Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey
Aux: G. Cuevas, J. Gacitúa, R. Szederkenyi

CTP 1

Miércoles 13 de Agosto de 2008

Una fábrica produce ampolletas y las distribuye en cajas de U unidades. Cada ampolleta puede salir en calidad *normal* con probabilidad p o *deficiente* con probabilidad $(1-p)$. Una vez instaladas, las ampolletas de tipo *normal* duran un tiempo exponencialmente distribuido de parámetro $\lambda_n \frac{1}{[hora]}$ antes de fallar mientras que las de tipo *deficiente* lo hacen en un tiempo exponencialmente distribuido de parámetro $\lambda_d \frac{1}{[hora]}$.

1. (1 punto) Determine la distribución del número de ampolletas *deficientes* en una caja cualquiera.

   Sea N una v.a. que representa el número de ampolletas deficientes en una caja cualquiera. Se tiene:

$$N \rightsquigarrow Binomial(U, 1-p)$$

2. (1 punto) Las U ampolletas de una caja se instalaron hace 1 hora y están todas funcionado. Si en esta caja había i ampolletas *deficientes*, calcule la probabilidad que una ampolleta *normal* falle antes que una *deficiente*.

   Dada la pérdida de memoria de las distribuciones exponenciales, podemos obviar la hora de funcionamiento que ya llevan las ampolletas.

   Sea,

   - Y el conjunto de ampolletas deficientes. ($|Y| = i$)
   - X el conjunto de ampolletas normales. ($|X| = U - i$)
   - T_k tiempo en fallar la ampolleta k.

   Buscamos entonces,

$$P_i = P(min\,\{T_j\}_{j\in X} \leq \{minT_k\}_{k\in Y}) = \frac{(U-i)\lambda_n}{(U-i)\lambda_n + i\lambda_d}$$

3. (2 puntos) Para una caja cualquiera, calcule la probabilidad que una ampolleta normal falle antes que una deficiente.

   Condicionamos sobre el número de ampolletas deficientes en la caja. La probabilidad buscada es

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=0}^{U} P_i \cdot P(i \text{ ampolletas deficientes}) \\ &= \sum_{i=0}^{U} \frac{(U-i)\lambda_n}{(U-i)\lambda_n + i\lambda_d} \cdot \binom{U}{i} (1-p)^i p^{U-i} \end{aligned}$$

4. (2 puntos) Se acaban de instalar simultáneamente U ampolletas *normales*. En promedio, ¿en cuántas horas más habrán fallado todas?

   La estrategia es calcularle la esperanza a una v.a. de la forma

$$X = \sum_{i=0}^{U-1} X_i$$

   X_i representa el tiempo que demora en fallar la primera de $(U-i)$ ampolletas

$$X_i \rightsquigarrow exp((U-i)\lambda_n)$$

   Ya que la exponencial sufre perdida de memoria, el tiempo esperado que se busca es directamente $E[X]$,

$$E[X] = \sum_{i=0}^{U-1} \frac{1}{(U-i)\lambda_n}$$

Bonus (0.5 puntos):

Responda todas las preguntas anteriores, considerando que U es una v.a. Poisson de tasa μ.

Todo se resuelve condicionando sobre $U \rightsquigarrow Poisson(\lambda)$

1. Sea N el numero de ampolletas defectuosas en una caja.

$$P(N = i) = \sum_{j=1}^{\infty} \binom{j}{i} (1-p)^j p^{j-i} \cdot P(U = j)$$

2. Sabemos que había i ampolletas deficientes, pero el número total de ampolletas, U, es aleatorio. Condicionamos sobre U.

$$P_i = \sum_{j=i}^{\infty} \frac{(j-i)\lambda_n}{(j-i)\lambda_n + i\lambda_d} \cdot P(U = j)$$

3. Calculamos condicionando sobre U,

$$P = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{j} \frac{(j-i)\lambda_n}{(j-i)\lambda_n + i\lambda_d} \cdot \binom{j}{i} (1-p)^i p^{j-i} \cdot P(U = j)$$

4.

$$E[X] = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{(j-i)\lambda_n} \cdot P(U = j)$$