El paciente morirá o no dependiendo del instante en que llego. Si llego antes de las $t = 5$ (desde ahora en adelante trabajaremos en minutos) entonces muere con probabilidad 1 (del enunciado). Si llego después de las $t = 5$ sobrevive. Ahora Supongamos que el tipo llego en el instante X $(0 \leq X \leq 60)$ Entonces:

$$P[\text{Muerto}|\text{Llego en X}] = 1_{X \leq t=5}$$

   Si embargo debemos descondicionar. Para esto vemos que la distribución condicional de las llegadas de poisson hasta un instante t se distribuyen uniformemente entre 0 y T. Entonces tendremos que:

$$\begin{aligned}
P[\text{Muerto}] &= \int_0^{60} 1_{X \leq 5} \cdot \frac{1}{60} dX \\
&= \int_0^{5} 1_{X \leq 5} \cdot \frac{1}{60} dX + \int_5^{60} 1_{X \leq 5} \cdot \frac{1}{60} dX \\
&= \int_0^{5} 1 \frac{1}{60} dX + \int_5^{60} 0 \cdot \frac{1}{60} dX \\
&= \frac{5}{60} \quad = \quad \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

3. Esto es básicamente es la probabilidad que lleguen 5 pacientes graves seguidos de 5 pacientes leves. Sin embargo dado que:

$$P[\text{Llegue unpaciente grave antes que uno leve}] = \frac{\lambda_G}{\lambda_G + \lambda_L}$$

   donde λ_L es la tasa de llegada de pacientes leves al consultorio, y considerando la propiedad de pérdida de memoria de la distribución exponencial, tendremos que la probabilidad que buscamos, P, es:

$$\left(\frac{\lambda_G}{\lambda_G + \lambda_L} \right)^5 \cdot \left(\frac{\lambda_L}{\lambda_G + \lambda_L} \right)^5$$

4. Por la pérdida de memoria de la exponencial el mundo ”comienza” cuando el tipo inicia su ida al baño. Por otro lado, debido a la suma de procesos de poisson, el proceso de llegada de pacientes al consultorio será en si un proceso de poisson de tasa $\lambda_G + \lambda_L$, y por lo tanto Y, el tiempo de llegada entre clientes, seguirá una distribución exponencial de parámetro $\lambda_G + \lambda_L$. Entonces el tiempo máximo, T^*, de demora debe ser tal que :

$$P[Y \geq T^*] = e^{-(\lambda_G+\lambda_L)\cdot T^*} = 0{,}95$$

Entonces:

$$T^* = -\frac{ln(0,95)}{\lambda_G + \lambda_L}$$

Problema 2

1. Como los meses son intervalos disjuntos de tiempo estas probabilidades son independientes. La esperanza del número de fallas será $30 \cdot (\lambda_D + \lambda_A)$ en 1 mes.

2. Esta es la típica pregunta tipo “¿Cuál es la probabilidad que pase A antes de B?”. Si $T_D =$ tiempo en que ocurre la primera falla domiciliaria y $T_A =$ tiempo en que ocurre la primera falla de alumbrado público sabemos que $T_D \rightsquigarrow exp(\lambda_D)$ y $T_A \rightsquigarrow exp(\lambda_A)$

$$P(T_D < T_A) = \frac{\lambda_D}{\lambda_D + \lambda_A}$$

3. Una manera de verlo es darse cuenta que los 3 procesos involucrados son independientes, y proceder a calcular directamente la esperanza. Otra manera es calcular la esperanzas de las fallas condicionado al tiempo que dure la reparación y luego calcular lo que nos piden. Si T_r es el tiempo que dura la reparación en horas:

$$E[\text{N}^{\text{o}} \text{ fallas Domiciliarias}/T_r = t] = \lambda_D \cdot \frac{t}{24}$$

$$\Rightarrow E[\text{N}^{\text{o}} \text{ fallas Domiciliarias}] = \int_0^{\infty} \frac{\lambda_D \cdot t}{24} \cdot \frac{1}{T} \exp^{-\frac{1}{T}\cdot t} dt = \frac{\lambda_D}{24} \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{T} \cdot t \cdot \exp^{-\frac{1}{T}\cdot t} dt$$

$$\Rightarrow E[\text{N}^{\text{o}} \text{ fallas Domiciliarias}] = \frac{\lambda_D \cdot T}{24}$$

$$\Rightarrow E[\text{N}^{\text{o}} \text{ fallas Alumbrado público}] = \frac{\lambda_A \cdot T}{24}$$

4. En este caso los costos están divididos en 2 tramos: Si N_A = Número de fallas de Alumbrado público son menores o iguales que R se pagará $s_1 \cdot R$, mientras que si $N_A > R$ se pagará $s_1 \cdot R + s_2 \cdot (N_A - R)$. Así el problema de minimización queda:

$$\min_R \left\{ s_1 \cdot R \cdot P(N_A(30) \leq R) + \sum_{k=R+1}^{\infty} [s_1 \cdot R + s_2 \cdot (k-R)] \cdot P(N_A(30) = k) \right\}$$

$$\min_R \left\{ s_1 \cdot R + \sum_{k=R+1}^{\infty} s_2 \cdot (k-R) \cdot \frac{(\lambda_A \cdot 30)^k \exp^{-\lambda_A \cdot 30}}{k!}) \right\}$$

Problema 3

1. Sea X el instante de llegada de un pasajero cualquiera. Como subirá al siguiente bus, el pasajero debe haber llegado al terminal entre 0 y T. Luego, X es una v.a. Uniforme en el intervalo $[0,T]$. Entonces, lo que nos piden será:

$$E[espera] = E[T - X] = E[T] - E[X] = T - \frac{T}{2} = \frac{T}{2}$$

2. Lo anterior se calculó suponiendo un tiempo entre llegadas conocido e igual a T, entonces basta con descondicionar suponiendo que T corresponde a una v.a. exponencial de parámetro μ. Luego, utilizando la parte anterior tenemos que:

$$E[espera] = \int_0^\infty E[T-X]\cdot \mu e^{-\mu T} dT = \frac{1}{2\mu}$$

   Donde en la última integral aparece la expresión de la esperanza. Luego, para que sea conveniente cambiar la política se debe cumplir que:

$$\frac{T}{2} < \frac{1}{2\mu} \Leftrightarrow T < \frac{1}{\mu}$$

   Es decir, el tiempo constante entre buses debe ser menor al tiempo esperado actual entre llegadas.

Para las siguientes preguntas consideremos el proceso $N(t)$ como la llegada de los pasajeros. Además llamemos S_i al instante de llegada del i-ésimo pasajero.

3. En este caso nos piden lo siguiente:

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} T - S_i\right]$$

   Luego, debemos condicionar en el número de pasajeros que subirán al próximo bus:

$$\begin{aligned}
E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} T - S_i\right] &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^{n} (T-S_i)/N(t)=n\right]\cdot P[N(t)=n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} E[T/N(t)=n] - E[S_i/N(t)=n]\right)\cdot P[N(t)=n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(n\cdot T - \sum_{i=1}^{n} E[S_i/N(t)=n]\right)\cdot P[N(t)=n]
\end{aligned}$$

   Notar que al sumar los S_i se pierde el orden de llegada, por lo que es equivalente a sumar n v.a. iid Uniformes en el intervalo $[0,T]$. Luego,

$$\begin{aligned}
E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} T - S_i\right] &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(n\cdot T - \sum_{i=1}^{n}\frac{T}{2}\right)\cdot P[N(t)=n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(n\cdot T - n\cdot\frac{T}{2}\right)\cdot P[N(t)=n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(n\cdot\frac{T}{2}\right)\cdot P[N(t)=n] \\
&= \frac{T}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot P[N(t)=n] \\
&= \frac{T}{2}\cdot\lambda\cdot T \\
&= \frac{\lambda T^2}{2}
\end{aligned}$$

4. Nuevamente basta con descondicionar suponiendo que T corresponde a una v.a. exponencial de parámetro μ. Luego, utilizando la parte anterior tenemos que:

$$E\left[espera\right] = \int_0^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^{N(t)} T - S_i\right] \cdot \mu e^{-\mu T} dT = \int_0^{\infty} \frac{\lambda T^2}{2} \cdot \mu e^{-\mu T} dT = \frac{\lambda}{\mu^2}$$

La última integral se resolvió utilizando la definición de varianza de una v.a. y el hint. Luego, para que sea conveniente cambiar la política se debe cumplir que:

$$\frac{\lambda T^2}{2} < \frac{\lambda}{\mu^2} \Leftrightarrow T < \frac{\sqrt{2}}{\mu}$$

5. Para esta parte basta notar que la cota superior en el segundo caso es mayor, es decir, hay más holgura. Esto se debe a que al minimizar el tiempo de espera total en conjunto, puede que algunos pasajeros esperen más con la política nueva, por lo que es menos exigente minimizar la suma (en el caso anterior se pedía que en todos los casos se esperara menos con el nuevo sistema).