Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey
Aux: G. Cuevas, J. Gacitua, R. Szederkenyi

Solución Auxiliar 4

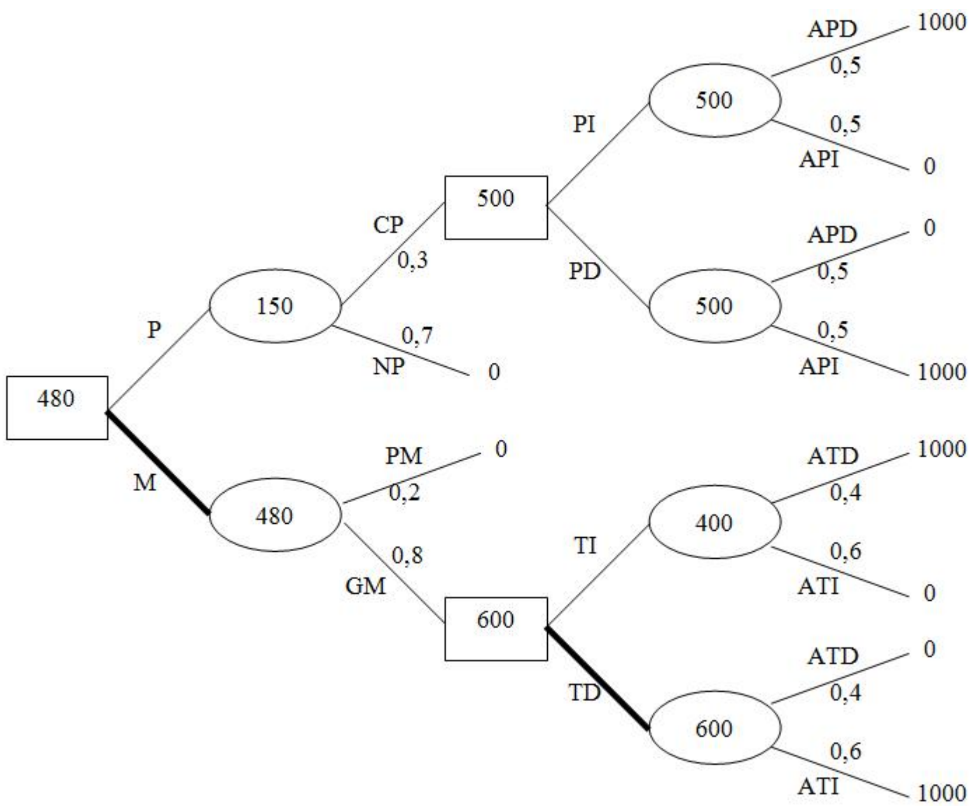
Martes 19 de Agosto de 2008

Problema 1

1. La siguiente nomenclatura es empleada para cada decisión del árbol:

   P: realizar piscinazo
   M: ir por mano a mano
   CP: árbitro cobra penal
   NP: árbitro no cobra penal
   PI: Buenanote tira penal a la izquierda
   PD: Buenanote tira penal a la derecha
   API: Arquero se tira en penal a la izquierda
   APD: Arquero se tira en penal a la derecha
   PM: Buenanote no elude a Mac y no puede ir por mano a mano
   GM: Buenanote elude a Mac y va por mano a mano
   TI: Buenanote tira a la izquierda en mano a mano
   TD: Buenanote tira a la derecha en mano a mano
   ATI: Arquero se tira en mano a mano a la izquierda
   ATD: Arquero se tira en mano a mano a la derecha

   El problema se puede modelar con el árbol de la siguiente figura (los pagos están expresados en US$).



   Luego, Buenanote debe intentar eludir a Mac y rematar hacia la derecha.

2. Ahora debemos comparar los retornos esperados de la alternativa de recibir los consejos del Gurú y ver que decisión óptima tomar. Para esto, tomamos las siguientes consideraciones de nomenclatura:

   SG: no son contratados los servicios del Gurú
   CG: son contratados los servicios del Gurú
   GPI: Gurú predice atajada de penal a la izquierda
   GPD: Gurú predice atajada de penal a la derecha
   GTI: Gurú predice que arquero se tira en mano a mano a la izquierda
   GTD: Gurú predice que arquero se tira en mano a mano a la derecha

   Debido a que el Gurú predice el lado que se tirará el arquero sin importar si es penal o mano a mano, se tendrán las siguientes igualdades de probabilidades condicionales:

$$P[GPD|APD] = P[GTD|ATD] = 0,8$$

$$P[GPI|API] = P[GTI|ATI] = 1$$

   Inicialmente analizaremos el caso de las probabilidades de los tiros penales y luego extenderemos para el caso del mano a mano.

   Para realizar la estimación de este árbol se requiere saber las probabilidades condicionadas inversamente de $[P[GPD|APD]$ y $P[GPI|API]$. Para ello se puede ver que:

$$\begin{aligned} P[GPD|APD] &= 0,8 \\ &= 1 - P[GPI|APD] \\ \Rightarrow P[GPI|APD] &= 0,2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P[GPI|API] &= 1 \\ &= 1 - P[GPD|API] \\ \Rightarrow P[GPD|API] &= 0 \end{aligned}$$

   Así utilizando probabilidades totales se tiene que:

$$\begin{aligned} P[GPD] &= P[GPD|APD] \cdot P[APD] + P[GPD|API] \cdot P[API] \\ &= 0,8 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,5 \\ &= 0,4 \\ \Rightarrow P[GPI] &= 1 - P[GPD] \\ &= 0,6 \end{aligned}$$

   Ahora realizando Bayes se obtienen las probabilidades deseadas:

$$\begin{aligned} P[APD|GPD] &= \frac{P[GPD|APD] \cdot P[APD]}{P[GPD]} \\ &= \frac{0,8 \cdot 0,5}{0,4} \\ &= 1 \\ \Rightarrow P[API|GPD] &= 1 - P[APD|GPD] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P[API|GPI] &= \frac{P[GPI|API] \cdot P[API]}{P[GPI]} \\ &= \frac{1 \cdot 0,5}{0,6} \\ &= 0,833 \\ \Rightarrow P[APD|GPI] &= 1 - P[API|GPI] \\ &= 0,167 \end{aligned}$$

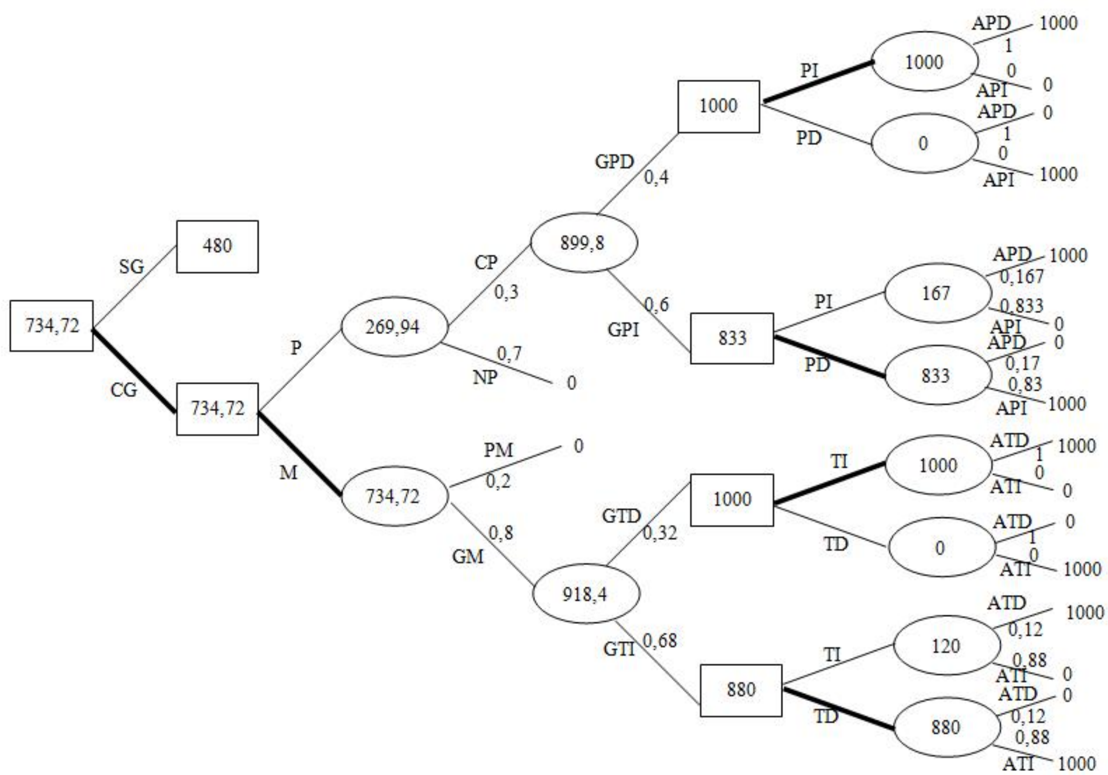
Para el caso de los mano a mano se realiza el mismo procedimiento. Primero probabilidades totales para obtener:

$$\begin{aligned} P[GTD] &= 0,32 \\ P[GTI] &= 0,68 \end{aligned}$$

Y luego empleando Bayes:

$$\begin{aligned} P[ATD|GTD] &= 1 \\ \Rightarrow P[ATI|GTD] &= 0 \\ P[ATI|GTI] &= 0,88 \\ \Rightarrow P[ATD|GTI] &= 0,12 \end{aligned}$$

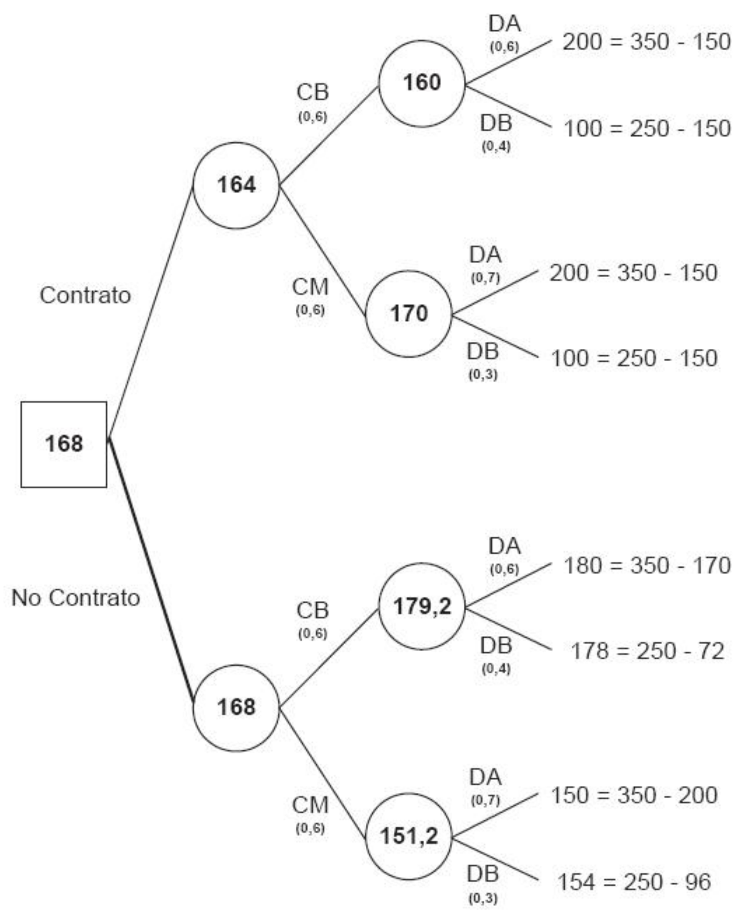
Luego de obtenidas estas probabilidades el árbol resultante se muestra en la siguiente figura:



Como se observa en el árbol de la figura, al equipo le conviene contratar a el Gurú y este puede cobrar hasta US$734,72 - US$ 480 = US$254,72 por utilizar sus habilidades predictivas en beneficio del equipo de Buenanote.

Problema 2

1. Representando a los eventos "Cosecha Buena" y "Cosecha Mala" por 'CB' y 'CM', respectivamente y a "Demanda Alta" y "Demanda Baja", por 'DA' y 'DB', respectivamente, el árbol que resulta se ve en la figura (los valores están en millones de pesos):



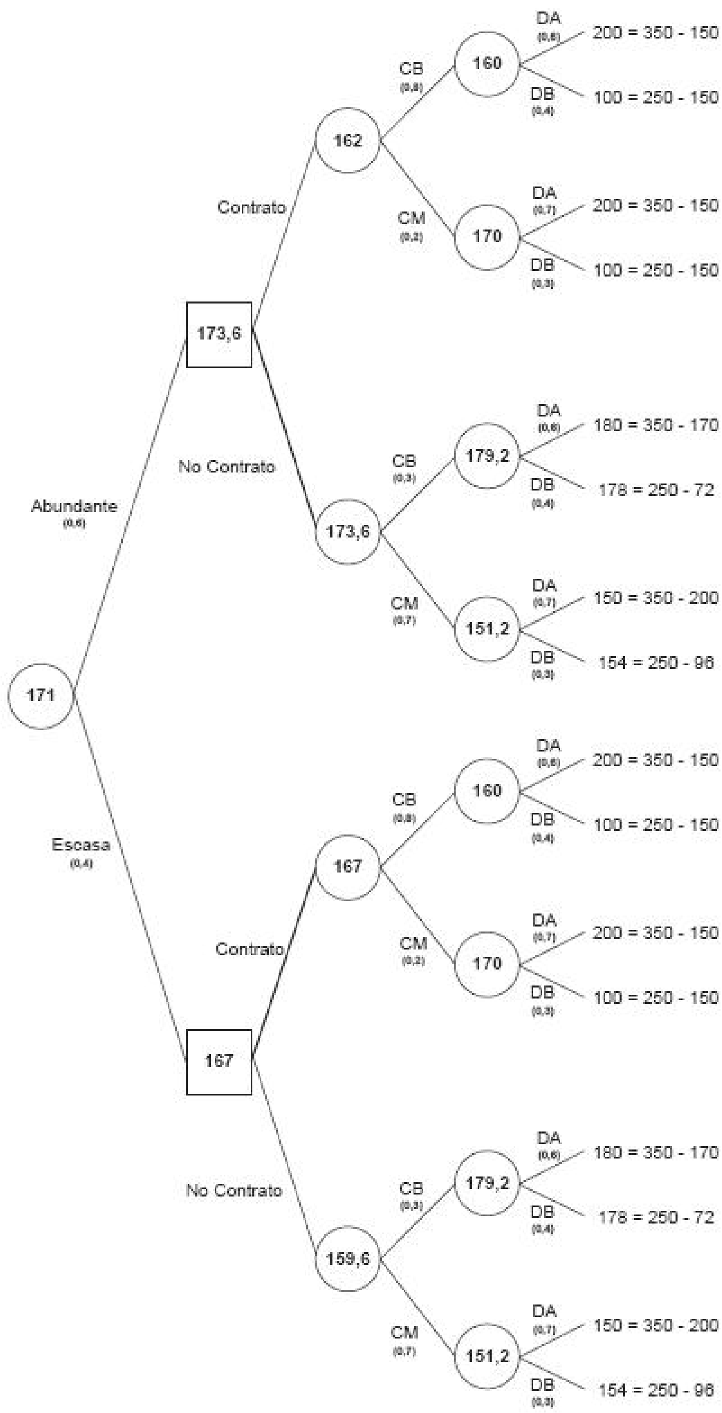
2. Para calcular el valor de la información provista por el analista, vamos a plantear un árbol que incluya los resultados de su análisis. Para esto, se necesitan las probabilidades de que la cosecha sea buena o mala, condicionada en la información del analista y las probabilidades de que el analista prediga una cosecha "Abundante" o "Escasa".
   Es decir, las probabilidades que necesitamos y no tenemos son $P\left(Abundante\right)$, $P\left(CB|Abundante\right)$ y $P\left(CB|Escasa\right)$:

$$\begin{aligned} P\left[Abundante\right] &= P\left[Abundante|CB\right]\cdot P\left[CB\right]+P\left[Abundante|CM\right]\cdot P\left[CM\right] \\ &= 0,8\cdot 0,6+0,3\cdot 0,4 \\ &= 0,6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left[CB|Abundante\right] &= \frac{P\left[Abundante|CB\right]\cdot P\left[CB\right]}{P\left[Abundante\right]} \\ &= \frac{0,8\cdot 0,6}{0,6} \\ &= 0,8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left[CB|Escasa\right] &= \frac{P\left[Escasa|CB\right]\cdot P\left[CB\right]}{P\left[Escasa\right]} \\ &= \frac{0,2\cdot 0,6}{0,4} \\ &= 0,3 \end{aligned}$$

Una vez calculadas las probabilidades, podemos plantear y resolver el árbol asociado a esta parte, que se muestra en la siguiente figura:



De los valores finales, podemos calcular que lo máximo que estaría dispuesto a pagar que es 171-168 = 3 millones de pesos.