Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey
Aux: J.Gacitúa, D. Wilson, R.Wolf

# Pauta CTP 1

Miércoles 8 de Agosto de 2007

1. Sean $t_i$, $i = 1, .., 8$ los tiempos de los 8 corredores, por lo tanto buscamos

$$P(\textit{Gana el competidor del carril 5}) = (P(t_5 < min\left\{\{t_i\}_{i=1}^{8} \setminus \{t_5\}\right\})$$

Sabemos $t_i \rightsquigarrow exp(\lambda)$, y además $min\left\{\{t_i\}_{i=1}^{8} \setminus \{t_5\}\right\} \rightsquigarrow exp(7\lambda)$, por lo tanto ocupando el resultado conocido para "carrera de exponenciales".

$$P(\textit{Gana el competidor del carril 5}) = \frac{\lambda}{\lambda + 7\lambda} = \frac{1}{8}$$

También se puede argumentar que ante una carrera limpia, la probabilidad de que gane cualquier competidor es la misma, independiente del carril en el cual participe. Como hay 8 corredores en la final, la probabilidad de ganar para cualquier competidor es $\frac{1}{8}$ en particular,

$$P(\textit{Gana el competidor del carril 5}) = \frac{1}{8}$$

2. Desde ahora llamaremos a los atletas lícitos como "tipo 1" y a los dopados como "tipo 2". Si hay s corredores tipo 2, entonces necesariamente habrán 8-s tipo 1. En ese caso, tendremos $s$ corredores cuyos tiempos se distribuirán $exp(\lambda_d)$ y $8 - s$ corredores cuyo tiempo se distribuirá $exp(\lambda)$. Buscamos

$$E(t_{\textit{primer lugar}} | \textit{s corredores tipo 2}) = E(min\,\{t_i]_{i=1}^{8}\, | \textit{s corredores tipo 2})$$

Ocupando un resultado conocido en clase, podemos adelantar

$$(min\,\{t_i\}_{i=1}^{8}\, | \textit{s corredores tipo 2}) \rightsquigarrow exp(s\lambda_d + (8 - s)\lambda)$$

Con esta información concluímos,

$$E(t_{\textit{primer lugar}} | \textit{s corredores tipo 2}) = \frac{1}{s\lambda_d + (8 - s)\lambda}$$

3. Buscamos

$$P = P(\textit{Al menos un competidor ilícito en el podio}) = 1 - P(\textit{Ningún competidor tipo 2 en el podio})$$

Para el caso $s = 0$ la probabilidad buscada toma valor 0, mientras que en los casos $s = 6, 7, 8$ la probabilidad será 1. Consideremos los casos $s \in \{1, .., 5\}$

Supongamos sin pérdida de generalidad que los atletas de los primeros s carriles son tipo 2. Se construyen las siguientes v.a.:

$T_1^i$ : *Tiempo que tarda en llegar el i-ésimo corredor tipo 1, luego de que ya llegó el (i-1)-ésimo.*

$T_2^j$ : *Tiempo que tarda en llegar el j-ésimo corredor tipo 2, luego de que ya llegó el (j-1)-ésimo.*

$$\begin{aligned} T_1^i &\rightsquigarrow exp((8 - s - (i - 1)\lambda) \\ T_2^j &\rightsquigarrow exp((s - (j - 1))\lambda_d) \end{aligned}$$

La probabilidad que estamos buscando exije que los primeros tres puestos correspondan a corredores incluídos en los tiempos $T_1^1, T_1^2, T_1^3$. La probabilidad de ello tomará la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
Q &= P(\textit{Ningún competidor tipo 2 en el podio}) \\
&= P(T_1^3 + T_1^2 + T_1^1 < T_2^1 | T_1^2 + T_1^1 < T_2^1, T_1^1 < T_2^1) \cdot P(T_1^2 + T_1^1 < T_2^1, T_1^1 < T_2^1) \\
&= P(T_1^3 + T_1^2 + T_1^1 < T_2^1 | T_1^2 + T_1^1 < T_2^1, T_1^1 < T_2^1) \cdot P(T_1^2 + T_1^1 < T_2^1 | T_1^1 < T_2^1) \cdot P(T_1^1 < T_2^1) \\
&= P(T_1^3 + T_1^2 + T_1^1 < T_2^1 | T_1^2 + T_1^1 < T_2^1, T_1^1 < T_2^1) \cdot P(T_1^2 < T_2^1) \cdot P(T_1^1 < T_2^1) \\
&= P(T_1^3 < T_2^1) \cdot P(T_1^2 < T_2^1) \cdot P(T_1^1 < T_2^1) \\
&= \frac{(8-s-2)\lambda}{(8-s-2)\lambda + s\lambda_d} \cdot \frac{(8-s-1)\lambda}{(8-s-1)\lambda + s\lambda_d} \cdot \frac{(8-s)\lambda}{(8-s)\lambda + s\lambda_d}
\end{aligned}$$

Todo este análisis se basa en el hecho que la exponencial sufre pérdida de memoria. Cuando llega un competidor a la meta, el tiempo del resto de los competidores se distribuirá idénticamente a si la carrera estuviese recién comenzando para ellos, independiente del pasado. Los 3 términos fraccionarios aparecen gracias al resultado conocido de “carrera de exponenciales”.

Finalmente,

$$P = 1 - Q$$

4. *a*) Sea N v.a. que representa el número de atletas tipo 2 al comenzar la competencia. Como cada uno de los 8 atletas decide ser tipo 2 con probabilidad $p$, independiente del resto, tenemos

$$N \rightsquigarrow \textit{Binomial}(8, p)$$

$$P(\textit{s corredores tipo 2}) = P(N = s) = \binom{8}{s} p^s (1-p)^{8-s} \quad , s = 0, .., 8$$

.

*b*) Lo que se pide es

$$P(\textit{Primer lugar bate el récord}) = P(t_{\textit{primer lugar}} < 10,08)$$

sin embargo, no sabemos el número de atletas tipo 2 que se presentarán a la carrera, debemos condicionar según aquél número, luego.

$$P(t_{\textit{primer lugar}} < 10,08) = \sum_{s=0}^{8} P(t_{\textit{primer lugar}} < 10,08 | N = s) \cdot P(N = s)$$

Gracias a lo descubierto en la parte (2),

$$P(t_{\textit{primer lugar}} < 10,08 | N = s) = 1 - e^{-(s\lambda_d + (8-s)\lambda)10,08}$$

Finalmente,

$$P(\textit{Primer lugar bate el récord}) = \sum_{s=0}^{8} \left[ \left(1 - e^{-(s\lambda_d + (8-s)\lambda)10,08}\right) \cdot \binom{8}{s} p^s (1-p)^{8-s} \right]$$

*c*) La probabilidad de que el test salga positivo es equivalente a pedir que el primer lugar sea un atleta tipo 2. Buscamos

$$P(\textit{1er lugar es tipo 2})$$

Sin embargo, no conocemos cuántos atletas tipo 2 hay en carrera, por lo tanto debemos condicionar sobre este hecho.

$$P(\textit{1er lugar es tipo 2}) = \sum_{s=0}^{8} P(\textit{1er lugar es tipo 2} | N = s) \cdot P(N = s)$$

$$P_0 = P(\textit{1er lugar es tipo 2}|N=0) = 0$$

$$P_8 = P(\textit{1er lugar es tipo 2}|N=8) = 1$$

Consideremos los casos $s = 1, .., 7$. Supongamos sin pérdida de generalidad que los atletas de los primeros $s$ carriles son tipo 2. Definimos entonces las siguientes v.a.

$$\begin{array}{ll} T_1 = min\,\{t_i\}_{i=s+1}^{8} & T_1 \rightsquigarrow exp((8-s)\lambda) \\ T_2 = min\,\{t_i\}_{i=1}^{s} & T_2 \rightsquigarrow exp(s\lambda_d) \end{array}$$

Tendremos entonces que para $s = 1, .., 7$

$$\begin{aligned} P_s = P(\textit{1er lugar es tipo 2}|N=s) &= P(T_2 < T_1 | N = s) \\ &= \frac{s\lambda_d}{s\lambda_d + (8-s)\lambda} \end{aligned}$$

Concluímos,

$$P(\textit{1er lugar es tipo 2}) = \sum_{s=0}^{8} P_s \cdot P(N=s)$$

Dudas y/o errores:
Jaime Gacitúa C.
jgacitua@ing.uchile.cl