Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

Auxiliar Nº 5
IN41A – Introducción a la Economía

Profesores : Leonardo Basso
Auxiliar : Sebastián Fuentes, Diego Miranda
Fecha : Martes 2 de Septiembre de 2008

Problema 1
Considere que la función de producción de un determinado implemento para ski está dada por:

$$F_i\,(K_i\,,L_i) = A_i\,K_i^{1/2}\,L_i^{1/2}$$

donde A_i es un parámetro de productividad inherente a la tecnología de la firma i.

a) Demuestre que esta función de producción satisface el supuesto de productividad marginal decreciente.
b) Calcule la función de costos de corto plazo y la función de oferta de corto plazo de la firma i. Para ello, suponga que cada firma posee una cantidad fija de capital igual a K*, que el precio por unidad de trabajo es w y el precio por unidad de capital es r.
c) Suponga que esta industria está compuesta por 5 firmas localizadas en Santiago y 5 en Valparaíso. Dado que en Valparaíso no hay nieve para esquiar, los productores ubicados allá venden toda su producción en Santiago. Sin embargo para ello deben incurrir en un costo de transporte de \$ t por unidad. Encuentre y grafique la función de oferta de este producto en la ciudad de Santiago. Para ello suponga que r = w = K* = 1, $A_{STGO} = 1$ y $A_{VALPO} = 2$.
d) ¿Cómo cambia la elasticidad precio de la oferta frente a un cambio en el costo de transporte del producto? Explique.

Respuesta:

a)
$$F = AK^{1/2}L^{1/2} = q$$
$$F_L = AK^{1/2}\frac{1}{2}L^{-1/2} = \frac{1}{2}A\left(\frac{K}{L}\right)^{1/2}$$

Como la productividad marginal es decreciente, se cumple el supuesto. (El análisis para K es equivalente).

b)
$$q = AK^{1/2}L^{1/2}$$
$$L = \left[\frac{q}{AK^{1/2}}\right]^2 = \frac{q^2}{A^2K}$$
$$C(q) = w\frac{q^2}{A^2K} + rK$$

Notar que el mínimo de los costos variables medios se encuentra en q = 0, luego para todo q, la función de oferta de la firma será igual al costo marginal.
La oferta individual es por lo tanto:

$$P = \frac{2wq}{A^2K}$$

c) El costo marginal de las firmas de Valparaíso es:

$$CMg = \frac{2wq}{A^2K} + t$$

Como nuevamente el costo medio mínimo se da en *q=0*, la función de oferta de las firmas de Valparaíso es:

$$P = \frac{2wq}{A^2K} + t \text{ para cualquier q.}$$

Reemplazando los parámetros, se tiene que la oferta de una firma de Santiago y Valparaíso es respectivamente:

$$P = 2q_i^S$$
$$P = \frac{q_i^V}{2} + t$$

Agregando las 5 firmas de cada ciudad se tiene que la oferta de las firmas de cada ciudad es:

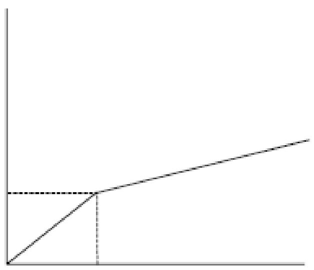
$$Q^S = \frac{5}{2}P$$
$$Q^V = 10(P - t)$$

La oferta de las firmas de Valparaíso está definida sólo para precios mayores que t, por ende la oferta agregada se debe expresar por partes:

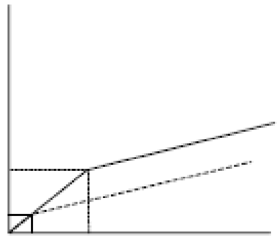
$$Q = Q^S \text{ si P<t}$$
$$Q = Q^S + Q^V \text{ si } P \geq t$$

Es decir, la oferta agregada es:

$$Q = \frac{5}{2}P \text{ si P<t}$$
$$Q = \frac{5}{2}P + 10(P - t) = \frac{25}{2}P - 10t \text{ si } P \geq t$$



d) El gráfico muestra la función de oferta agregada para t = t1 (línea entera) y t = t2 < t1 (línea discontinua):



Para P menor que t2:

La elasticidad es la misma.

Para P entre t1 y t2:

La elasticidad de la oferta con t = t1 es:

$$\eta = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q} = \frac{5}{2}\frac{P}{\frac{5}{2}P} = 1$$

La elasticidad de la oferta con t = t2, en un precio entre t1 y t2 es:

$$\eta = \frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q} = \left[\frac{25}{2}\right]\frac{P}{\frac{25}{2}P - 10t_2} > 1 \quad \forall t_2 > 0$$

Luego, la oferta para t2<t1 es más elástica en el rango de precios entre t1 y t2.
Este resultado es intuitivo en el sentido de que la oferta más elástica será aquella en la cual estén ofreciendo las firmas de Valparaíso y las de Santiago.

Para P>t2

$$\eta_i = \frac{25}{2}\frac{P}{(25P/2 - 10t_i)}$$

$$\frac{d\eta_i}{dt_i} = \frac{250P}{2}\frac{P}{(25P/2 - 10t_i)^2} > 0$$

Es, decir, en este caso la oferta más elástica es aquella con el costo de transporte mayor. Acá estamos comparando la elasticidad las ofertas en el tramo en que ambas son paralelas. Si bien un menor costo de transporte genera una oferta más expandida, dado un precio genera también una oferta más inelástica.

Problema 2
Calcule la elasticidad de sustitución entre los factores de una tecnología de tipo Cobb-Douglas, de la forma:

$$q(K,L) = AK^aL^b$$

Respuesta

La elasticidad de sustitución es igual a la razón entre la variación porcentual de K/L óptimo y de w/r.
Matemáticamente:

$$\sigma_{K,L} = \frac{\frac{d(K/L)}{K/L}}{\frac{d(w/r)}{w/r}} = \frac{d(K/L)}{d(w/r)} \times \frac{w/r}{K/L}$$

En el óptimo:

$$TST = w/r$$

$$\frac{PMG_L}{PMG_K} = w/r$$

$$\frac{d(q)/dL}{dq/dK} = w/r$$

Reemplazando en la función Cobb-Douglas:

$$\frac{AK^a bL^{b-1}}{AaK^{a-1}L^b} = w/r$$

$$\frac{bK}{aL} = w/r$$

$$K/L = \frac{aw}{br}$$

$$\frac{d(K/L)}{d(w/r)} = a/b = \frac{K/L}{w/r}$$

$$\sigma_{K,L} = 1$$

Problema 3

En Rucalandia, la industria de los calcetines es perfectamente competitiva. Cada firma opera en el mercado con una función de producción:

$$F(K, L) = K_i^{1/2} L_i^{1/2}$$

Donde K representa la materia prima y L la mano de obra. El precio de la mano de obra es w=1. El precio de K no se puede considerar constante ya que los proveedores aplican descuentos por volumen. Así, el costo total de comprar K unidades de materia prima viene dado por:

$$z(K) = 2K^{2/3} \quad (K>1)$$

La demanda por calcetines en este país es perfectamente elástica y está dada por:

$$P^D = 3$$

a) Determine la función de costos de cada firma.
b) ¿Cuál es la función de oferta de cada firma? ¿Cuál es el equilibrio de mercado?

Respuesta:

a) Se resuelve max Π = P x f(K,L) – (rK + wL)

Aquí se debe tener cuidado, ya que no se puede llegar y aplicar PMgL/ PMgK = w/r debido a que ahora es r(K).

Del enunciado se sabe que $z(K) = 2K^{2/3}$ corresponde al costo de comprar K unidades. Como r es el costo de una unidad de materia prima (K), entonces: $rk = z(K) = 2K^{2/3}$

|

La condición de maximización queda: max Π = P x f(K,L) – ($2K^{2/3}$ + wL),

Además, w = 1, $f(K,L) = K^{1/2} L^{1/2}$, reemplazando:

max $\Pi = P \times (K^{1/2} L^{1/2}) - (2K^{2/3} + L)$, ahora si se puede seguir con el procedimiento de maximizar c/r a K y a L. Lo importante era darse cuenta que no se podía llegar y aplicar PMgL/ PMgK = w/r, y entender de adónde sale esto

Derivando c/r a L: $1 = (1/2) \times P \times L^{-1/2} K^{1/2}$ (1)

Derivando c/r a K: $(4/3)K^{-1/3} = (1/2) \times P \times K^{-1/2} L^{1/2}$ (2)

Dividiendo estas dos ecuaciones (si se fijan es el mismo mecanismo de PMgL/ PMgK = w/r) queda:

(2):(1) =>

$(4/3) K^{-1/3} = L/K$ => $(4/3) K^{2/3} = L$ (Relación entre los factores de producción)

pero $q = f(K,L) = K^{1/2} L^{1/2} = K^{1/2} [(4/3) K^{2/3}]^{1/2} = (4/3)^{1/2} K^{5/6}$

despejando K de la ecuación:

$K = (3/4)^{3/5} q^{6/5}$ (Lo importante de llegar a ésto es poder escribir C(q,r,w) y no dependiendo de K ni L.

=> $C(q) = Lw + rK = (4/3) K^{2/3} \times 1 + 2K^{2/3} = (10/3) K^{2/3}$

reemplazando K(q): $C(q) = (10/3)\times(3/4)^{2/5} q^{4/5} = A q^{4/5}$, con A = cte.

b) La oferta se determina con P = CMg

⇨ $CMg = B q^{-1/5}$, con B = cte = A x (4/5)

La función de oferta de la firma es: $q_s = (P/B)^{-5}$

El equilibrio se obtiene igualando oferta y demanda:

Entonces: $q = (\frac{3}{B})^5$ y el precio será P=3.

Problema 4

Cuando una firma utiliza una combinación de factores tal que la tasa de sustitución tecnológica es igual a -1, esto significa que para producir una unidad del bien, debe usar la misma cantidad de capital que de trabajo. Comente.

Respuesta

Falso, la tasa de sustitución tecnológica corresponde a la tasa a la cual debo sustituir capital por trabajo, manteniendo el nivel de producción constante. Esto nada tiene que ver con la combinación de insumos que se esté usando.

Problema 5

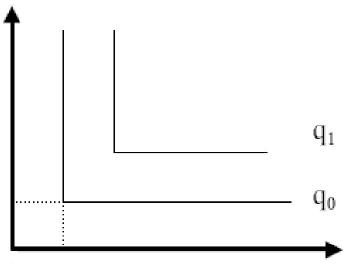
Suponga que la función de producción de un microbús es de proporciones fijas y que todos tienen la misma tecnología. Para cada viaje se requieren los siguientes insumos:

1 hora de chofer a $1.000 la hora.
10 litros de petróleo a $130 el litro.

a) Grafique la función de producción. ¿Cuál es la función de costo total? Determine los costos marginales y costos medios.

b) Considerando ahora, que hay 100 microbuses operando, cada uno hace un máximo de 10 viajes diarios, y que la función de demanda por viajes es de $P = 5.000 - 0{,}2Q$, donde Q es el número de viajes, encuentre el precio y la cantidad de viajes de equilibrio de corto plazo.

Respuesta
a) Gráfico:

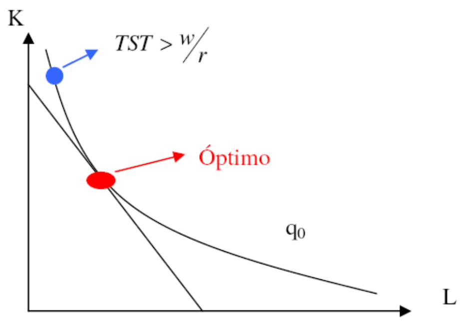


C(q) = 1000*q + 10*130*q → C(q) = 2300*q
Cmg(q) = Cme(q) =1300 = cte. Donde q es la cantidad de viajes

b) Si reemplazamos Cmg en la función de demanda, se obtiene $Q_{D=}$ (5000-2300)/0,2 = 13500, pero solo se dispone de 1000 viajes como máximo, de lo que se desprende que el equilibrio de corto plazo estará en P=5000-0,2*1000, por lo tanto en el equilibrio de corto plazo se tendrá demanda insatisfecha: Q_{cp}=1000 y P_{cp}=4800.

Problema 6
Una firma observa que siempre puede reducir un 2% de su empleo total aumentando un 3% su dotación de capital y mantener su producción constante. La firma tiene diez trabajadores y 20 unidades de capital. Si los pagos al capital y al trabajo son de r=4 y w=1 respectivamente. ¿Está esta firma maximizando utilidad? Justifique su respuesta. ¿Qué aconsejaría Ud. a la firma?

Del enunciado se desprende que la tasa de sustitución tecnológica (la pendiente de la isocuanta) es 3/2. En el óptimo, esto debiera ser igual a la razón del precio de los insumos w/r, pero dado que w/r=1/4 entonces la firma no está maximizando utilidades. ¿Qué debe hacer? Del gráfico vemos, que la firma está en punto como el azul, donde la pendiente de la isocuanta es mayor a la pendiente del isocosto, luego, la firma debe sustituir capital por trabajo.



$$TST_{K,L} = -\frac{\partial K(L)}{\partial L} = \frac{3}{2}$$

Optimo

$$-\frac{\partial K(L)}{\partial L} = \frac{w}{r}$$