Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey
Aux: G. Cuevas, J. Gacitua, R. Szederkenyi

Pauta CTP 5

Miércoles 19 de Noviembre de 2008

1. Estamos frente a una cola M/M/1. Los clientes actúan como servidor y los *Ai-pods* como clientes. Sea $\{X(t), t \geq 0\}$ la cadena de Markov que representa el número de *Ai-pods* disponibles en bodega. El generador infinitesimal de la cadena es:

$$Q = (q_{ij}) = \begin{cases} -\mu & i = j = 0 \\ -(\lambda+\mu) & i = j, i \geq 1 \\ \mu & j = i+1 \\ \lambda & j = i-1, i \geq 1 \end{cases}$$

Para hacer cálculos en el largo plazo, debemos obtener las probabilidades estacionarias. Se plantean las ecuaciones de equilibrio,

$$\begin{aligned} \mu\pi_o &= \lambda\pi_1 \\ (\mu+\lambda)\pi_i &= \mu\pi_{i-1} + \lambda\pi_{i+1} \ \forall i = 1, 2... \\ \sum_{i=0}^{\infty}\pi_i &= 1 \end{aligned}$$

Sea $\rho = \frac{\mu}{\lambda}$ (se asume $\rho < 1$). Por lo tanto con las ecuaciones anteriores se llega a:

$$\begin{aligned} \pi_o &= 1-\rho \\ \pi_i &= \rho^i\pi_o \end{aligned}$$

En esta parte se pide la proporción de clientes que se retira con las manos vacías. Aquí se hace un análisis de $\frac{\text{Casos Favorables}}{\text{Casos Totales}}$ por unidad de tiempo. La totalidad de los clientes llega al paradero a tasa λ. En el largo plazo, clientes llegan a un sistema vacío con tasa $\lambda\pi_o$, por lo tanto la fracción pedida es:

$$\frac{\lambda\pi_o}{\lambda} = \pi_o$$

2. En esta pregunta se pide:

$$L = \sum_{i=0}^{\infty} i\pi_i = \frac{\mu}{\lambda-\mu}$$

3. Se busca el tiempo promedio que un *Ai-pod* está en bodega, W. Ocupando Little y la parte anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} W &= \frac{L}{\mu} \\ &= \frac{1}{\lambda-\mu} \end{aligned}$$

4. Se define la función de utilidad:

$$\Pi = B\cdot(1-\pi_o) - M\cdot\lambda\cdot\pi_o - A\cdot L$$

El μ óptimo se obtiene al resolver:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\mu} = 0$$