Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: INVESTIGACIÓN OPERATIVA

Utilidad Esperada

Denis Sauré V.
Julio, 2003.

1. Problemas de Utilidad Esperada

1. (*)Una persona desea asegurar su auto contra los daños producidos por un choque (que seguro tendrá, porque es muy descuidado para manejar). La póliza contempla un pago de un 10 % del monto asegurado y funciona de la siguiente manera:

   - Si el valor de los daños causados por el choque es menor o igual que el monto asegurado, entonces la *aseguradora* le pagará el 80 % del valor *de los daños*
   - Si el valor de los daños causados por el choque es mayor que el monto asegurado, entonces la *aseguradora* le pagará el 90 % del valor *del monto asegurado*

   Por otro lado, se sabe que el valor de los daños causados por el choque es una variable aleatoria $U(100, 500)$. ¿Cuál es el monto que la persona debe asegurar para minimizar el valor esperado de sus pagos producto del choque?.

2. (*)La demanda semanal por un determinado artículo se puede modelar en forma discreta como:

   $$Pr[D = n] = 1/5 \quad con \quad n = 1, 2, 3, 4, 5.$$

   El fabricante tiene un costo de C_1 por producto, mientras que lo vende en C_2. Cualquier artículo que no se vende al término de la semana debe almacenarse con un costo unitario de C_3. Si el fabricante decide producir N artículos al comienzo de la semana:

   a) ¿Cuál es la utilidad esperada por semana?.
   b) ¿Para qué valor de N es máxima la utilidad esperada?.
   Considere $C_1 = 3, \quad C_2 = 9, \quad C_3 = 1$

3. (*)Un inversionista está interesado en participar en un promisorio proyecto. Dicho proyecto es tal que si él invierte P [U.M.] el primero de enero de un año, recibirá:

   $$P + \sqrt{\frac{P * (1 + r)}{A}}$$

   el 31 de Diciembre de ese mismo año. En la Expresión, A es un parámetro conocido, en tanto que r es un índice de la rentabilidad del sector agrícola del país, al cual pertenece el proyecto. Al comenzar el año, r no es conocido con certeza y desde el punto de vista del inversionista se comporta como una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $[a, b]$ con $b > a > 0$. El inversionista en cuestión no posee fondos propios, por lo que deberá pedir un préstamo si quiere participar del proyecto. La tasa de interés en el mercado financiero es γ, es decir, deberá devolver $(1+\gamma)*X$ por cada X [U.M.] que pida prestadas al comenzar el año.

   Determine la estrategia de inversión que maximice los ingresos esperados de este inversionista.

4. Una empresa constructora (Constructora A) piensa presentarse a la licitación para construir un gran puente ferroviario. En la propuesta la empresa debe indicar cuánto cobrará por realizar la obra. Se adjudicará la licitación aquella empresa que cobre menos.

   El gerente de la Constructora A sabe que, aparte de la suya, existe sólo una empresa más interesada en el proyecto, la Constructora B. Él no sabe cuál es el precio que pedirá la Constructora B por realizar la obra. Desde su punto de vista, ese precio es una variable aleatoria no negativa con función de distribución conocida $F(\cdot)$.

   El equipo técnico de la Constructora A ha estimado que el costo de construir el puente será de C [$].

   Si a la Constructora A le interesa maximizar el valor esperado de sus utilidades, ¿Qué precio debe pedir en su propuesta?.

5. (*) Un teatro ofrece entradas rebajadas para estudiantes, las cuales deben ser compradas 3 días antes de cada función. Las entradas que no son vendidas por esa vía, serán ofrecidas a precio regular el día de la función. El precio regular es C_1 [$] y el precio rebajado para estudiantes es C_2 [$] ($C_2 < C_1$).

   El teatro tiene una capacidad de N asientos. El número de estudiantes que llega a comprar entradas 3 días antes de la función es una variable aleatoria con distribución conocida (la probabilidad que lleguen k estudiantes es p_k, $\forall k \in \mathbb{N}$). El número de personas que llega a comprar entradas a precio regular el día de la función es una variable aleatoria con distribución conocida (la probabilidad que lleguen k es q_k, $\forall k \in \mathbb{N}$).

   El gerente del teatro ha observado que en muchas ocasiones se vende un gran número de entradas a precio rebajado, y al llegar el día de la función quedan pocas entradas para vender a precio regular, y muchos clientes que llegan ese día (dispuestos a pagar el precio regular) se quedan sin entrada. Por ello ha decidido poner un límite superior de N_E entradas al número de entradas para estudiantes que se pueden vender para cada función. Su objetivo es maximizar el valor esperado de sus ingresos. El problema del gerente es que no sabe qué valor fijar para N_E, y para ello le ha pedido ayuda a Ud. para ayudarle a determinar el valor adecuado, desarrolle los siguientes puntos.

   a) Condicional en que 3 días antes de la función se vendieron $(N - x)$ entradas rebajadas (de modo que quedan x entradas para venderse el día de la función) ¿Cuál es el valor esperado de los ingresos totales por venta de entradas?. Llame a este valor $B(x)$.

   Note que si 3 días antes de la función ya se han vendido $(N - x)$ entradas rebajadas, y ud. decide no vender más entradas ese día, el valor esperado de sus ingresos (condicional en esa información) será $B(x)$.

   b) Suponga que ya se han vendido $(N - x)$ entradas rebajadas, y llega un estudiante más a pedir una entrada. Ud. podría vendérsela o bien indicarle que se agotaron las entradas rebajadas. Evalúe cuál de esas alternativas es mejor para el teatro.

   c) A partir de los puntos anteriores, ¿Cómo determinaría el número máximo de entradas a vender a precio rebajado?.

6. (*)Suponga que el dueño de un centro de dental quiere definir la política de citaciones de pacientes. Cada dentista puede atender 2 pacientes en el período en estudio. El primer paciente se cita al comienzo de la sesión ($t_1 = 0$) y el segundo se cita en el instante $t_2 = x$. Se ha observado que todos los pacientes son puntuales.

   Los tiempos de cada atención son variables aleatorias iid con distribuciones Uniformes entre a y b [hrs]. Así, cuando el segundo paciente llega al centro dental existen dos posibilidades:

   - El dentista está ocupado atendiendo al primer paciente. En este caso, el segundo cliente debe esperar hasta que termine la atención del primero para ser atendido.
   - El dentista está ocioso, ya que terminó de atender al primer paciente. El segundo cliente se atiende de inmediato.

   El dentista cobra $M[\$/hr]$ independientemente si está trabajando o no, por lo que a Ud. le interesa que este se desocupe en el menor tiempo posible de la atención de los 2 pacientes. Sin embargo, si un paciente llega y su dentista está ocupado el centro percibe un costo de $P[\$/hr]$ mientras éste espera.

   Se quiere buscar cuál es el instante x óptimo para citar al 2° paciente si el tomador de decisiones es neutral al riesgo. Para ello conteste las siguientes preguntas.

   a) Si el segundo paciente es citado en el instante x y por lo tanto llega al sistema en el instante x (recuerde que es puntual), ¿Cuál es la probabilidad que encuentre al dentista ocupado atendiendo al primer paciente y por lo tanto tenga que esperar para recibir su atención?.

b) Si al llegar a la consulta, el segundo cliente encuentra al dentista ocupado, ¿Cuál es la esperanza del tiempo que tendrá que esperar hasta comenzar a ser atendido?. ¿Cuál es la esperanza si lo encuentra desocupado?. Entonces, si el segundo cliente llega a la consulta en el instante x, ¿Cuál es la esperanza del tiempo de espera ?.

c) ¿Cuál es la esperanza del tiempo que el dentista estará en el centro dental?.

d) Utilizando las partes anteriores, defina el problema de optimización que debe resolver el dueño de la consulta. Encuentre el momento óptimo para citar al segundo paciente.

2. Resolución problemas de utilidad esperada

■ **1.** Notar que la persona asume que en el largo plazo chocará (P[Chocar]=1). Primero veamos cuál es la esperanza de los pagos producto de un choque, dado que el monto asegurado es X. Si el monto X se encuentra entre 100 y 500 se tendrá que:

$$\begin{aligned}
E[\text{Pagos}] &= \text{Pago Fijo} + E[\text{Gastos por choque}] \\
&= 0{,}1 \cdot X + \int_{100}^{500} E[\text{Gastos por choque}|\text{Daños} = \text{t}] \cdot f_{\text{daños}}(t)dt \\
&= 0{,}1 \cdot X + \int_{100}^{X} \frac{0{,}2t}{400}dt + \int_{X}^{500} \frac{t - 0{,}9X}{400}dt \\
&= 0{,}1 \cdot X + \frac{0,1}{400}(X^2 - 10000) + \frac{1}{800}(250000 - X^2) - \frac{0{,}9}{400}(500 - X) \cdot X
\end{aligned}$$

De la misma forma se puede ver que:

$$E[\text{Pagos}] = 0,1 \cdot X + E[U(100,500)] - 0,9 \cdot X = 300 - 0,8 \cdot X \quad \text{si } X < 100$$
$$E[\text{Pagos}] = 0,1 \cdot X + 0,2 \cdot E[U(100,500)] = 0,1 \cdot X + 0,2 \cdot 300 \quad \text{si } X > 500$$

Claramente si lo que se busca es minimizar la cantidad pagada suponiendo que se chocará, entonces las cantidades óptimas para los tres rangos son:

$$X^* = 100 - \epsilon \quad \text{si } X < 100$$
$$X^* = 500 + \epsilon \quad \text{si } X > 500$$
$$X^* = 410 \quad \text{si } 100 \leq X \leq 500$$

De esta forma vemos que la esperanza de los pagos en cada rango serán:

$$E[\text{Pagos}^*] = 220 \quad \text{si } X < 100$$
$$E[\text{Pagos}^*] = 110 \quad \text{si } X > 500$$
$$E[\text{Pagos}^*] \approx 100 \quad \text{si } 100 \leq X \leq 500$$

Entonces conviene asegurar 410 unidades monetarias.

■ **2.** *a*) $E(\text{Utilidad}) = E(\text{Ventas}) - E(\text{producción}) - E(\text{inventario})$
donde:
- $E(\text{Ventas}) = \frac{(5-N)}{5} \cdot C_2 \cdot N + \sum_{i=1}^{N} i \cdot C_2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{(N+1) \cdot N \cdot C_2}{2 \cdot 5} - \frac{N^2 \cdot C_2}{5} + N \cdot C_2$
- $E(\text{producción}) = N \cdot C_1$
- $E(\text{inventario}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{(N-i) \cdot C_3}{5} = \frac{C_3 \cdot N^2}{5} - \frac{(N+1) \cdot N \cdot C_3}{2 \cdot 5}$

De esta forma se obtiene:

$$E(\text{Utilidad}) = \frac{(N+1) \cdot N \cdot C_2}{2 \cdot 5} - \frac{N^2 \cdot C_2}{5} + N \cdot C_2 - N \cdot C_1 - \frac{C_3 \cdot N^2}{5} + \frac{(N+1) \cdot N \cdot C_3}{2 \cdot 5}$$

b) Ahora, para encontrar la cantidad óptima de producción se debe evaluar esta fución en cada uno de los posibles valores de N (no se puede derivar e igualar a 0 dado que la función encontrada no es continua). De esta forma se obtienen los siguientes valores:

- $N = 1 \Rightarrow E(\text{Utilidad}) = 6$
- $N = 2 \Rightarrow E(\text{Utilidad}) = 10$
- $N = 3 \Rightarrow E(\text{Utilidad}) = 12$
- $N = 4 \Rightarrow E(\text{Utilidad}) = 12$
- $N = 5 \Rightarrow E(\text{Utilidad}) = 10$

Así es como el productor debería estar indiferente entre producir $N = 3$ o $N = 4$ unidades.

■ **3.** *a*) Tenemos que:

$$\text{Ganancias}(X, r) = X + \sqrt{\tfrac{X\cdot(1+r)}{A}} - (1+\gamma)\cdot X$$

entonces:

$$\begin{aligned} E(\text{Ganancias}(X)) &= -\gamma\cdot X + \int_a^b \sqrt{\frac{X\cdot(1+r)}{A}}\cdot\frac{\partial r}{(b-a)} \\ &= -\gamma\cdot X + \frac{2\cdot\sqrt{X}\cdot((1+b)^{\frac{3}{2}} - (1+a)^{\frac{3}{2}})}{3\cdot\sqrt{A}\cdot(b-a)} \end{aligned}$$

Para encontrar X^*, la cantidad de inversión óptima, derivamos la expresión obtenida e igualamos a 0:

$$\begin{aligned} 0 &= -\gamma + \frac{((1+b)^{\frac{3}{2}} - (1+a)^{\frac{3}{2}})}{3\cdot\sqrt{A}\cdot(b-a)\cdot\sqrt{X}} \\ X^* &= \frac{((1+b)^{\frac{3}{2}} - (1+a)^{\frac{3}{2}})^2}{9\cdot A\cdot\gamma^2\cdot(b-a)^2} \end{aligned}$$

b) Entonces:

$$\begin{aligned} P[\text{ingresos} > \text{costos}] &= P[X^* + \sqrt{\frac{X^*\cdot(1+r)}{A}} > (1+\gamma)\cdot X^*] \\ &= P[\frac{X^*\cdot(1+r)}{A} > X^{*2}\cdot\gamma^2] \\ &= P[r > A\cdot X^*\cdot\gamma^2 - 1] \\ &= \frac{b - (A\cdot X^*\cdot\gamma^2 - 1)}{b-a} \end{aligned}$$

■ **5.** *a*) Si ya vendí esa cantidad de entradas, entonces mis ganancias serán:

$$\begin{aligned} B(x)|\text{quedan x} &= (N-x)\cdot C_2 + \sum_{k=0}^{\infty} E[\text{Utilidades}|\text{quedan x}|\text{llegan k personas a comprar}]\cdot q_k \\ &= (N-x)\cdot C_2 + \sum_{k=0}^{x} C_1 k\cdot q_k + \sum_{k=x+1}^{\infty} C_1 x\cdot q_k \end{aligned}$$

b) Hay que comparar las alternativas entre vender o no vender:

$$\begin{aligned} E[\text{Vender}] &= B(x-1) \\ E[\text{No vender}] &= B(x) \end{aligned}$$

Es importante notar que al decir que la esperanza de Vender es $B(x-1)$, se está considerando el ingreso adicional por la entrada extra vendida, como se ve en la siguiente expresión.

$$B(x-1) = (N-(x-1))\cdot C_2 + \sum_{k=0}^{x-1} C_1 \cdot k \cdot q_k + \sum_{k=x}^{\infty} C_1 \cdot (x-1) \cdot q_k = C_2 + (N-x)\cdot C_2 + \sum_{k=0}^{x-1} C_1 \cdot k \cdot q_k + \sum_{k=x}^{\infty} C_1 \cdot (x-1) \cdot q_k$$

c) Debemos resolver el siguiente problema de maximización:

$$\max_{N_e} \{ \sum_{i=0}^{N_e} B(N-i) \cdot p_i + \sum_{i=N_e+1}^{\infty} B(N-N_e) \cdot p_i \}$$

■ **6.** Para determinar x^*, el momento óptimo para citar al segundo paciente, seguiremos los pasos dados enumerados en el enunciado del problema.

a) Primero debemos calcular la probabilidad que, dado un x, el segundo paciente encuentre al dentista ocupado. Esto es equivalente a la probabilidad que la atención del paciente se demore más de x (x$\geq$ 0) unidades de tiempo. Es decir:

$$P_x[\text{Encontrar al dentista ocupado}] = \int_x^b \frac{\partial t}{(b-a)} = \frac{b-x}{(b-a)}$$

Vemos que no tiene sentido que $x > b$ dado que implica que con certeza el dentista estará libre. Tampoco tiene sentido un $x < a$ dado que con certeza el dentista estará ocupado.

b) Primero separemos los casos:

- Si encuentra al dentista ocupado la esperanza del tiempo restante de espera será:

$$E_x[\text{tiempo de espera}|\text{dentista ocupado}] = \int_x^b \frac{(t-x)\partial t}{(b-x)} = \frac{b-x}{2}$$

- Si encuentra al dentista desocupado la esperanza del tiempo restante de espera será:

$$E_x[\text{tiempo de espera}|\text{dentista desocupado}] = 0$$

Entonces, combinando los dos resultados anteriores, tenemos que:

$$\begin{aligned} E_x[\text{tiempo de espera}] &= E_x[\text{tiempo de espera}|\text{dentista desocupado}] \cdot P_x[\text{dentista desocupado}] \\ &\quad + E_x[\text{tiempo de espera}|\text{dentista ocupado}] \cdot P_x[\text{dentista ocupado}] \\ E_x[\text{tiempo de espera}] &= \frac{b-x}{b-a} \cdot \frac{b-x}{2} = \frac{(b-x)^2}{2\cdot(b-a)} \end{aligned}$$

c) Claramente el dentista estará en el consultorio hasta que termine la atención del segundo paciente:

$$\begin{aligned} E_x[\text{Tiempo del dentista en consulta}] &= x + E_x[\text{tiempo de espera}] + E_[\text{tiempo de atención}] \\ &= x + \frac{(b-x)^2}{2\cdot(b-a)} + \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

d) Entonces el problema de minimización a enfrentar será el siguiente:

$$\min_{0\leq x\leq b} M \cdot [x + \frac{(b-x)^2}{2\cdot(b-a)} + \frac{a+b}{2}] + P \cdot [\frac{(b-x)^2}{2\cdot(b-a)}]$$

Si derivamos e igualamos a 0 tenemos que:

$$x^* = b - \frac{M\cdot(b-a)}{M+P}$$