



## Clase Auxiliar 22: Cadenas de Markov

Miércoles 12 de Noviembre de 2008

### Problema 1

Un auxiliar de este curso ha decidido dedicarse a la música, y junto a unos amigos formó el grupo “Pepe y los Markovianos”. Actualmente se limitan a tocar los fines de semana en algunos pub capitalinos, siendo una de tantas bandas desconocidas que existen en el país.

Cada mes existe una probabilidad  $q$  que un empresario de algún sello musical nacional los escuche y decida apoyarlos para grabar y realizar giras para cantar en todo el país. Si tal cosa ocurre pasarían a ser una banda conocida a nivel nacional.

Una banda que es conocida a nivel nacional corre el riesgo de perder el apoyo del sello nacional que la patrocina, con lo cual volvería a ser una banda desconocida. Cada mes, la probabilidad que esto ocurra es  $r$ . Por otro lado, una banda conocida a nivel nacional puede llegar a llamar la atención del representante de un sello musical internacional, el cual podría decidir patrocinarlos. De ser así la banda pasaría a ser conocida a nivel internacional. Cada mes existe una probabilidad  $s$  que esto ocurra ( $s + r < 1$ ).

Una banda que es conocida internacionalmente nunca dejará de serlo. Sin embargo podemos distinguir dos categorías entre ellas: las que están de moda y las que no. Una banda internacionalmente conocida que está de moda en un mes dado seguirá estando de moda al mes siguiente con probabilidad  $t$ . Una banda conocida a nivel internacional que no está de moda en un mes dado pasará a estar de moda al mes siguiente con probabilidad  $u$ . El primer mes que una banda se hace conocida a nivel internacional nunca está de moda. Una banda sólo percibe utilidades (equivalentes a  $K[\$]$ ) en los meses que es conocida internacionalmente y está de moda (parte de esas utilidades corresponden a una satisfacción de su ego).

Hint: Suponga  $0 < x < 1 \quad \forall x \in \{q, r, s, t, u\}$ .

1. Construya una cadena de Markov que represente la trayectoria de la banda de Pepe y que permita predecir si en un mes dado percibirán utilidades o no (defina estados adecuados, dibuje el grafo indicando las probabilidades de transición o bien escriba la matriz de prob. de transición).
2. ¿Llegarán “Pepe y los Markovianos” a tener éxito algún día?
3. ¿Admite la cadena una ley de probabilidades estacionarias?
4. ¿Qué estados tienen necesariamente una probabilidad estacionaria igual a 0? Calcule las probabilidades estacionarias.
5. ¿Cuál es (aprox.) el valor esperado de las utilidades percibidas por “Pepe y los Markovianos” en febrero del año 2048?

### Problema 2

Considere la complicada situación que vive Armijo Catalán, flamante auxiliar de variados cursos de Ingeniería Industrial. Este personaje recibe consultas de sus alumnos (en forma de e-mails) de acuerdo a un proceso de poisson de tasa  $\lambda$  (e-mails/hora). La capacidad de la cuenta de Armijo es tal que puede almacenar a lo más 3 e-mails (el resto simplemente rebotará). Armijo responde a cada una estas consultas en un tiempo exponencialmente distribuido de media  $\frac{1}{\mu}$  y lo hará mientras hayan consultas sin responder (una a la vez). Cada vez que responde una consulta el e-mail correspondiente es borrado.

Por otro lado la novia de Armijo llama a este a su celular con el objeto de demandar atención inmediata por parte de él. El tiempo entre llamadas es una variable aleatoria distribuida exponencialmente de media  $\frac{1}{\delta}$ . Si la llamada se produce cuando Armijo se encuentra con menos de 3 consultas pendientes por contestar (incluyendo en la que se encuentra trabajando si corresponde) entonces, acudirá inmediatamente al encuentro con su enamorada con la cual pasará un tiempo aleatorio

exponencialmente distribuido de media  $\frac{1}{\gamma}$ . Sin embargo si su cuenta de correo está llena acudirá donde su novia apenas termine de contestar el mensaje actual. Cuando la novia de este personaje ha llamado 2 veces sin recibir respuesta entra en un estado de shock (producto de celos injustificados?) y acude instantáneamente en encuentro de Armijo, al cual encuentra y reta durante un tiempo exponencial de media  $\frac{1}{\beta}$ . Tras este altercado la novia ingresa ilícitamente a la cuenta de correo de Armijo y borra todos los e-mails que encuentre. Por último considere que si el auxiliar se encuentra en su oficina y sin mails pendientes se dedica a trabajar en su tesis.

1. Modele el estado de ocupación de Armijo como una cadena de Markov en tiempo continuo.
2. Argumente la existencia de probabilidades estacionarias. Escriba las ecuaciones que permitirían calcularlas.

En lo que sigue suponga conocidas las probabilidades estacionarias de la cadena.

3. ¿Cual es el número promedio de "escenas de celos" que la novia le hace a Armijo en una hora.
4. ¿Que fracción del tiempo, en el largo plazo Armijo dedica a su trabajo de tesis?

### Problema 3

Usted ha decidido instalarse con un negocio para lustrar zapatos. El establecimiento consta de dos sillas. En la silla 1 los zapatos del cliente son limpiados y embetunados, para luego pasar a la silla 2, donde se les saca el brillo. Los tiempos de servicio en las dos sillas son variables aleatorias independientes, exponencialmente distribuidas de tasas  $\mu_1$  y  $\mu_2$  respectivamente. Considere que los clientes potenciales tienen tiempos de llegada exponenciales de tasa  $\lambda$  y que el cliente sólo entra al establecimiento si las dos sillas están desocupadas.

1. Modele el problema anterior como una cadena de Markov en tiempo continuo.  
Suponga que ahora un ayudante es contratado y cada uno trabaja en una silla. Considere el mismo problema anterior, pero ahora un cliente potencial entra al negocio si la silla 1 está vacía. Cuando el trabajo en la silla 1 se termina, pasa a la silla 2 si está vacía o espera en la 1 hasta que la 2 se desocupe.
2. Modele el nuevo problema como una cadena de Markov en tiempo continuo. ¿Por qué puede hacerlo ?.
3. ¿Qué proporción de clientes potenciales entran al establecimiento ?.
4. ¿Cuál es la tasa promedio de entrada de clientes al negocio ?.
5. ¿Cuál es el número promedio de clientes dentro del negocio ?.
6. En promedio, ¿cuánto tiempo pasa un cliente que entra al local, dentro de éste?.