Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN44A: Investigación Operativa
Prof. : R. Caldentey, R. Epstein, P. Rey
Aux. : O. Aravena, J. Gacitúa, L. Valdés,
D. Wilson

Pauta Control 1
17 de Abril de 2008

Problema 1

Considere el siguiente juego de azar. Se cuenta con un bolillero con N bolillas numeradas de 1 a N. Se extraen, sin reposición, K bolillas ($K < N$). Hay dos posibilidades de apuesta

- Apuesta común: en la cartilla se seleccionan K números entre 1 y N.
- Apuesta especial: en la cartilla se seleccionan $K + 1$ números entre 1 y N.

Cada apuesta común tiene un costo C y mientras que cada apuesta especial tiene un costo $(K + 1) \times C$.

Una vez realizado el sorteo, por cada cartilla se pueden recibir los siguientes premios:

- Primer premio: Si se acierta a los K números sorteados se recibe un premio de valor P por cada cartilla.
- Segundo premio: Si se acierta a $K - 1$ de los números sorteados. En el caso de una apuesta simple, se recibe un premio de valor S. Para una apuesta especial, el premio es de valor $m \times S$.

1. (2,0 puntos) ¿Cuál es el valor esperado de una apuesta común?

   Para calcular este valor esperado debemos calcular las probabilidades de obtener premios con una apuesta común.

   La probabilidad de obtener un primer premio es igual a $\frac{1}{\binom{N}{K}}$, mientras que la probabilidad de obtener un segundo premio es $\frac{K(N-K)}{\binom{N}{K}}$. Además, si se obtiene un premio se obtiene solo uno.

   Por lo tanto, el valor esperado de la apuesta simple es igual a $\frac{P+K(N-K)S}{\binom{N}{K}}$.

2. (2,0 puntos) ¿Cuál es el valor esperado de una apuesta especial?

   En este caso, la probabilidad de obtener un primer premio es igual a $\frac{K+1}{\binom{N}{K}}$. La probabilidad de obtener el segundo premio es $\frac{\binom{K+1}{K-1}(N-K-1)}{\binom{N}{K}} = \frac{(K+1)K(N-K-1)}{2\binom{N}{K}}$. Nuevamente, si se obtiene un premio se obtiene solo uno.

   Por lo tanto, el valor esperado de la apuesta especial es igual a

   $$\frac{(K+1)P + (K+1)K(N-K-1)mS/2}{\binom{N}{K}} = (K+1)\frac{P + K(N-K-1)mS/2}{\binom{N}{K}}.$$

3. Considere que N es suficientemente grande (en relación a K) para que se puedan escoger $K+1$ apuestas simples que no repiten números.

(a) (1,0 punto) Calcule el valor de m que hace que, en valor esperado, sea indiferente realizar una apuesta especial o $K+1$ apuestas simples que no repiten números?

De acuerdo a lo calculado en los puntos anteriores, m debería satisfacer:

$$(K+1)\frac{P+K(N-K)S}{\binom{N}{K}} = (K+1)\frac{P+K(N-K-1)mS/2}{\binom{N}{K}},$$

es decir, $P+K(N-K)S = P+K(N-K-1)mS/2$, y por lo tanto $m = 2(N-K)/(N-K-1)$.

(b) (1,0 punto) Suponga que m tiene el valor del punto anterior. Si Ud. es adverso al riesgo, ¿qué prefiere, jugar una apuesta especial o $K+1$ apuestas simples que no repiten números? Justifique intuitivamente.

Debería preferir jugar las $K+1$ apuestas "disjuntas" porque tienen menor variabilidad.

Para verificar esto comparamos las varianzas. Sea X el premio a recibir si se realizan $K+1$ apuestas simples sin repetir números e Y, el premio a recibir por una apuesta especial. Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Y)-\mathrm{Var}(X) &= \left(E[Y^2]-(E[Y])^2\right)-\left(E[X^2]-(E[X])^2\right) \\
&= E[Y^2]-E[X^2] \\
&= \frac{K+1}{\binom{N}{K}}\left(P^2+K(N-K-1)(m^2S^2/4)-(P^2+K(N-K)S^2)\right) \\
&= \frac{(K+1)KS^2}{\binom{N}{K}}\left((N-K-1)(m^2/4)-(N-K)\right) \\
&= \frac{(K+1)KS^2}{\binom{N}{K}}\left((N-K-1)\frac{(N-K)^2}{(N-K-1)^2}-(N-K)\right) \\
&= \frac{(N-K)(K+1)KS^2}{\binom{N}{K}}\left(\frac{N-K}{N-K-1}-1\right) \\
&> 0\,.
\end{aligned}$$

Problema 2

Un fabricante de alimento para animales está analizando la compra de maíz para el próximo año. Su proveedor nacional habitual le ofrece la alternativa de realizar una compra anticipada (antes de la cosecha) por un total de 10.000 toneladas a 150 millones de pesos o esperar a la cosecha y comprar lo que necesite al precio de mercado del momento.

El precio de mercado esperado depende del resultado de la cosecha (Buena o Mala) y del nivel de demanda (Alta o Baja), como se muestra en la tabla en miles de pesos por tonelada:

	Nivel de demanda	
Cosecha	Alta	Baja
Buena	17	9
Mala	20	12

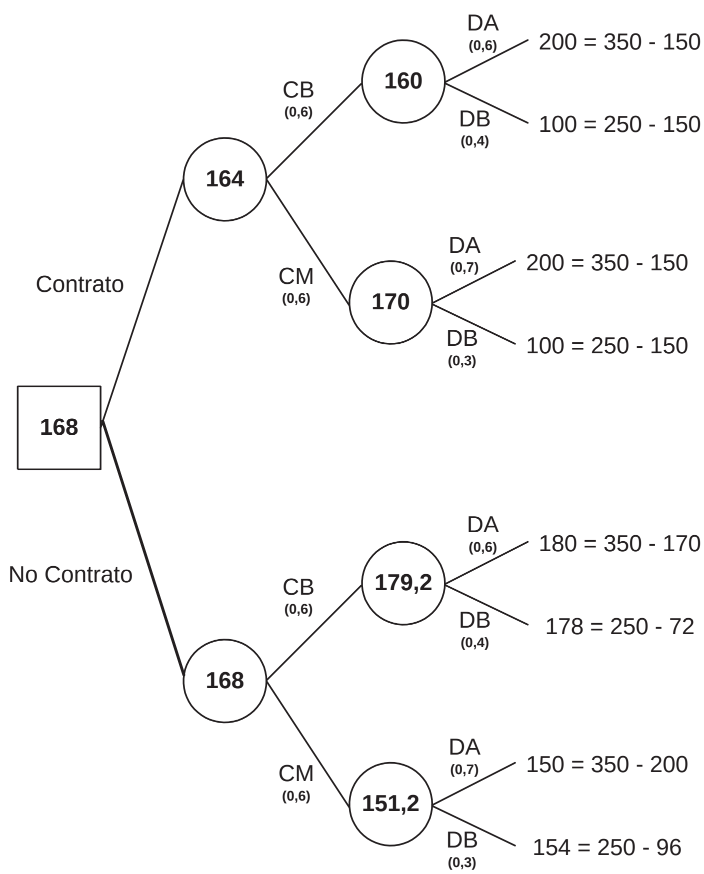
Se ha observado, que el nivel de la demanda por maíz está correlacionado con la demanda por alimentos que enfrenta la empresa lo que influye tanto en los ingresos como en la cantidad de insumos requerida. En un año de demanda Alta, se utilizan completamente las 10 mil toneladas y se estima un beneficio (sin contar el costo del maíz) de 350 millones de pesos. En un año de demanda Baja, se consumen sólo 8.000 toneladas de maíz para producir un beneficio de 250 millones de pesos. El maíz sobrante, si hay, se pierde.

Con la información que se cuenta actualmente se espera una cosecha Buena con probabilidad 0,6.

En caso de una cosecha Buena, se espera que la demanda sea Alta en el 60% de los casos; mientras que para una temporada de cosecha Mala se espera que la demanda sea Alta en el 70% de los casos.

1. (3 puntos) Plantee y resuelva un árbol de decisiones que le permita determinar si le conviene aceptar el contrato con el proveedor o esperar hasta la cosecha para comprar.

   Representando a los eventos "Cosecha Buena" y "Cosecha Mala" por 'CB' y 'CM', respectivamente y a "Demanda Alta" y "Demanda Baja", por 'DA' y 'DB', respectivamente, el árbol que resulta se ve en la figura (los valores en las hojas están en millones de pesos):



Un analista le ofrece mejor información sobre la cosecha que se espera. Este le propone realizar un estudio que puede tener como resultados Abundante o Escasa. Se sabe que el 80% de las veces que la cosecha resultó Buena, el analista había indicado Abundante, mientras que en el 70% de los casos que la cosecha resultó Mala, el analista había indicado Escasa.

2. (3 puntos) ¿Cuál es el valor de la información provista por el analista?

   Para calcular el valor de la información provista por el analista, vamos a plantear un árbol que incluya los resultados de su análisis. Para esto, se necesitan las probabilidades de que la cosecha sea buena o mala, condicionada en la información del analista y las probabilidades de que el analista prediga una cosecha “Abundante” o “Escasa”.

   Es decir, las probabilidades que necesitamos y no tenemos son $P(\text{Abundante})$, $P(\text{CB}|\text{Abundante})$ y $P(\text{CB}|\text{Escasa})$:

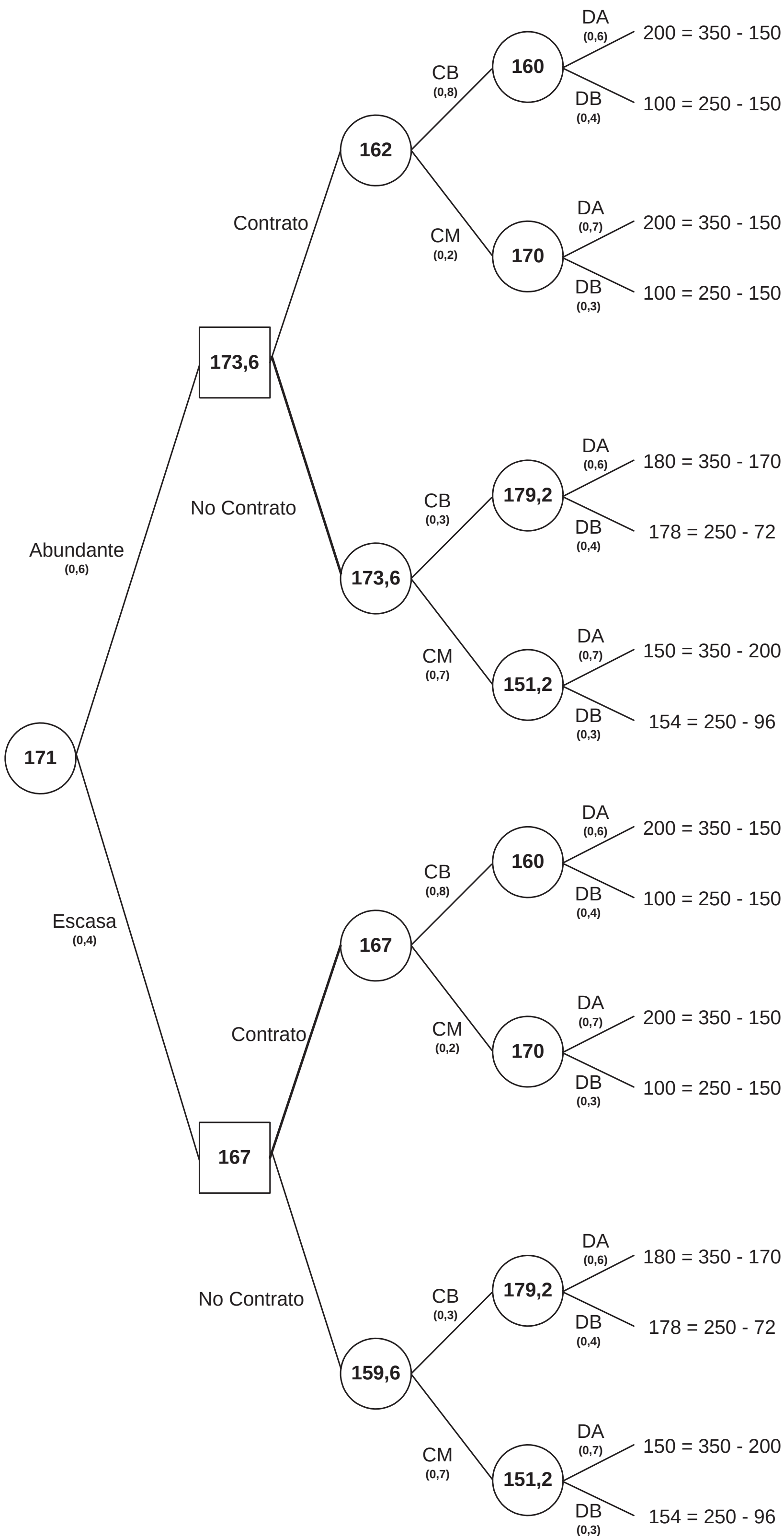
$$\begin{aligned} P(\text{Abundante}) &= P(\text{Abundante}|\text{CB})P(\text{CB}) + P(\text{Abundante}|\text{CB})P(\text{CB}) \\ &= 0{,}8 \times 0{,}6 + 0{,}3 \times 0{,}4 \\ &= 0{,}6\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{CB}|\text{Abundante}) &= \frac{P(\text{Abundante}|\text{CB})P(\text{CB})}{P(\text{Abundante})} \\ &= \frac{0{,}8 \times 0{,}6}{0{,}6} \\ &= 0{,}8\,; \end{aligned}$$

   y

$$\begin{aligned} P(\text{CB}|\text{Escasa}) &= \frac{P(\text{Escasa}|\text{CB})P(\text{CB})}{P(\text{Escasa})} \\ &= \frac{0{,}2 \times 0{,}4}{0{,}4} \\ &= 0{,}2\,. \end{aligned}$$

   Una vez calculadas las probabilidades, podemos plantear y resolver el ’arbol asociado a esta parte, que se muestra en la figura:



De los valores finales, podemos calcular que lo máximo que estaría dispuesto es $171 - 168 = 3$ millones de pesos.

Problema 3

Una empresa de transportes cuenta con dos locales y con una flota de N vehículos idénticos para atender las solicitudes de sus clientes. Cada solicitud, cuando atendida, mantiene ocupado un vehículo por el día completo.

Cada día la empresa enfrenta, en cada local, una demanda incierta. pero de la cual se conoce su distribución de probabilidades. Se sabe que el día t, el local 1 recibirá exactamente k solicitudes con probabilidad $p_t(k)$, mientras que el local 2 recibirá exactamente k solicitudes con probabilidad $q_t(k)$.

La empresa recibe un ingreso de valor I por cada pedido que puede atender. Cada pedido fuera de su capacidad se pierde. Movilizar un vehículo del local 1 al local 2, de un día para el otro, tiene un costo C_{12}, mientras que trasladar un vehículo del local 2 al local 1, tiene un costo C_{21}. Inicialmente, todos los vehículos están en el local 1.

Plantee un modelo de programación dinámica estocástica que permita determinar cómo distribuir los vehículos en los locales cada día para un horizonte de T días, de manera de maximizar el beneficio total esperado durante este período.

Solución

Un modelo para determinar la distribución de vehículos podría ser el siguiente.

Etapas

Cada uno de los días: $t = 1, \dots, T$.

Variables de Estado

Debemos saber cuántos vehículos hay en cada local. Para esto, basta con saber cuántos hay en el local 1: el resto están en el local 2.

Siendo así, definimos s_t como el número de vehículos en el local 1 el día $t-1$. s_1 será el número de vehículos en el local 1 al inicio del análisis.

Variables de Decisión

Las decisiones a tomar corresponden a cúntos vehículos tener disponibles en cada local para cada día.

De esta manera, definimos x_t como el número de vehículos a tener disponibles en local 1 el día t.

Obs. También se puede realizar un modelo cuyas variables de decisión sean cuántos vehículos mover de un local para el otro, en cada día.

Variables Aleatorias

Las demandas que se observan son aleatorias. Hay una demanda para cada local para cada día. Entonces definimos las variables d_t^i como la demanda para el local i el día t.

La distribución de d_t^1 está dada por $P(d_t^1 = k) = p_t(k)$, mientras que la distribución de d_t^2 está dada por $P(d_t^2 = l) = q_t(l)$.

Recurrencias

Las variables de estado se actualizan de acuerdo a las siguiente recurrencia: $s_{t+1} = x_t$.

Función de Beneficio Acumulado

$$\begin{aligned} V_t(s_t, x_t) &= \mathbb{E}_{d_t^1, d_t^2}\left[I\Big(\min\{x_t, d_t^1\} + \min\{N - x_t, d_t^2\}\Big) - C_{12}\max\{x_t - s_t, 0\} - C_{21}\min\{s_t - x_t, 0\} + V_{t+1}^*(x_t)\right] \\ &= I\left(\sum_{k=0}^{x_t} kp_t(k) + \sum_{l=0}^{N-x_t} lq_t(l)\right) - C_{12}\max\{x_t - s_t, 0\} - C_{21}\min\{s_t - x_t, 0\} + V_{t+1}^*(x_t) \end{aligned}$$

donde

$$V_t^*(s_t) = \max\{V_t(s_t, x_t) : 0 \leq x_t \leq N,\ \text{entero}\}\,.$$

Condiciones de Borde

El estado inicial es $s_1 = N$ y no hay valor residual para la configuración final: $V_{T+1}(\cdot) \equiv 0$.