Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey
Aux: G. Cuevas, J. Gacitua, R. Szederkenyi

Solución Auxiliar 15

Miércoles 15 de Octubre de 2008

Problema 1

1. El problema es abordable mediante programación dinámica debido a la característica intertemporal de las decisiones, la existencia de etapas de decisión y en cada una de ellas se resuelve un problema de estructura similar .

- **Etapas**:
  - Cada uno de los meses del horizonte de planificación).
- **Variables de estado**:

$$S_i = \text{Número de productos disponibles al inicio del mes i}$$

$$\hat{S}_i = \text{Número de productos que llegaran el proximo més debido a atraso de ordenes}$$

- **Variables de decisión**:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{Si ordeno productos para el próximo mes} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$x_i = \text{Número de productos que ordeno para el próximo mes}$$

- **Variable aleatoria**:

$$p = P[\text{Una orden se retrase un mes}]$$

$$q = P[\text{Un cliente demande una unidad de producto}]$$

- **Función de beneficio acumulado (incorpora recursión)**:
  - Etapa T+1:

$$V^{\star}_{T+1}(S_{T+1}, \hat{S}_{T+1}) = 0$$

  - Etapa i:

$$\begin{aligned} V_i(S_i, \hat{S}_i, x_i, y_i) \quad = \quad & \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} q^n (1-q)^{N-n} \Big[P \cdot \text{mín}\{S_i, n\} - i \cdot \text{máx}\{n - S_i, 0\} \\ & + (1-p) \cdot [V^*_{i+1}(\text{mín}\{L, S_i - \text{mín}\{S_i, n\} + x_i + \hat{S}_i\}, 0)] \\ & + p \cdot [V^*_{i+1}(\text{mín}\{L, S_i - \text{mín}\{S_i, n\} + \hat{S}_i\}, X_i)] \Big] \\ & - K \cdot y_i - c \cdot x_i \end{aligned}$$

    Donde:

$$V^{\star}_i(S_i, \hat{S}_i) = \max_{0 \le x_i \le L \cdot y_i} [V_i(S_i, \hat{S}_i, x_i, y_i)]$$

  - Condiciones de borde:

$$S_1 = S$$

$$\hat{S}_1 = 0$$

2. En este caso se debería incluir una variable de estado que nos indicase cuantos clientes se dejaron insatisfechos en el período anterior. De esta forma, para un período dado y condicionando sobre la demanda realizada, se puede tener el número de clientes insatisfechos durante el período. Con estas cifras se puede calcular la probabilidad de que el número de clientes insatisfechos dos meses continuos sea j, y por lo tanto, se podría modelar la situación e incluir los cambios las leyes de probabilidades de las demandas período a período.

3. Dados estos datos la solución es la siguiente[1]:

   - Período 3:

S_3	$\hat{S}_3$	$X_3=0$	$X_3=1$	$X_3=2$	V_3^*	X_3^*
0	–	0	-15	-20	0	0
1	–	11,25	$-3{,}75$	$-8{,}75$	11,25	0
2	–	23	8	3	23	0

   - Período 2:

S_2	$\hat{S}_2$	$X_2=0$	$X_2=1$	$X_2=2$	V_2^*	X_2^*
0	0	0	-6	$-1{,}6$	0	0
0	1	11,25	5,65	*d*	11,25	0
0	2	23	*d*	*d*	23	0
1	0	14,0625	8,1625	10,2125	14,0625	0
1	1	25,4375	17,4875	*d*	25,4375	0
1	2	34,25	*d*	*d*	34,25	0
2	0	26,375	18,325	15,675	26,375	0
2	1	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*
2	2	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*

   - Período 1:

S_1	$\hat{S}_1$	$X_1=0$	$X_1=1$	$X_1=2$	V_1^*	X_1^*
1	0	14,7656	12,9218	17,5125	17,5125	2

Problema 2

Notación:
$N_A(t)$: Número de llamados por el producto A que se han producido hasta t (PPH tasa λ_A)
$N_A^c(t)$: Número de llamados por el producto A que realizan la compra que se han producido hasta t (PPH tasa $p_A\lambda_A$)
$N_B(t)$: Número de llamados por el producto B que se han producido hasta t (PPH tasa λ_B)
$N_B^c(t)$: Número de llamados por el producto B que realizan la compra que se han producido hasta t (PPH tasa $p_B\lambda_B$)

1. La probabilidad que la próxima llamada sea por el producto A es $\frac{\lambda_A}{\lambda_A+\lambda_B}$. La probabilidad que la próxima llamada sea de un cliente que compra el producto A es $\frac{p_A\lambda_A}{\lambda_A+\lambda_B}$.

2. La tasa promedio de llamadas de clientes que realizan compras es la suma de las tasas de los que compran A y los que compran B, es decir $p_A\lambda_A + p_B\lambda_B$.
   El proceso de llamadas que terminan en compras SI es un proceso de Poisson ya que es la suma de dos procesos de Poisson independientes: los de compra de cada producto por separado.
   Estos son procesos de Poisson ya que corresponden, cada uno, a uno de los procesos que resultan de dividir los procesos de llamadas por una probabilidad fija en dos clases. Son independientes porque los procesos originarios son independientes.

[1] i denota infactibilidad y d denota solución dominada

3. En términos de los procesos que hemos definido esto corresponde a la probabilidad que $N_A(1) > N_B(1)$. Esta probabilidad puede ser calculada de la siguiente manera (vamos a usar a m como el número de llamados recibidos por A y n como el número de llamados recibidos por B):

$$\begin{aligned}
P\left[N_A(1) > N_B(1)\right] &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty} P\left[N_A(1) = m \wedge N_B(1) = n\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty} P\left[N_A(1) = m\right] \cdot P\left[N_B(1) = n\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\lambda_A^m \cdot e^{-\lambda_A}}{m!} \cdot \frac{\lambda_B^n \cdot e^{-\lambda_B}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\lambda_A^m \cdot \lambda_B^n \cdot e^{-(\lambda_A+\lambda_B)}}{m! \cdot n!}
\end{aligned}$$

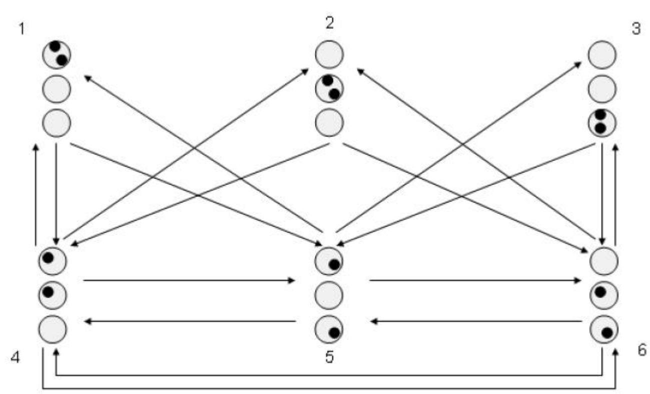
4. Una vez que sabemos que tenemos una llegada de cada tipo, la distribución del momento en que se producen es una distribución uniforme en $(0,1)$. Por lo tanto, la pregunta corresponde a ¿cuál es la probabilidad que dadas dos v.a. Y_A y Y_B independientes con distribución uniforme en $(0,1)$, sea que $Y_A < Y_B$? Hay, al menos, dos maneras de calcular esto:

   - Como $P\left[Y_A = Y_B\right] = 0$, por un argumento de simetría se llega a que $P\left[Y_A < Y_B\right] = \frac{1}{2}$.
   - Utilizando la función de densidad de Y_A y Y_B, como son independientes:

$$P\left[Y_A < Y_B\right] = \int_0^1 \int_0^{t_B} dt_A dt_B = \int_0^1 t_B dt_B = \frac{1}{2}$$

Problema 3

1. Modelamos los estados como el número de bolitas bajo cada vaso. Tendremos entonces que la cadena se define de la siguiente forma:



La matriz de transiciones es la siguiente:

$$\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\
0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0
\end{vmatrix}$$