Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey
Aux: G. Cuevas, J. Gacitua, R. Szederkenyi

Pauta CTP 3

Miércoles 8 de Octubre de 2008

Notación: $N(t)$: Número de clientes que han llegado a la discotheque hasta t (PPH tasa λ)
$N_V(t)$: Número de clientes VIP que han llegado a la discotheque hasta t (PPH tasa $p\lambda$)
$N_N(t)$: Número de clientes normales que han llegado a la discotheque hasta t (PPH tasa $(1-p)\lambda$)

1. Claramente, dado que hay m clientes en total, la distribución del número de clientes VIP es una binomial de parámetros m y p. Luego, si denotamos $p_k(m)$ a la probabilidad que nos piden, tenemos:

$$p_k(m) = \binom{m}{k} p^k \cdot (1-p)^{m-k}$$

2. Llamemos q_m a la probabilidad que nos piden. Para calcularla se distinguen dos casos para m,

   Caso $m < C$:

   En este caso se necesita que hayan llegado exáctamente m clientes en las T horas desde que se inició el evento. Luego,

$$q_m = P[N(T) = m] = \frac{(\lambda T)^m \cdot e^{-\lambda T}}{m!}$$

   Caso $m = C$:

   En este caso se necesita que hayan llegado a lo menos C clientes en las T horas desde que se inició el evento. Luego,

$$q_N = P[N(T) \geq C] = \sum_{j=C}^{\infty} P[N(T) = j] = \sum_{j=C}^{\infty} \frac{(\lambda T)^j \cdot e^{-\lambda T}}{j!}$$

3. Debe condicionarse en el número de clientes en el evento. Luego,

$$E[Ingreso] = \sum_{m=0}^{C} E[Ingreso/m\ clientes] \cdot q_m$$

   Ahora como cada tipo de cliente entrega un ingreso distinto debemos condicionar respecto a esto. En particular consideraremos una cantidad k de clientes VIP:

$$\begin{aligned} E[Ingreso] &= \sum_{m=0}^{C} \sum_{k=0}^{m} E[Ingreso/k\ clientes\ VIP/m\ clientes] \cdot P[k\ clientes\ VIP/m\ clientes] \cdot q_m \\ &= \sum_{m=0}^{C} \sum_{k=0}^{m} E[Ingreso/k\ clientes\ VIP/m\ clientes] \cdot p_k(m) \cdot q_m \end{aligned}$$

   Debemos ver que si hay m clientes y k de ellos son VIP, el ingreso que se tendrá es:

$$E[Ingreso/k\ clientes\ VIP/m\ clientes] = k \cdot V_V + (m-k) \cdot V_N$$

   Finalmente,

$$E[Ingreso] = \sum_{m=0}^{C} \sum_{k=0}^{m} (k \cdot V_V + (m-k) \cdot V_N) \cdot p_k(m) \cdot q_m$$

4. Condicionamos sobre el número m de clientes que hay en la discotheque. Se distinguen dos casos:

   Caso $m \leq C$:
   En este caso no se tiene ninguna variación con la parte original. Así,

   $$r_k(m) \quad = \quad p_k(m)$$

   Caso $m > C$:
   Aquí sabemos que $m > C$, debido a esto por lo menos habrán $m - C$ clientes VIP en la discotheque.
   Así si $k < m - C$,

   $$r_k(m) \quad = \quad 0$$

   Ahora en el caso que $m \geq k \geq m - C$:

   $$r_k(m) \quad = \quad \binom{C}{k-m+C} p^{k-m+C} \cdot (1-p)^{m-k}$$

   Esta última expresión se debe a que se requiere que hayan k clientes VIP, pero sabemos que contamos como base con $m - C$ de este tipo, por lo tanto de los C clientes que nos quedan, es necesario que $k - (m - C)$ sean VIP.

   Además cuando $k > m$:

   $$r_k(m) \quad = \quad 0$$

5. Aquí consideraremos dos formas de realizar esta parte:

   - En esta parte calcularemos la probabilidad de que hayan m clientes. Nuevamente dividimos por casos:

     Caso $m \leq C$:
     En este caso simplemente se requieren que hayan llegado m clientes,

     $$P[m\ clientes] = P[N(T) = m] = \frac{(\lambda T)^m \cdot e^{-\lambda T}}{m!}$$

     Caso $m > C$:
     En este caso se debe tener lo siguiente en consideración,

Llegadas clientes VIP	Llegadas clientes normales
m	0
$m-1$	1
$\vdots$	$\vdots$
$m-C+1$	$C-1$
$m-C$	C
$m-C$	$C+1$
$m-C$	$C+2$
$\vdots$	$\vdots$

$$\begin{aligned} P[m\ clientes] &= \left(\sum_{k=0}^{C-1} P[N_N(T) = k \wedge N_V(T) = m-k]\right) + P[N_N(T) \geq C \wedge N_V(T) = m-C] \\ &= \sum_{k=0}^{C-1}\left(\frac{((1-p)\lambda T)^k \cdot e^{-(1-p)\lambda T}}{k!} \cdot \frac{(p\lambda T)^{m-k} \cdot e^{-p\lambda T}}{(m-k)!}\right) + \sum_{k=C}^{\infty}\left(\frac{((1-p)\lambda T)^k \cdot e^{-(1-p)\lambda T}}{k!} \cdot \frac{(p\lambda T)^{m-C} \cdot e^{-p\lambda T}}{(m-C)!}\right) \end{aligned}$$

     Finalmente se obtiene que:

     $$P[k\ clientes\ VIP] \quad = \quad \sum_{m=0}^{\infty} r_k(m) \cdot P[m\ clientes]$$

- Una forma alternativa de calcular que hayan k clientes es considerar que el proceso de poisson que se produce para los invitados VIP no tiene límite en su llegada, por lo tanto que hayan k clientes VIP es equivalente a que hayan llegado k clientes de este tipo, por lo tanto:

$$P\left[k\ clientes\ VIP\right] = \frac{\left(p\cdot\lambda T\right)^{k}\cdot e^{-p\cdot\lambda T}}{k!}$$