Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey
Aux: G. Cuevas, J. Gacitua, R. Szederkenyi

Clase Auxiliar 15: PDE, Procesos de Poisson y Cadenas de Markov

Miércoles 15 de Octubre de 2008

Problema 1

Considere una tienda que cada mes debe decidir cuanto ordenar de un determinado producto. El costo de cada unidad de producto es $\$c$ y existe un costo fijo de poner una orden igual a $\$K$. Se sabe que en general, el tiempo en que se demora en llegar una orden es de 1 mes (lo que se ordena 1 mes estará disponible para el mes siguiente), pero existe una probabilidad p que la orden se atrase y demore 2 meses en llegar. Una orden nunca demora más de 2 meses en llegar.

Actualmente la tienda tiene N clientes, cada uno de los cuales demandará una unidad de producto en un mes con una probabilidad q. El precio de venta es $\$P$ ($P > c$). Además, si llega un cliente y no hay unidades en stock se incurre en un costo $\$i$ por cada uno de ellos.

Por otra parte, la bodega en que se almacena el producto es de capacidad limitada y sólo permite guardar L unidades, con $L \geq N$ (todas las unidades por sobre esta capacidad que intente almacenar serán dañadas perdiendo completamente su valor).

El dueño de la tienda actualmente cuenta con S unidades en la bodega y está interesado en contar con un sistema que le permita, mes a mes, decidir cuánto producto ordenar con el fin de maximizar sus utilidades para los próximos T períodos, fecha en que cerrará su negocio y las unidades de producto que sobren no tendrán valor comercial.

1. Formule el modelo de programación dinámica que permitiría apoyar las decisiones del dueño de la tienda. Escriba explícitamente las expresiones de los valores esperados que puedan aparecer en este modelo.
2. Explique esquemáticamente como incluiría en su modelo la siguiente situación: El dueño de la tienda sabe que si un cliente en 2 meses seguidos no encuentra el producto en stock se retirará indignado y nunca más volverá a la tienda lo que implica un costo I, con $I \gg i$.
3. Si actualmente no hay pedidos atrasados encuentre la política óptima para el dueño de la tienda para los siguientes valores numéricos:

$$\begin{gathered} c = 5 \quad K = 10 \quad p = 0,2 \quad L = 2 \\ N = 2 \quad q = 0,5 \quad P = 15 \quad i = 0 \\ T = 3 \quad S = 1 \end{gathered}$$

Problema 2

Una empresa de ventas por teléfono comercializa dos productos: A y B. Los llamados recibidos por el producto A y el producto B pueden ser modelados como procesos de Poisson homogéneos independientes, con tasas λ_A y λ_B, respectivamente.
Además, se sabe que un cliente que llama por el producto i con probabilidad p_i realiza la compra y con probabilidad $1 - p_i$, no la realiza. Considere que el centro de atención cuenta con suficientes líneas y operadores para atender todas las llamadas que recibe y que se cuenta con suficientes unidades en inventario para realizar todas las ventas solicitadas.

1. ¿Cual es la probabilidad que la próxima llamada sea de un cliente que consulta por el producto A? ¿y que sea de un cliente que comprará el producto A?
2. ¿Cuál es la tasa promedio de llamados de clientes que compran? El proceso de llegada de estas llamadas, ¿es un proceso de Poisson? Justifique.
3. ¿Cuál es la probabilidad que en una hora se reciban más llamados por el producto A que por el producto B?
4. En la última hora se han vendido una unidad del producto A y una del producto B, ¿cuál es la probabilidad que el producto A se haya vendido antes que el B?

Problema 3

Un conocido mago del Paseo Ahumada ha hecho una respetable fortuna con el siguiente juego de azar: en una mesa tiene tres vasos (no transparentes) boca-abajo y dos bolitas que se colocan (juntas o por separado) debajo de alguno de los vasos. Luego, con una habilidad t rapidez impresionante, el mago procede a mover las bolitas de un vaso a otro. En cada movimiento cambia de posición sólo una bolita. Esto lo hace incontables veces hasta que un jugador deseoso de apostar le dice ”STOP”. En ese momento el jugador tiene que escoger uno de los vasos. Si debajo de él están las DOS bolitas, gana. De lo contrario pierde. Para simplificar el juego, asuma que en cada movimiento el mago escoge con igual probabilidad cualquiera de las bolitas, y también equiprobablemente escoge a cuál de los OTROS vasos la cambia.

Muestre que el juego anterior se puede modelar como una Cadena de markov en tiempo discreto con sólo 6 estados. Constrúyala. Identifique los estados y especifique cuáles son las probabilidades de transición.