Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Profs: R. Epstein, P. Rey
Aux: G. Cuevas, J. Gacitua, R. Szederkenyi

Solución Auxiliar 9

Martes 9 de Septiembre de 2008

Problema 1

1. El modelo de programación dinámica estocástica es el siguiente:

   - Etapas:

     Cada uno de los paraderos, $k \in \{1,...,K\}$

   - Estados:

     Y_k = Número de pasajeros en el bus antes de parar (o no) en el paradero k.

   - Decisión:

     $$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si se detiene en el paradero } k \\ 0 & \sim \end{cases}$$

   - Variable aleatoria:

     ω_k = Número de personas que desean subirse en el paradero k.

   - Recurrencia:

     $$Y_{k+1} = X_k \cdot \text{mín}\{C, Y_k + \omega_k\} + (1 - X_k) \cdot Y_k$$

   - Función de Beneficios:

     Para los k paraderos, con $k \in \{1,...,K\}$, la función de beneficios toma la siguiente forma:

     $$V_k(Y_k, X_k) = X_k \left[-D + \sum_{j=0}^{\infty} \left[P_k \cdot \text{mín}\{C - Y_k, j\} + V^*_{k+1}(\text{mín}\{C, Y_k + j\}) \right] \cdot S_j \right] + \\ + (1 - X_k) \cdot \left[-C_{inf}(1 - S_0) \cdot P_{parte} + V^*_{k+1}(Y_k) \right]$$

     Y la función óptima corresponde a:

     $$V^*_k(Y_k) = \text{máx}_{X_k} \{V_k(Y_k, X_k)\}$$

   - Condiciones de borde:

     $Y_1 = 0$

     Para el último paradero sólo recibimos un bono si llegamos con el bus lleno. La esperanza de este valor se calculará en el paríodo K, al multiplicar por las probabilidades respectivas del número de pasajeros requeridos la función de beneficios V^*_{K+1}. Además no consideraremos el costo de parar acá ya que es un costo fijo.

     $$V^*_{K+1}(Y_{K+1}) = \begin{cases} F & \text{si } Y_{K+1} = C \\ 0 & \sim \end{cases}$$

2. Consideremos la tabla para el último período:

   Período 10:

Y_{10}	0	1	X_{10}^*	V_{10}^*
30	3110	3000	0	3110
29	-1890	2950	1	2950
28	-1890	1200	1	1200
27	-1890	-1300	1	-1300

   Período 9:

Y_9	0	1	X_9^*	V_9^*
30	1220	1110	0	1220
29	1060	4644	1	4644
28	-690	1555	1	1555
27	-3190	525	1	525

   Período 8:

Y_8	0	1	X_8^*	V_8^*
29	2574	12,4	0	2574
28	-335	1323,1	1	1323,1
27	-1365	1696,5	1	1696,5

   Período 7:

Y_7	0	1	X_7^*	V_7^*
27	$-193,5$	685,89	1	685,89

   La estrategia óptima de detenciones es la siguiente:

   - Detenerse en el paradero 7.
   - Si se llega con menos de 29 personas al paradero 8, detenerse. Si no, seguir de largo.
   - En el paradero 9 y 10 detenerse sólo si no tiene las 30 personas en el bus.

Problema 2

Notación: $N(t)$: Número de contenedores que han llegado al aeropuerto hasta t (PPH tasa λ)

1. Claramente, dado que hay m contenedores en total, la distribucin del número de contenedores fraudulentos es una binomial de parámetros m y p_f. Luego, si denotamos $p_k(m)$ a la probabilidad que nos piden, tenemos:

$$p_k(m) \quad = \quad \binom{m}{k} p_f^k \cdot (1-p_f)^{m-k}$$

2. Llamemos q_m a la probabilidad que nos piden. Para calcularla se distinguen dos casos para m,

   Caso $m < N$:

   En este caso se necesita que hayan llegado exáctamente m contenedores en las T horas desde que se realizó la última inspección. Luego,

$$q_m = P[N(T) = m] = \frac{(\lambda T)^m \cdot e^{-\lambda T}}{m!}$$

   Caso $m = N$:

   En este caso se necesita que hayan llegado a lo menos N contenedores en las T horas desde que se realizó la última inspección. Luego,

$$q_N = P[N(T) \geq N] = \sum_{j=N}^{\infty} P[N(T) = j] = \sum_{j=N}^{\infty} \frac{(\lambda T)^j \cdot e^{-\lambda T}}{j!}$$

3. Debe condicionarse en el número de contenedores en la inspección. Luego,

$$E[Fraudulentos] = \sum_{m=0}^{N} E[Fraudulentos/m] \cdot q_m$$

   Además, como se vió en la parte 1, la distribución condicional del número de contenedores fraudulentos es una binomial. Luego,

$$E[Fraudulentos/m] = m \cdot p_f$$

   Finalmente,

$$E[Fraudulentos] = \sum_{m=0}^{N} m \cdot p_f \cdot q_m = p_f \cdot \sum_{m=0}^{N} m \cdot q_m$$

4. Llamemos p_{ni} a la probabiliadad de no ser inspeccionado. Para calcularla debe condicionarse en el instante de llegada del contenedor. Entonces, dado que el contenedor llegó en τ, donde τ es el tiempo que hemos condicionado, la probabilidad de que no sea inspeccionado equivale a la probabilidad de que la bodega esté llena en τ. Luego,

$$p_{ni}/\tau = P[N(\tau) \geq N] = \sum_{j=N}^{\infty} P[N(\tau) = j] = \sum_{j=N}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^j \cdot e^{-\lambda\tau}}{j!}$$

   Para descondicionar se utiliza la distribución condicional del instante de llegada. En este caso τ distribuye uniforme entre 0 y T. Luego,

$$p_{ni} = \int_0^T p_{ni}/\tau \cdot \frac{1}{T} d\tau$$

   Para utilizar el *Hint* consideremos el siguiente proceso:

   $N_{ni}(t)$: Número de contenedores fraudulentos que han llegado al aeropuerto hasta t y no han sido inspeccionados (PPH tasa $\lambda \cdot p_f \cdot p_{ni}$)

   Por lo que el número esperado de contenedores no revisados por inspeccón será:

$$E[N_{ni}(T)] = \lambda \cdot p_f \cdot p_{ni} \cdot T$$