IN34A - Optimización

Modelos de Programación Lineal

Leonardo López H.

lelopez@ing.uchile.cl

Primavera 2008

Contenidos

Contenidos

Problema de Transporte

- El problema de transporte consiste en un conjunto $M = \{1, ..., m\}$ orígenes y un conjunto $N = \{1, ..., n\}$ de destinos.
- La cantidad de producto disponible en cada origen $i \in M$ es a_i y la demanda en cada destino $j \in N$ es b_j.
- El costos unitario de transporte entre el origen $i \in M$ y el destino $j \in N$ es c_{ij}.
- Se desea determinar como hacer llegar los productos desde los orígenes a los destinos a costo mínimo.

Problema de Transporte: Modelo Lineal

Variables de decisión:

- x_{ij} = Flujo de productos enviados desde el origen i al destino j.

Restricciones:

1. Satisfacer demanda de cada destino:

$$\sum_{i \in M} x_{ij} \geq b_j \quad \forall j \in N$$

2. Respetar la disponibilidad de producto en cada origen:

$$\sum_{j \in N} x_{ij} \leq a_i \quad \forall i \in M$$

3. Naturaleza de las variables:

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in M, j \in N$$

Función Objetivo:

$$\text{mín } z = \sum_{i \in M} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij}$$

Problema de Transporte con Transbordo

- Supongamos ahora que existe un conjunto $Q = \{1, ..., q\}$ centros de transbordo.
- Los productos deben ser enviados desde los orígenes a los centros de transbordo y desde allí, a los destinos. Todos los productos deben pasar por un centro de transbordo.
- El centro de transbordo $k \in Q$ puede recibir y despachar hasta w_k productos.
- El costo unitario de transporte entre el origen $i \in M$ y el centro de transbordo $k \in Q$ es de e_{ik}.
- El costo unitario de transporte entre el centro de transbordo $k \in Q$ y el destino $j \in N$ es de d_{kj}.

Problema de Transporte con Transbordo: Modelo Lineal I

Variables de decisión:

- x_{ik} = Flujo de productos enviados desde el origen i al centro de transbordo k.
- y_{kj} = Flujo de productos enviados desde el centro de transbordo k al destino j.

Restricciones:

1. Satisfacer demanda de cada destino:

$$\sum_{k \in Q} y_{kj} \geq b_j \quad \forall j \in N$$

2. Respetar la disponibilidad de producto en cada origen:

$$\sum_{k \in Q} x_{ik} \leq a_i \quad \forall i \in M$$

3. Capacidad de los centros de transbordo:

$$\sum_{i \in M} x_{ik} \leq w_k \quad \forall k \in Q$$

Problema de Transporte con Transbordo: Modelo Lineal II

4. Todo lo que llega a un centro de transbordo es despachado:

$$\sum_{i \in M} x_{ik} = \sum_{j \in N} y_{kj} \quad \forall k \in Q$$

5. Naturaleza de las variables:

$$x_{ik} \geq 0, y_{kj} \geq 0 \quad \forall i \in M, j \in N, k \in Q$$

Función Objetivo:

$$\min z = \sum_{i \in M} \sum_{k \in Q} e_{ik} x_{ik} + \sum_{k \in Q} \sum_{j \in N} d_{kj} y_{kj}$$

Contenidos

Problema de Asignación

- Existe un conjunto $C = \{1, ..., c\}$ de cursos que una universidad debe dictar. Se cuenta con un conjunto $P = \{1, ..., p\}$ de profesores que pueden dictarlos.
- El profesor $i \in P$ tiene una preferencia b_{ij} por dictar el curso $j \in C$.
- Suponga que existen más profesores que cursos y que cada profesor puede dictar a lo más un curso.
- Se desea encontrar la asignación profesor-curso que maximice las preferencias de los profesores.

Problema de Asignación: Modelo Lineal

Variables de decisión:

- $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el profesor } i \text{ se asigna al curso } j \\ 0 & \sim \end{cases}$

Restricciones:

1. Cada curso debe tener un profesor:

$$\sum_{i \in P} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in C$$

2. Cada profesor debe ser asignado a lo más a un curso:

$$\sum_{j \in C} x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in P$$

3. Naturaleza de las variables:

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in P, j \in C$$

Función Objetivo:

$$\text{máx}\, z = \sum_{i \in P} \sum_{j \in C} b_{ij} x_{ij}$$

Selección de Proyectos

- Un inversionista dispone de un presupuesto de K para invertir en un conjunto $N = \{1, ..., n\}$ de proyectos diferentes.
- El proyecto $j \in N$ require una inversión de a_j y tiene una rentabilidad estimada de r_j.
- Debe decidir qué proyectos realizar de forma de maximizar la rentabilidad de la inversión.

Selección de Proyectos: Modelo Lineal

Variables de decisión:

- $x_j = \begin{cases} 1 & \text{si se invierte en el proyecto } j \\ 0 & \sim \end{cases}$

Restricciones:

1. Respetar el presupuesto del inversionista:

$$\sum_{j \in N} a_j x_j \leq K$$

2. Naturaleza de las variables:

$$x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in N$$

Función Objetivo:

$$\max z = \sum_{j \in N} r_j x_j$$

Este problema corresponde al problema de la mochila (o *knapsack*) binario.

Selección de Proyectos: Restricciones Adicionales

- Proyectos incluyentes: Los proyectos i y k deben realizarse ambos simultáneamente o ambos no deben realizarse:

$$x_i = x_j$$

- Proyectos excluyentes: Se puede invertir en el proyecto i o en el proyecto k o en ninguno de ellos, pero no en ambos:

$$x_i + x_j \leq 1$$

- Un requisito: Para invertir en el proyecto i se requiere invertir en el proyecto k. Sin embargo, se puede invertir en el proyecto k sin invertir en el i:

$$x_i \leq x_k$$

- Varios requisitos: Para invertir en el proyecto i se requiere invertir en al menos uno de los proyectos del conjunto $Q \subseteq N$:

$$x_i \leq \sum_{j \in Q} x_j$$

Vendedor Viajero

- Un vendedor debe viajar a n ciudades distintas, las que se encuentran indexadas a través del conjunto $N = \{1, ..., n\}$.
- Desde cada ciudad $i \in N$ se puede viajar hasta cada ciudad $j \in N \setminus \{i\}$ con un costo de c_{ij}.
- El vendedor debe partir desde una ciudad arbitraria, visitar cada una de las ciudades restantes exactamente una vez, y retornar a la ciudad desde donde partió.
- Se desea determinar la secuencia de ciudades (*tour*) que debe seguir el vendedor para realizar su recorrido a costo mínimo.

Vendedor Viajero: Modelo Lineal I

Variables de decisión:

- $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el vendedor va desde la ciudad } i \text{ a la ciudad } j \\ 0 & \sim \end{cases}$

Restricciones:

1. El vendedor debe entrar exactamente una vez a cada ciudad:

$$\sum_{i \in N \setminus \{j\}} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in N$$

2. El vendedor debe salir exactamente una vez a cada ciudad:

$$\sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in N$$

Vendedor Viajero: Modelo Lineal II

3. El vendedor no puede realizar *subtours*:

$$\sum_{\substack{i \in S \\ j \in S \setminus \{i\}}} x_{ij} \leq |S| \quad \forall S \subseteq N \text{ tal que } 2 \leq |S| \leq |N| - 2$$

4. Naturaleza de las variables:

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in N$$

Función Objetivo:

$$\min z = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij}$$

Contenidos

Localización de Plantas

- Existe un conjunto I de localizaciones posibles para instalar un total de P plantas que fabrican un único producto.
- Existe un conjunto J de clientes que demandan el producto. La demanda del cliente $j \in J$ es de d_j.
- El costo de instalar una planta en la localidad $i \in I$ es c_i.
- El costo unitario de transporte desde la localidad $i \in I$ al cliente $j \in J$ es h_{ij}.
- La capacidad de una planta instalada en la localidad $i \in I$ es de U_i
- Se desea determinar qué plantas deben instalarse y como distribuir los productos desde las plantas hasta los clientes a costo mínimo.

Localización de Plantas: Modelo Lineal I

Variables de decisión:

- $x_i = \begin{cases} 1 & \text{si se instala una planta en la localidad } i \\ 0 & \sim \end{cases}$
- y_{ij}= Cantidad de productos enviados desde la planta i al cliente j.

Restricciones:

1. Satisfacer la demanda de cada cliente:

$$\sum_{i \in I} y_{ij} \geq d_j \quad \forall j \in J$$

Localización de Plantas: Modelo Lineal II

2. Capacidad de producción de la planta:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} y_{ij} &\leq U_i \\ y_{ij} &\leq M \cdot x_i \quad \forall i \in I, j \in J, \text{ con } M \text{ suficientemente grande} \end{aligned}$$

Sin embargo, las dos condiciones anteriores podrían escribirse como:

$$\sum_{j \in J} y_{ij} \leq U_i \cdot x_i \quad \forall i \in I$$

Si $x_i = 0$, entonces todas las variables $y_{i1}, \ldots, y_{i|J|}$ también son iguales a cero. Esto ya que no pueden haber envíos desde una planta no instalada. Si $x_i = 1$, entonces la planta a lo más envía a los clientes toda su capacidad.

3. Número de plantas instaladas:

$$\sum_{i \in I} x_i \leq P$$

Localización de Plantas: Modelo Lineal III

4. Naturaleza de las variables:

$$x_i \in \{0,1\}, y_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in J$$

Función Objetivo:

$$\min z = \sum_{i \in I} c_i x_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} h_{ij} y_{ij}$$

Contenidos

Referencias

Hillier, F. S. and Lieberman, G. J. (2001).
Introduction to Operations Research.
McGraw-Hill, 7 edition.

Varas, S., Ortiz, C., and Vera, J. (2000).
Optimización y modelos para la gestión.
Dolmen Ediciones.