INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Leonardo López, Ximena Schultz, Richard Weber
Auxiliares: Fernanda Bravo. André Carboni, Nelson Devia, Ignacio Escobar, Rodrigo Wolf

IN34A – Optimización
Examen
09 de Diciembre, 2008

Pregunta 1:

1. Sea la región factible definida por las siguientes restricciones:

$$X_2 \leq 2$$
$$X_2 + 2 \cdot X_1 \geq 6$$
$$2 \cdot X_1 - X_2 \leq 6$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Suponga un Función Objetivo Líneal.

a) (0,5 ptos.) Grafique la región factible y encuentre los potenciales puntos óptimos. Justifique el por qué estos puntos (y eventualmente alguna recta que los una) son los únicos candidatos a óptimo.

b) (1 pto.) Escriba todos los puntos encontrados en a) mediante todas las bases que sea posible. ¿Cuántos puntos son y cuántas bases tiene? ¿Por qué?

2. Sea la región factible definida por las siguientes restricciones:

$$(X_1 - 1)^2 + (X_2 - 1)^2 \leq 2$$
$$X_1 \leq 2$$
$$X_2 \leq 2$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

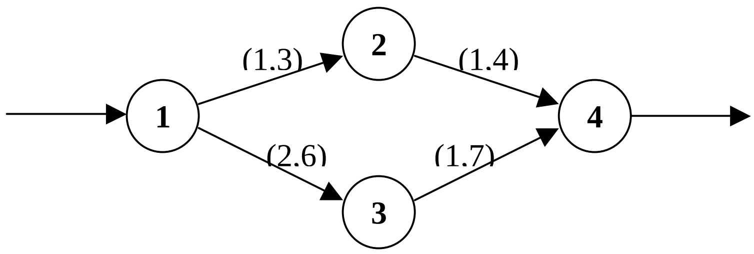
Suponga una Función Objetivo convexa.

a) (0,8 ptos.) Grafique la región factible. ¿Cómo son los gradientes de las restricciones activas en el punto (2,1)? ¿Es este punto regular? Justifique.

b) (0,7 ptos.) ¿Es la región convexa? Escriba la condición de KKT, ¿Es ésta necesaria y suficiente? ¿Encontrará el óptimo si aplica KKT?

3. (1,5 ptos.) Explique el problema del vendedor viajero y modélelo. Explique todas las restricciones. ¿Cómo cambian las restricciones si el vendedor no tiene que visitar necesariamente todas las ciudades sino sólo un subconjunto de ellas no conocido, de cardinalidad mayor o igual a C, y tiene que visitar sí o sí la ciudad origen y una ciudad X?

4. Dada la siguiente Red:



Donde, la tupla asociada a cada arco contiene la cota inferior y superior para el flujo en este arco.

a) (0,7 ptos.) Aplique F&F para encontrar una solución inicial factible.

El flujo anexo es el siguiente, por lo que se tiene una solución inicial factible

b) (0,8 ptos.) Aplique F&F para encontrar el Flujo Máximo a partir de la solución encontrada en a).

Pregunta 2:

1. (2 ptos.) Responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuáles son los elementos principales de un modelo de Programación Dinámica? Mencione y explique brevemente 4 de estos elementos.

b) Explique por qué el Principio de Bellman es relevante para poder aplicar la Programación Dinámica.

c) Describa brevemente cómo se resuelve un problema de optimización aplicando Programación Dinámica.

2. (4 ptos.)

Una cadena de supermercados posee cuatro locales ya funcionando y contrató cuatro vendedores nuevos para asignar a dichos locales. La siguiente tabla muestra el beneficio adicional en unidades monetarias (UM) por mes para cada local dado el número de vendedores adicionales correspondientes.

	1 vendedor	2 vendedores	3 vendedores	4 vendedores
Local 1	10	15	20	20
Local 2	5	6	7	8
Local 3	11	16	17	17
Local 4	8	12	22	22

Por ejemplo asignar dos vendedores adicionales al local 1 genera 15 UM adicionales por mes.

Se busca una asignación óptima, es decir una asignación que maximice el beneficio adicional.

a) Trate de reducir la complejidad del problema aplicando un análisis previo. Justifique su decisión.

b) Identifique estados, etapas, variables de decisión, la función de transformación y la función de recursión.

c) Resuelve el problema simplificado aplicando programación dinámica. Si no logra simplificar el problema resuelve el problema original aplicando programación dinámica.

d) ¿Cuál(es) es (son) la(s) política(s) óptima(s)?

Pregunta 3:

Consideremos el problema que enfrenta una empresa de envíos de carga aérea. En general la industria cobra una tarifa por unidad de masa transportada, por ejemplo en [kg], por lo tanto la empresa busca maximizar la cantidad de masa que carga en cada avión. Sin embargo, la disposición de los contenedores de carga en las áreas de carga de un avión afecta la posición de su centro de gravedad, lo que impacta la eficiencia de su vuelo. Por lo tanto, la empresa también desea que la carga quede balanceada para que el avión vuele más seguro, más rápido y utilizando menos combustible. El propósito de este problema es optimizar el layout de los contenedores cargados en el área de carga de un avión considerando estos objetivos en conflicto. Para simplificar la situación se tomará en cuenta sólo la posición del centro de gravedad a través del eje longitudinal del avión (a lo largo de éste), ya que el balance lado a lado posee una importancia marginal.

Existe un conjunto C de contenedores que podrían ser cargados en un avión, tal que la masa del contenedor $i \in C$ es de M_i. De estos un subconjunto $I \subseteq C$ debe ser cargado si o si en el avión (el resto podría quedar en tierra esperando el siguiente vuelo).

El avión posee un conjunto K de áreas de carga y un conjunto H de compartimientos. Cada área de carga $k \in K$ está dividida en un conjunto H_k de compartimientos, donde se pueden almacenar los contenedores con carga, tal que $H = \bigcup_{k \in K} H_k$ y $\bigcap_{k \in K} H_k = \phi$. De acuerdo a las regulaciones internacionales, para calcular el centro de gravedad del avión, se debe suponer que la masa de todos los contenedores de un mismo compartimiento está concentrada en el centro geométrico del compartimiento. Por lo tanto, se busca asignar cada contenedor a un único compartimiento del avión (si no es asignado, se queda en tierra). La masa del avión antes de realizar la carga de contenedores es M_0, el máximo de masa que soporta el área de carga $k \in K$ es de $M_{\max}^k$ y el máximo de masa que soporta el avión es de $M_{\max}$. La Posición del centro de gravedad del avión antes de realizar la carga de contenedores es P_0 (longitudinal) y la posición del centro geométrico del compartimiento $h \in H$ es P_h (longitudinal). La empresa ha definido que la posición (longitudinal) ideal del centro de gravedad del avión luego de la carga es de $\overline{P}$ y se permitirá como máximo que la posición (longitudinal) que puede alcanzar el centro de gravedad del avión luego de la carga pueda desviarse en $\pm\varepsilon$.

Cada compartimiento $h \in H$ está compuesto por N_h celdas, donde N_h es par. Para simplificar la situación se supondrá que en el compartimiento $h \in H$ existen 2 celdas a lo ancho y $\frac{1}{2}N_h$ a lo largo del avión. Además, existen 2 tipos de contenedores. Los contenedores tipo 1 utilizan 1 celda de cualquier compartimiento, en cambio los contenedores tipo 2 utilizan 2 celdas de cualquier compartimiento. El conjunto $T_1 \subseteq C$ contiene todos los contenedores del tipo 1 y $T_2 \subseteq C$ todos los contenedores del tipo 2 ($T_1 \cup T_2 = C$ y $T_1 \cap T_2 = \phi$).

Existe un conjunto A de pares (i,h) que especifica que el contenedor $i \in C$ debe ubicarse en el compartimiento $h \in H$, en caso de ser cargado al avión, y un conjunto E de pares (i,j) que especifica que el contenedor $i \in C$ no puede ubicarse en el mismo compartimiento que el contenedor $j \in C$, si ambos son cargados al avión.

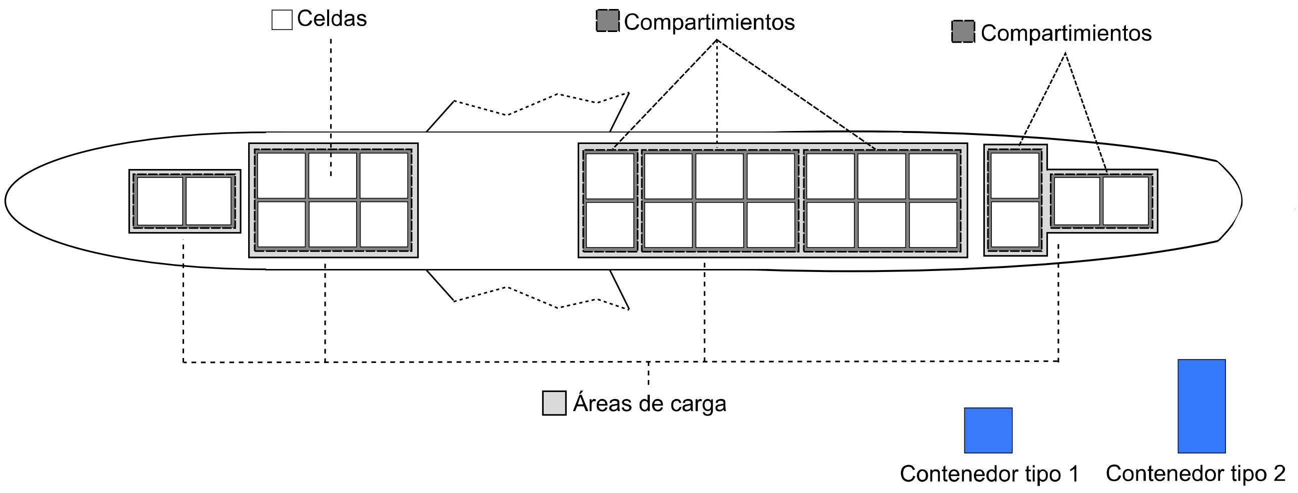
a) (5 ptos.)

Plantee un modelo de programación lineal que permita decidir la ubicación de los contenedores a lo largo de avión de modo maximizar la cantidad de masa que este transporta satisfaciendo todas los requerimientos de balance carga definidos por la empresa.

Hint: En un sistema de masas discreto, donde el i-ésimo elemento posee una masa m_i y está ubicado en la posición $\vec{r}_i$ con respecto al eje de referencia asumido, el centro de gravedad puede calcularse como: $\dfrac{\sum_i (\vec{r}_i \cdot m_i)}{\sum_i m_i}$

b) (1 pto.)

Suponga ahora que existe un conjunto R de pares (n,h) que especifica que el compartimiento $n \in H$ no puede utilizarse si no se utiliza previamente el compartimiento $h \in H$ y un conjunto W de pares (n,h) que especifica que el compartimiento $n \in H$ sólo puede utilizarse si se ha utilizado completamente la capacidad del compartimiento $h \in H$ (sin celdas disponibles).
¿Cómo modificaría su modelo para incluir esta situación?


Celdas
Compartimientos
Compartimientos
Áreas de carga
Contenedor tipo 1
Contenedor tipo 2

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Leonardo López, Ximena Schultz, Richard Weber

Auxiliares: Fernanda Bravo. André Carboni, Nelson Devia, Ignacio Escobar, Rodrigo Wolf

IN34A – Optimización
Pauta Examen
09 de Diciembre, 2008

Pregunta 1:

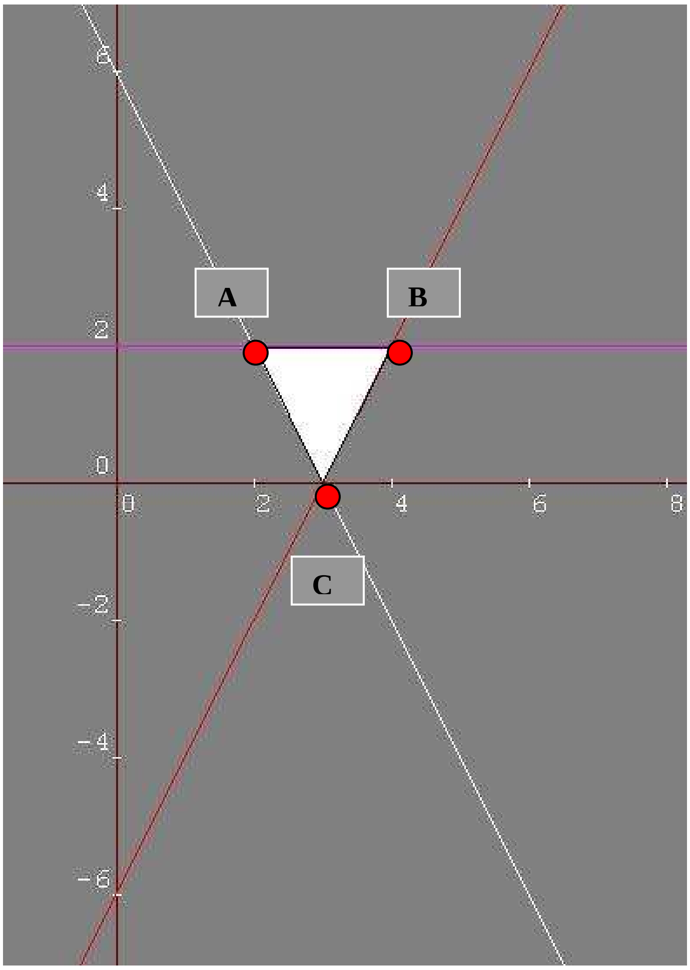
1. Sea la región factible definida por las siguientes restricciones:

$$X_2 \leq 2$$
$$X_2 + 2 \cdot X_1 \geq 6$$
$$2 \cdot X_1 - X_2 \leq 6$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Suponga un Función Objetivo Líneal.

a) **(0,5 ptos.) Grafique la región factible y encuentre los potenciales puntos óptimos. Justifique el por qué estos puntos (y eventualmente alguna recta que los una) son los únicos candidatos a óptimo.**

Ojo: Se grafica X_2 como variable dependiente
Se grafica X_1 como variable independiente



Entonces los puntos potenciales son A,B y C .Claramente las rectas (AB , BC ,CA) esto es en el caso que la función objetivo tenga la misma pendiente que alguna de las restricciones. Estos son los únicos candidatos a óptimo porque por teorema visto en clases, se tiene que si un problema lineal tiene solución, esta debe pasar por al menos 1 vértice del área factible, que son justamente los puntos A,B y C.

Además se puede justificar que el área factible es convexa y la función objetivo es lineal (convexa).

b) (1 pto.) Escriba todos los puntos encontrados en a) mediante todas las bases que sea posible. ¿Cuántos puntos son y cuántas bases tiene? ¿Por qué?

Los puntos son A,B y C y estos son respectivamente (2,2) ; (4,2) ; (3,0) por lo tanto son 3 puntos y estos se pueden escribir mediante las bases:

A: Xr (X_4,X_3) Xb (X_1,X_2,X_5)
B: Xr (X_3,X_5) Xb (X_1,X_2,X_4)
C: Xr (X_4,X_5) Xb (X_1,X_2,X_3) Xr (X_4,X_2) Xb (X_1,X_3,X_5) Xr (X_5,X_2) Xb (X_1,X_3,X_4)

Finalmente son 5 bases (1 de A, 1 de B y 3 de C)

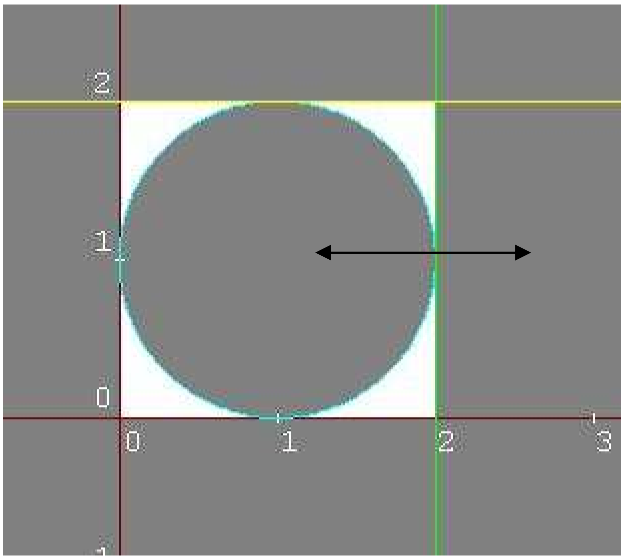
En C aparecen 3, porque son 3 las restricciones las que se hacen activas en este punto, luego es una solución degenerada.

2. Sea la región factible definida por las siguientes restricciones:

$$(X_1 - 1)^2 + (X_2 - 1)^2 \geq 1$$
$$X_1 \leq 2$$
$$X_2 \leq 2$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Suponga una Función Objetivo convexa.

a) **(0,8 ptos.) Grafique la región factible. ¿Cómo son los gradientes de las restricciones activas en el punto (2,1)? ¿Es este punto regular? Justifique.**



En el punto (2,1) hay 2 restricciones activas, esta es X1= 2 y $(X_1 - 1)^2 + (X_2 - 1)^2 \geq 1$ luego el gradiente de esta restricción evaluado en (2,1) es:

$\nabla g1(2,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ Para que un punto sea regular, se tiene que cumplir que los gradientes de las restricciones activas en el punto, deben ser l.i. Pero en este punto claramente los gradientes son l.d. Pero la recíproca del teorema no se cumple. Cuando esto sucede, se debe aplicar la definición de punto regular. Ahora sí se puede afirmar que es un punto regular porque se tiene que

C(x1,x2)=cl(D(x1,x2))

b) (0,7 ptos.) ¿Es la región convexa? Escriba la condición de KKT, ¿Es ésta necesaria y suficiente? ¿Encontrará el óptimo si aplica KKT?

No, no es una región convexa. Esto se puede ver porque no es posible unir 2 puntos cualquiera pertenecientes a la región factible y unirlos de tal manera que el segmento que une los puntos está contenido completamente en la región factible.

Condiciones KKT:

1) $\nabla f(x) + \sum ui * \nabla gi = 0$
2) $ui * gi = 0$

Puede que se cumpla la condición necesaria, esto sería en el caso que los ui son >0, pero no se tiene la condición suficiente. Esto es porque la región factible no es convexa.

Cómo no se tiene la condición suficiente, KKT no funciona y no encontrará el óptimo.

3. (1,5 ptos.) Explique el problema del vendedor viajero y modélelo. Explique todas las restricciones. ¿Cómo cambian las restricciones si el vendedor no tiene que visitar necesariamente todas las ciudades sino sólo un subconjunto de ellas no conocido, de cardinalidad mayor o igual a C, y tiene que visitar sí o sí la ciudad origen y una ciudad X?

El Vendedor Viajero

Hay n ciudades que visitar, c_{ij} corresponde al costo de ir de la ciudad i a la ciudad j o viceversa. El problema es definir el tour óptimo.

Modelo:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el vendedor va desde } i \text{ a } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Veamos las restricciones:

1. Naturaleza de las variables

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad (1)$$

2. El vendedor debe entrar exactamente una vez a cada ciudad

$$\sum_{i=1, i\neq j}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \ldots, n \quad (2)$$

3. El vendedor debe salir exactamente una vez de cada ciudad

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1, \ldots, n \quad (3)$$

Para cada subconjunto de ciudades $U \subseteq \{1, \ldots, n\}$ tal que $2 \leq |U| \leq n-2$, las restricciones

$$\sum_{(i,j)/i\in U; j\in V\setminus U} x_{ij} \geq 1 \quad \forall U \subseteq V \text{ tal que } 2 \leq |U| \leq n-2 \quad (4)$$

Con esta última, se evitan los sub-tours

Ahora lo que cambia, es que la restricción (3)

$$\sum_{i=1,\, j\neq i} Xij \leq 1 \quad \forall j = 1,......,n \quad (2')$$
$$\sum_{j=1,\, j\neq i} Xij \leq 1 \quad \forall i = 1,......,n \quad (3')$$

(5) $\sum_{i\geq j} Xij \geq C$

(6) $\sum_{i=1,\, j\neq i} Xij = \sum_{j=1,\, j\neq i} Xij$

(4'') $\sum_{x\notin U} Xij \geq 1 \quad \forall U \subseteq V$ tal que $2 \leq |U| \leq n-2$

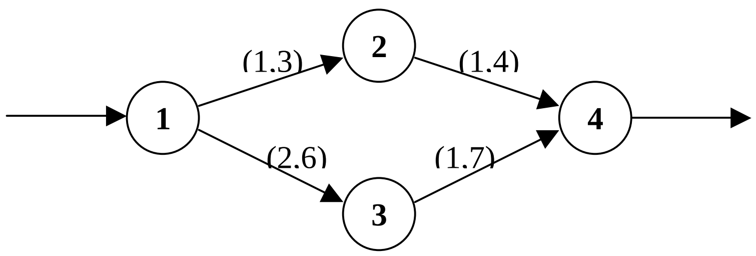
(7) $\sum_{j} Xxj = 1$ ó $\sum_{i} Xix = 1$

La explicación queda a criterio del ayudante, pero es básicamente lo que dice el enunciado de la restricción (y la última es la de los sub-tours)

Ojo, para evitar los sub-tours se podía hacer también

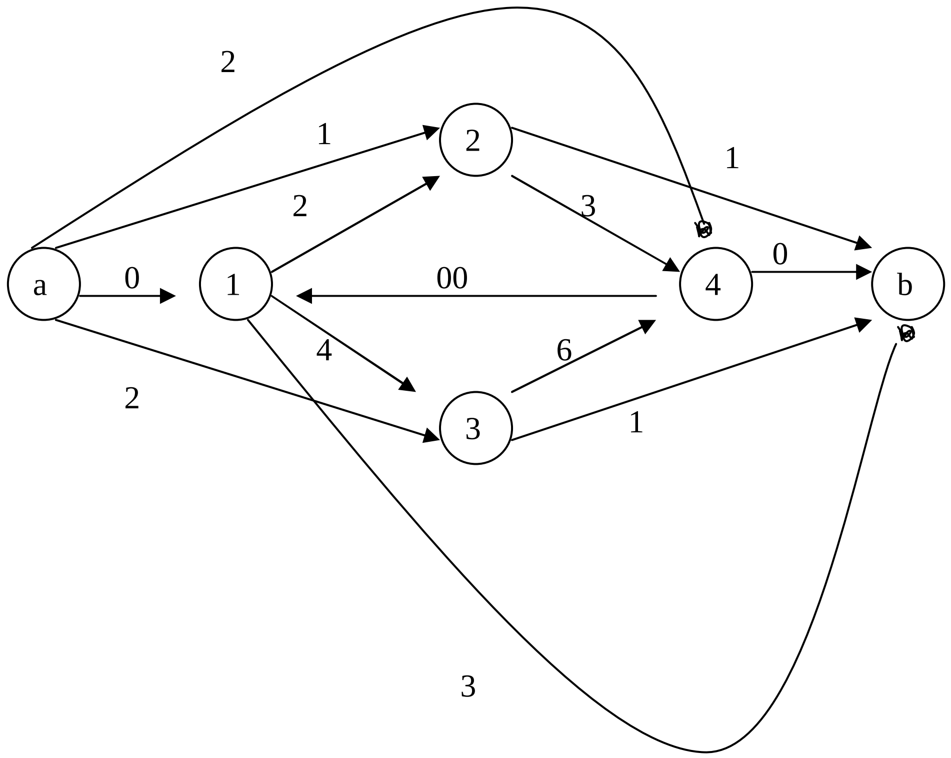
$$\sum_{(i,j)/i\in U;j\in U;i\neq j} x_{ij} \leq |U|-1 \quad \forall U \subseteq V \text{ tal que } 2 \leq |U| \leq n-2 \quad (4')$$

4. Dada la siguiente Red:



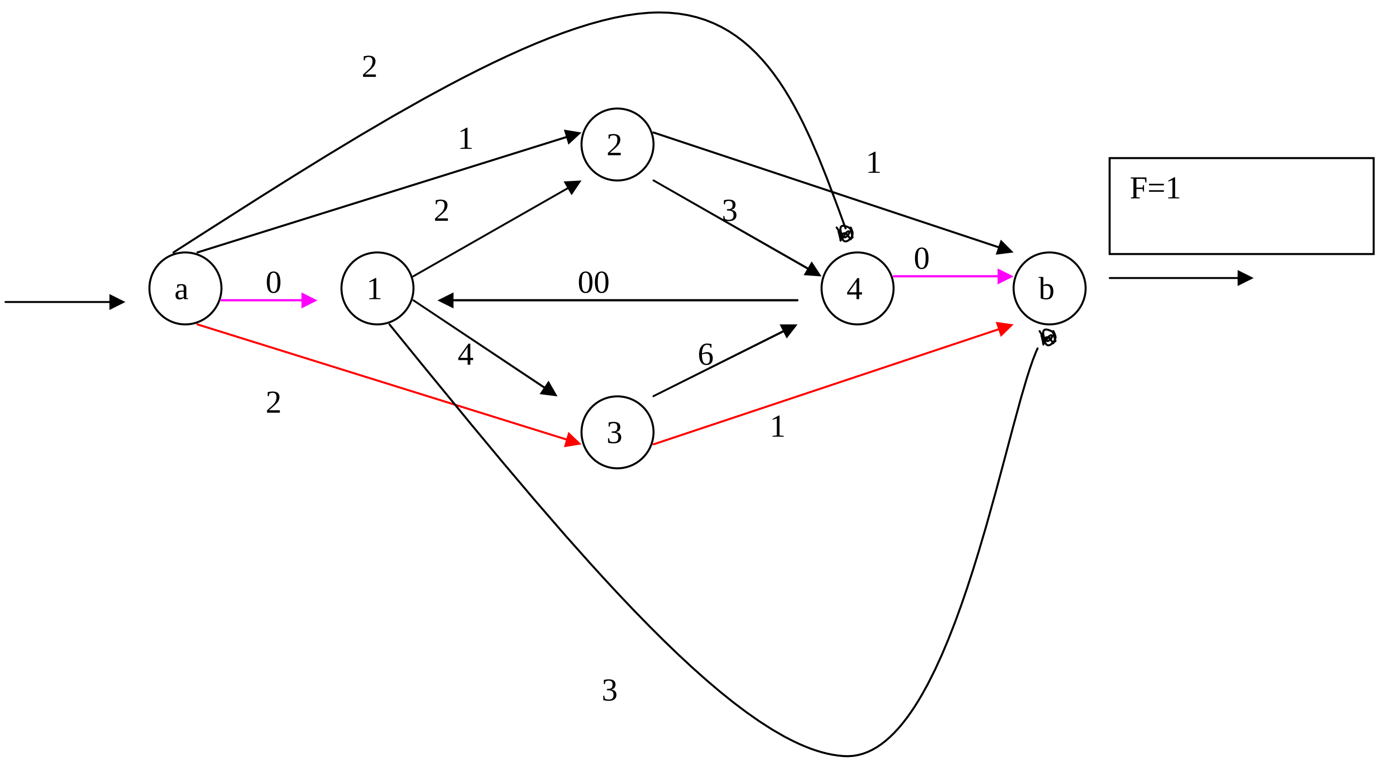
Donde, la tupla asociada a cada arco contiene la cota inferior y superior para el flujo en este arco.

a) (0,7 ptos.) Aplique F&F para encontrar una solución inicial factible.

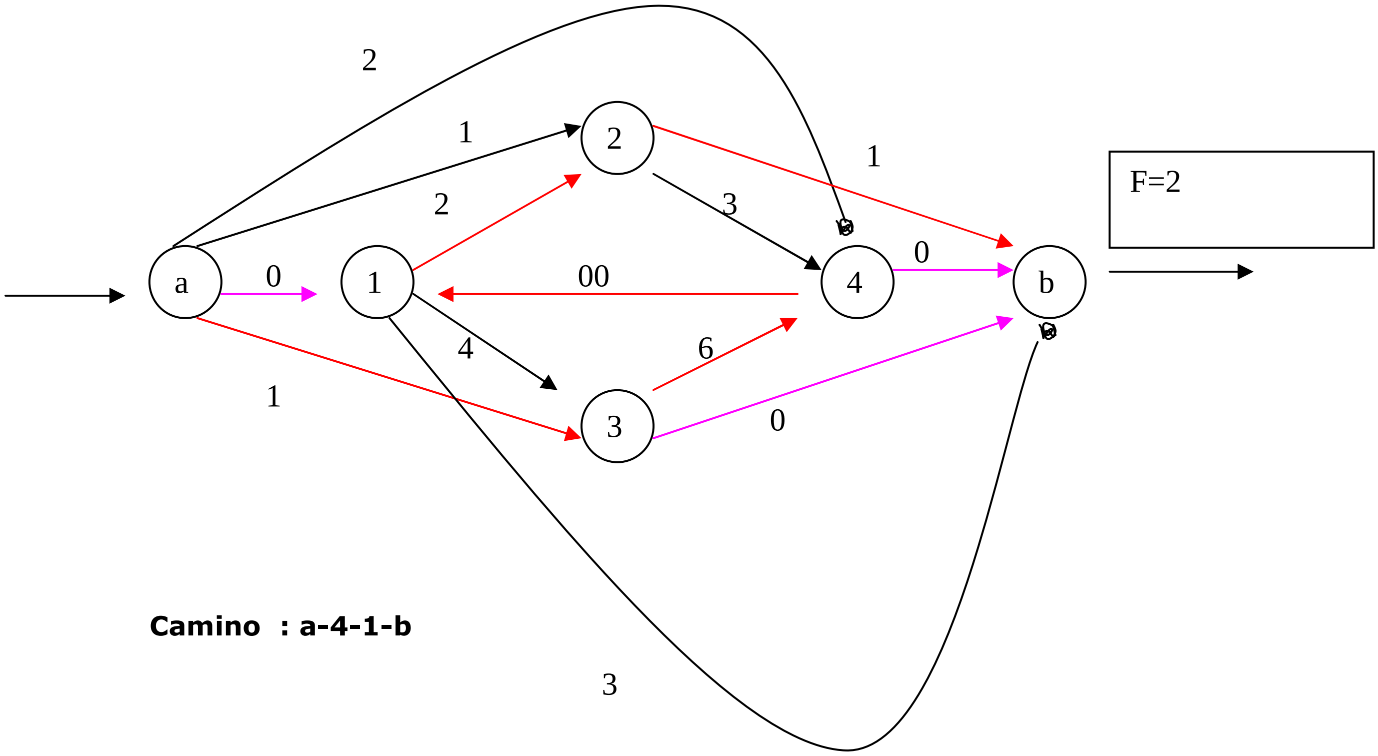


Ahora se procede a resolver el grafo :

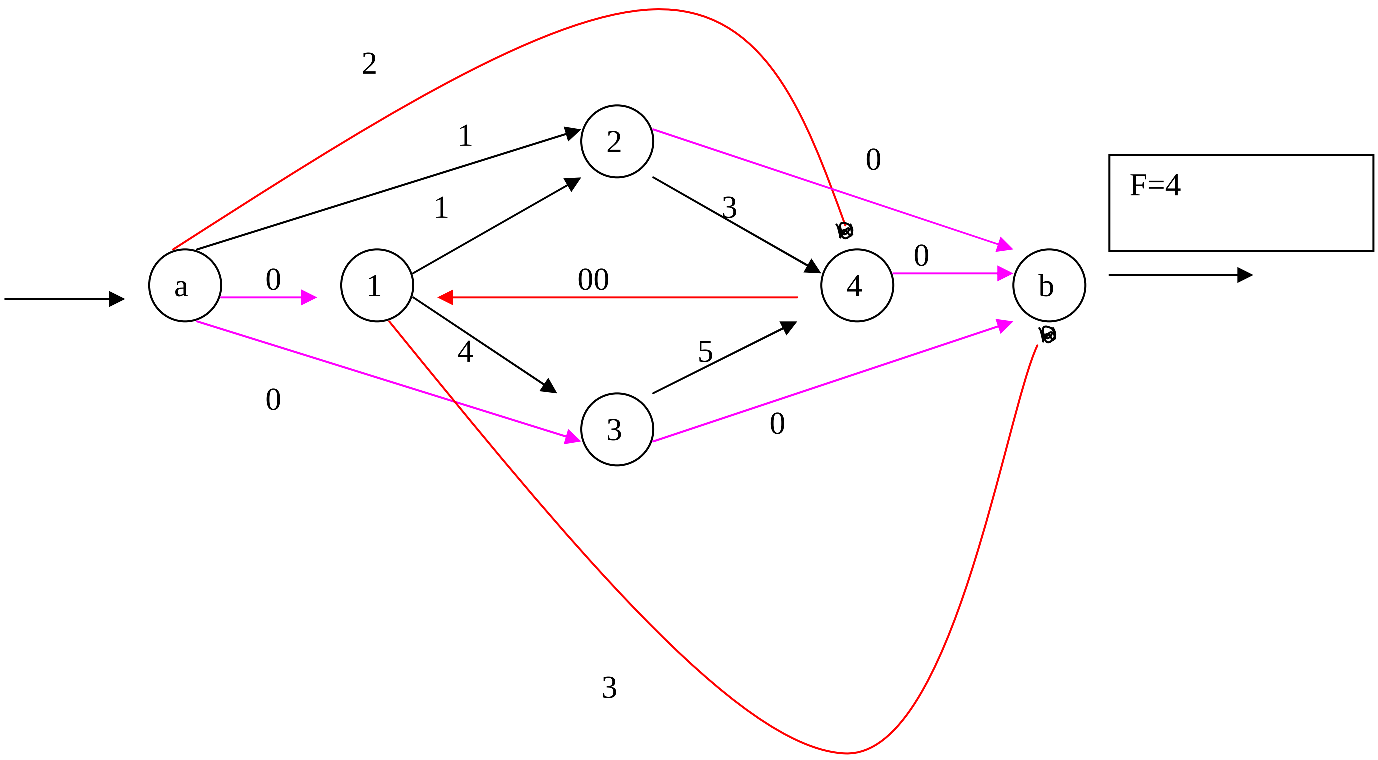
Camino : a-3-b



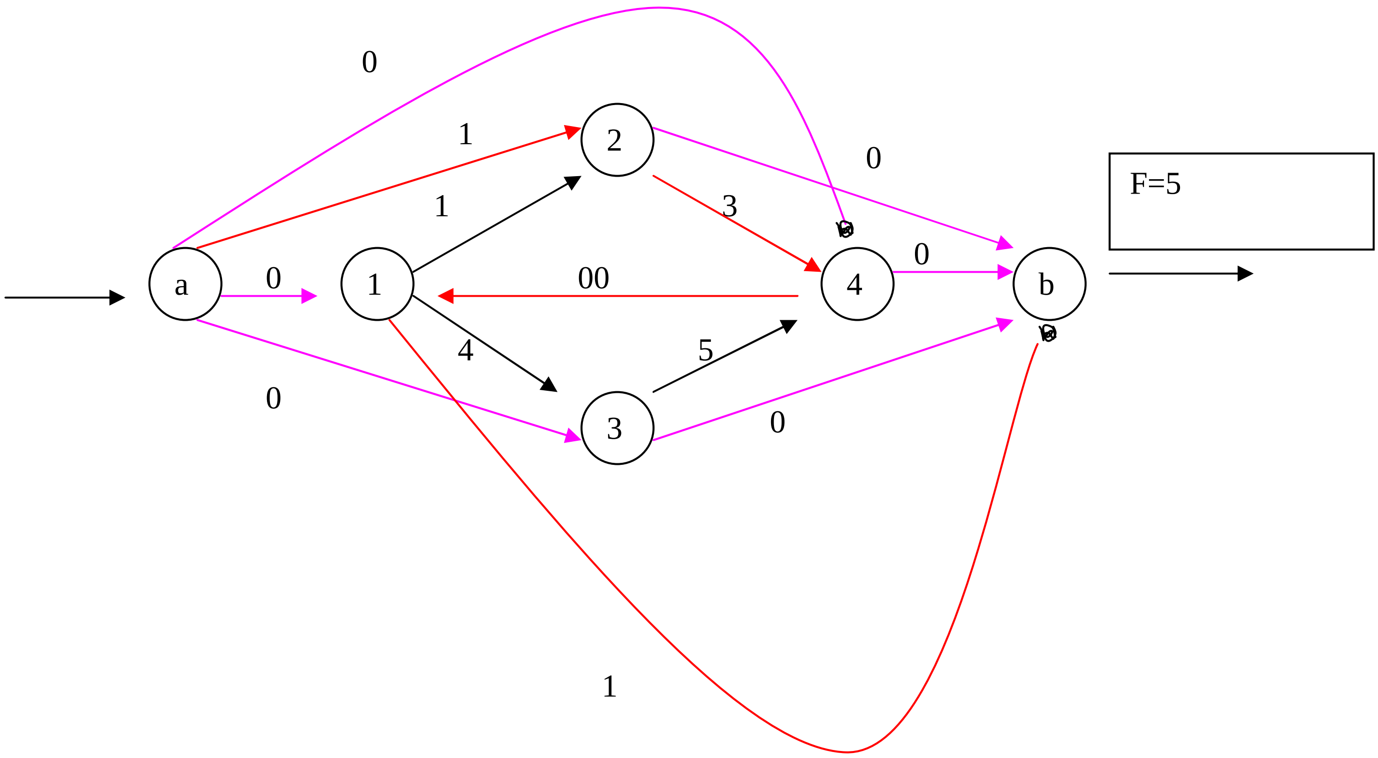
Camino : a-3-4-1-2-b



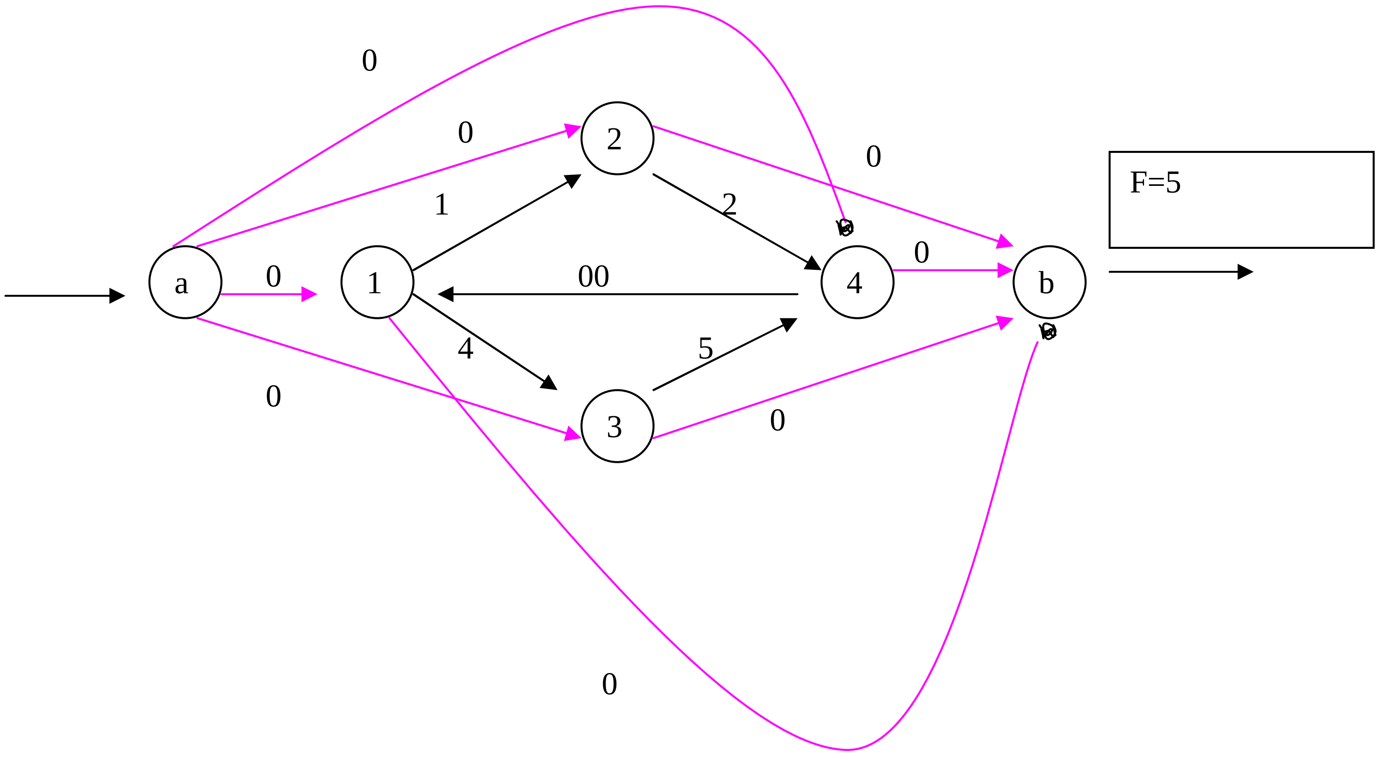
Camino : a-4-1-b



Camino : a-2-4-1-b



Finalmente vemos que quedamos con esta red, la cuál no permite otro camino entre a y b, por lo que hemos terminado con F&F.



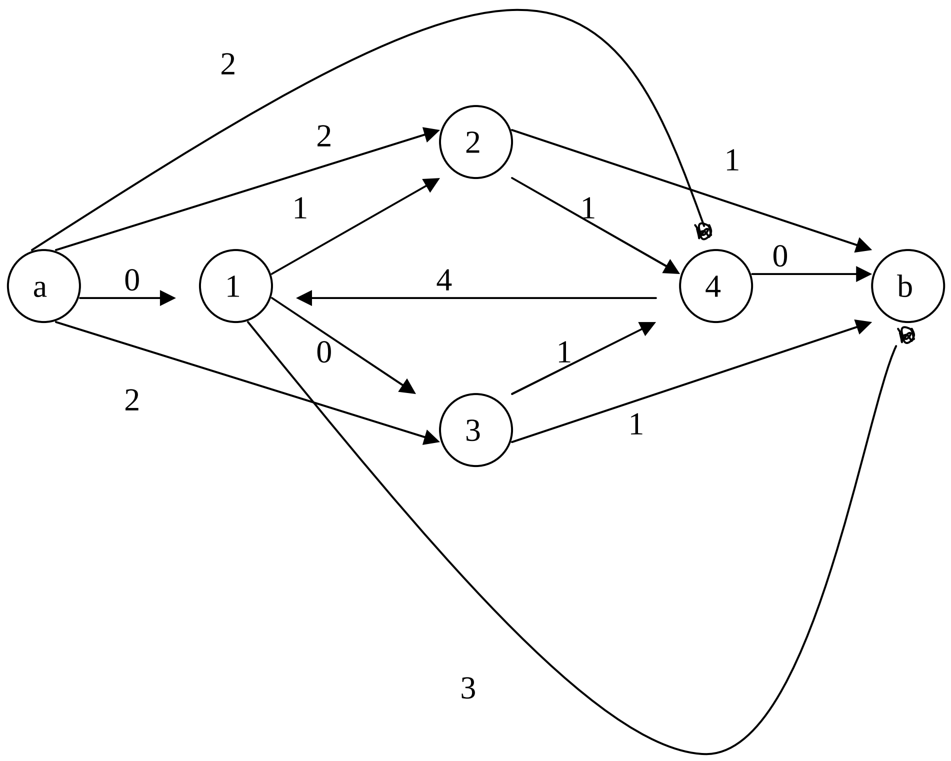
Ahora se ve que F = 5 = $\sum lij$, con lo cuál es un flujo máximo factible.

Para obtener los fij de la red original se resuelve:

fij' = fij* + Lij (fij* se obtiene del grafo auxiliar del problema con nodos a y b)

Nota: No importa los caminos que se tomen, solo importa que se hagan siguiendo el algoritmo y que se llegue a un F=5.

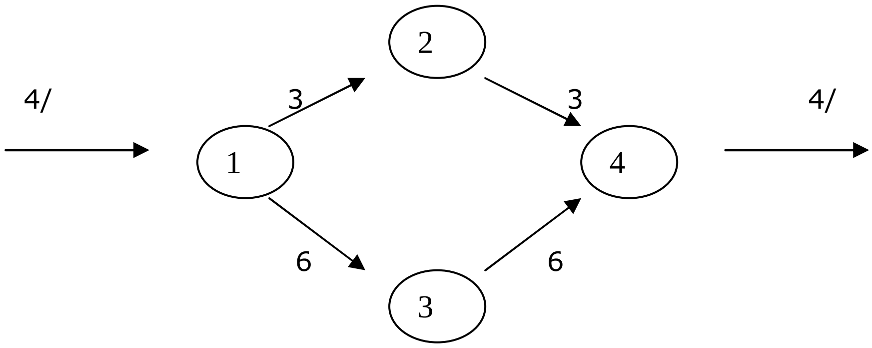
Este es el grafo Auxiliar que acumuló los flujos en cada iteración.

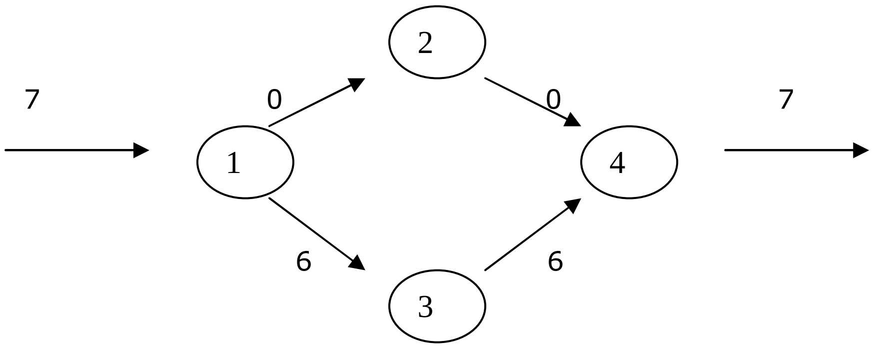


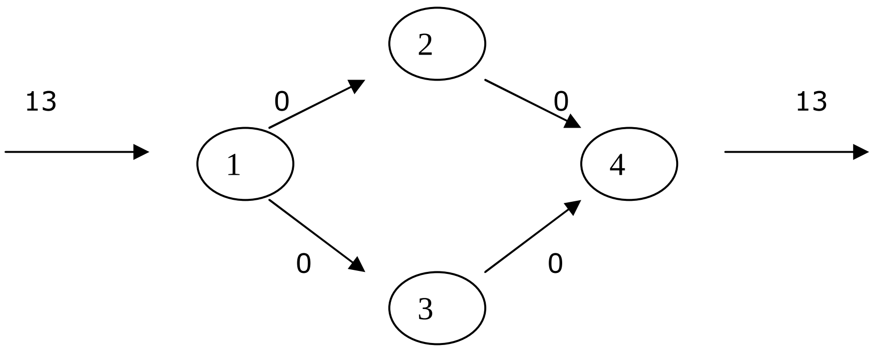
f'12= 1 + 1 = 2
f'24= 1 + 1= 2
f'13= 0 + 2= 2
f'34= 1 + 1= 2

Finalmente F' = 4 es el flujo factible en G (el problema original)

b) (0,8 ptos.) Aplique F&F para encontrar el Flujo Máximo a partir de la solución encontrada en a).







Pregunta 2:

1. (2 ptos.) Responda las siguientes preguntas:

d) ¿Cuáles son los elementos principales de un modelo de Programación Dinámica? Mencione y explique brevemente 4 de estos elementos.

Etapas: k
Particiones del problema en los cuales se pueden tomar decisiones que no dependan de estados anteriores, sino sólo del estado actual. Ej: días, meses, años, etapas de producción en una línea, etc. Para su programación debe existir una **etapa final** (n).

2. **Variables de Estado:** y_k
Variables que caracterizan la situación en la que se encuentra el sistema en una etapa dada. Estás variables dan la independencia a la etapa actual de las etapas anteriores, por lo que deben existir tantas variables de estado como las que permitan establecer en que condiciones comienza (o finaliza) una etapa para su posterior optimización.

3. **Variables de Decisión:** x_k
Decisiones cuantificables cuyos valores se intenta determinar por medio de la resolución del modelo. Su valor determina el valor de las variables de estado de las etapas futuras.

4. **Espacio de Soluciones Factibles:** $A_k(y_k)$
Espacio de soluciones factibles de las variables de decisión. Estos valores pueden depender de las variables de estado, es decir, para valores distintos de las variables de estado pueden haber distintos espacios de soluciones factibles.

5. **Ecuaciones de Recurrencia:**
   - **Función de Recursión:** f_k
   Ecuación que indica como se acumula la función de valor desde la etapa k hasta etapa final.
   - **Función de Transformación:** $y_{k+1} = T_k(y_k, x_k)$
   Ecuación que indican como se relaciona las variables de estado y decisión de u etapa con la variable de estado de la etapa posterior.

6. **Función de Valor o Beneficio: (Función Objetivo)** H_k
Criterio de comparación entre distintos valores de las variables de estado. Es el objetivo a alcanzar por la resolución del problema en cada etapa.

7. **Condiciones de Borde:** $y_1 = M$ y $f_{n+1}(y_{n+1}) = F$
Limitaciones que deben imponerse al problema, corresponden a condiciones iniciales o finales que deben cumplirse.

e) Explique por qué el Principio de Bellman es relevante para poder aplicar la Programación Dinámica.

Porque dada una secuencia óptima de decisiones, toda subsecuencia de ella es a su vez óptima. Así, se puede dividir un problema grande en problemas pequeños los cuales son más fáciles de resolver por separado.

f) Describa brevemente cómo se resuelve un problema de optimización aplicando Programación Dinámica.

Para resolver un problema de programación dinámica debemos al menos realizar:

- Identificación de etapas, variables de estados y variables de decisión:
  - Cada etapa debe tener asociada una o más decisiones (problema de optimización), cuya dependencia de las decisiones anteriores está dada exclusivamente por las variables de estado.
  - Cada estado debe contener toda la información relevante para la toma de decisión asociada a la etapa.
  - Las variables de decisión son aquellas sobre las cuales debemos definir su valor de modo de optimizar el beneficio acumulado y modificar el estado de la próxima etapa.

- Descripción de ecuaciones de recurrencia:
  Nos deben indicar como se acumula la función de beneficios a optimizar y como varían las funciones de estado de una etapa a otra.
- Resolución:
  Debemos optimizar cada subproblema por etapas en función de los resultados de la resolución del subproblema siguiente. Notar que para que las recurrencias estén bien definidas requerimos de condiciones de borde.

Respecto a lo último, la resolución tiene la particularidad de realizarse desde atrás hacia adelante, siguiendo los siguientes pasos:

1. Partir en la etapa n, haciendo $k = n$.

2. Colocar todos los valores factibles de las variables de estado y las de decisión en la etapa k.

3. Calcular H_k para cada valor del par ordenado $(y_k,\ x_k)$ calculado anteriormente.
4. Elegir para cada y_k el valor óptimo que debe tener x_k y el correspondiente valor de
5. Si $k = 1$ parar, sino disminuir k en 1 y volver a (2).

6. Hacer $k = 1$

7. Dado que y_k^* se conoce, buscar el valor óptimo de x_k correspondiente a y_k^* y guardarlo en x_k^*, a partir del cual determinar y_{k+1}^*.

8. Si $k = n$ parar, sino aumentar k en 1 y volver a (7).

Luego, los valores de x_k^*, con $k = 1, \ldots, n$ corresponde a las decisiones óptimas a tomar en cada etapa y $f_1^*(y_1^*)$ corresponde al valor del beneficio en la solución óptima.

2. (4 ptos.)

Una cadena de supermercados posee cuatro locales ya funcionando y contrató cuatro vendedores nuevos para asignar a dichos locales. La siguiente tabla muestra el beneficio adicional en unidades monetarias (UM) por mes para cada local dado el número de vendedores adicionales correspondientes.

	1 vendedor	2 vendedores	3 vendedores	4 vendedores
Local 1	10	15	20	20
Local 2	5	6	7	8
Local 3	11	16	17	17
Local 4	8	12	22	22

Por ejemplo asignar dos vendedores adicionales al local 1 genera 15 UM adicionales por mes.

Se busca una asignación óptima, es decir una asignación que maximice el beneficio adicional.

e) Trate de reducir la complejidad del problema aplicando un análisis previo. Justifique su decisión.

La estrategia de contratar 4 vendedores es una estrategia dominada por poner 1 vendedor en cada local, porque por ejemplo, si pongo los 4 vendedores disponibles en 1 solo local, a lo más tendré un beneficio extra de 22 (si los coloco a todos en el local 4). Mientras que si pongo a 1 en cada local tendré un beneficio extra de 34.

Además se ve que tener 4 vendedores extra aportan casi lo mismo a que si se contratan 3 vendedores, luego se puede simplificar la última columna de la tabla del enunciado.

f) Identifique estados, etapas, variables de decisión, la función de transformación y la función de recursión.

Versión Sin eliminar información.

Etapas: cada local k= 1,2,3,4

Variable de estado: Yk = cuántos vendedores quedan disponibles al comienzo de etapa k

Variable de decisión: Xk = cuántos vendedores asigno a cada local

Recurrencias:

Yk+1 = Yk – Xk

Fk(Yk) = Máx {Uk(Xk) + fk+1(Yk+1)} s.t 0 < Xk < Yk

Condiciones de Borde

Y1 = 4 ; f_5 (Y_5) = 0

Ojo, al usar la versión simplificada, se tiene que el Yk

g) Resuelve el problema simplificado aplicando programación dinámica. Si no logra simplificar el problema resuelve el problema original aplicando programación dinámica.

Original

Y4	X4=0	X4=1	X4=2	X4=3	X4=4	X4=	f4(y4)
0	0					0	0
1	0	8				1	8
2	0	8	12			2	12
3	0	8	12	22		3	22
4	0	8	12	22	22	3 ó 4	22

Y3	X3=0	X3=1	X3=2	X3=3	X3=4	X3=	f3(y3)
0	0					0	0
1	8	11				1	11
2	12	19	16			1	19
3	22	23	24	17		2	24
4	22	33	28	25	17	1	33

Y2	X2=0	X2=1	X2=2	X2=3	X2=4	X2=	f2(y2)
0	0						
1	11	5				0	11
2	19	16	6			0	19
3	24	24	17	7		0 ó 1	24
4	33	29	25	18	8	0	33

Y1	X1=0	X1=1	X1=2	X1=3	X1=4	X1=	f1(y1)
4	33	34	34	31	20	1 ó 2	34

X1 = 1 -> Y2=3 -> X2=0 -> Y3=3 -> X3=2 -> Y4=1 ->X4= 1
X2=1 -> Y3=2 -> X3=1 -> Y4=1 ->X4= 1

X1= 2 -> Y2=2 -> X2=0 -> Y3=2 -> X3=1 -> Y4=1 ->X4= 1

Nota:
Para resolver la forma resumida (al usar la simplificación de parte a)). Pero debiera obtener el mismo valor 34.

h) ¿Cuál(es) es (son) la(s) política(s) óptima(s)?

Existen 3 políticas óptimas:

1) Contratar 1 en local 1, 0 en el local 2, 2 en el local 3 y 1 en el local 4
2) Contratar 1 en local 1, 1 en local 2, 1 en local 3 y 1 en local 4.
3) Contratar 2 en local 1, 0 en el local 2, 1 en el local 3 y 1 en local 4

Pregunta 3:

Consideremos el problema que enfrenta una empresa de envíos de carga aérea. En general la industria cobra una tarifa por unidad de masa transportada, por ejemplo en [kg], por lo tanto la empresa busca maximizar la cantidad de masa que carga en cada avión. Sin embargo, la disposición de los contenedores de carga en las áreas de carga de un avión afecta la posición de su centro de gravedad, lo que impacta la eficiencia de su vuelo. Por lo tanto, la empresa también desea que la carga quede balanceada para que el avión vuele más seguro, más rápido y utilizando menos combustible. El propósito de este problema es optimizar el layout de los contenedores cargados en el área de carga de un avión considerando estos objetivos en conflicto. Para simplificar la situación se tomará en cuenta sólo la posición del centro de gravedad a través del eje longitudinal del avión (a lo largo de éste), ya que el balance lado a lado posee una importancia marginal.

Existe un conjunto C de contenedores que podrían ser cargados en un avión, tal que la masa del contenedor $i \in C$ es de M_i. De estos un subconjunto $I \subseteq C$ debe ser cargado si o si en el avión (el resto podría quedar en tierra esperando el siguiente vuelo).

El avión posee un conjunto K de áreas de carga y un conjunto H de compartimientos. Cada área de carga $k \in K$ está dividida en un conjunto H_k de compartimientos, donde se pueden almacenar los contenedores con carga, tal que $H = \bigcup_{k \in K} H_k$ y $\bigcap_{k \in K} H_k = \phi$. De acuerdo a las regulaciones internacionales, para calcular el centro de gravedad del avión, se debe suponer que la masa de todos los contenedores de un mismo compartimiento está concentrada en el centro geométrico del compartimiento. Por lo tanto, se busca asignar cada contenedor a un único compartimiento del avión (si no es asignado, se queda en tierra). La masa del avión antes de realizar la carga de contenedores es M_0, el máximo de masa que soporta el área de carga $k \in K$ es de $M_{\max}^k$ y el máximo de masa que soporta el avión es de $M_{\max}$. La Posición del centro de gravedad del avión antes de realizar la carga de contenedores es P_0 (longitudinal) y la posición del centro geométrico del compartimiento $h \in H$ es P_h (longitudinal). La empresa ha definido que la posición (longitudinal) ideal del centro de gravedad del avión luego de la carga es de $\overline{P}$ y se permitirá como máximo que la posición (longitudinal) que puede alcanzar el centro de gravedad del avión luego de la carga pueda desviarse en $\pm\varepsilon$.

Cada compartimiento $h \in H$ está compuesto por N_h celdas, donde N_h es par. Para simplificar la situación se supondrá que en el compartimiento $h \in H$ existen 2 celdas a lo ancho y $\frac{1}{2}N_h$ a lo largo del avión. Además, existen 2 tipos de contenedores. Los contenedores tipo 1 utilizan 1 celda de cualquier compartimiento, en cambio los contenedores tipo 2 utilizan 2 celdas de cualquier compartimiento. El conjunto $T_1 \subseteq C$ contiene todos los

contenedores del tipo 1 y $T_2 \subseteq C$ todos los contenedores del tipo 2 ($T_1 \cup T_2 = C$ y $T_1 \cap T_2 = \phi$).

Existe un conjunto A de pares (i,h) que especifica que el contenedor $i \in C$ debe ubicarse en el compartimiento $h \in H$, en caso de ser cargado al avión, y un conjunto E de pares (i,j) que especifica que el contenedor $i \in C$ no puede ubicarse en el mismo compartimiento que el contenedor $j \in C$, si ambos son cargados al avión.

a) (5 ptos.)

Plantee un modelo de programación lineal que permita decidir la ubicación de los contenedores a lo largo de avión de modo maximizar la cantidad de masa que este transporta satisfaciendo todas los requerimientos de balance carga definidos por la empresa.

Hint: En un sistema de masas discreto, donde el i-ésimo elemento posee una masa m_i y está ubicado en la posición $\vec{r}_i$ con respecto al eje de referencia asumido, el centro de gravedad puede calcularse como: $\frac{\sum_i (\vec{r}_i \cdot m_i)}{\sum_i m_i}$

Solución

Variables de Decisión:

Xih = $\begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ Si el contenedor i se ubica en compartimiento h

Restricciones:

4) **Naturaleza de las variables** : Xih $\in$ {0,1} $\forall i \in$ C, $\forall h \in$ H

5) **Contenedor i de C, está a lo más una vez en h**: $\sum_{h \in H} Xih \leq 1 \quad \forall i \in C$

3) **Contenedor i de I, debe estar en algún h solo 1 vez**: $\sum_{h \in H} Xih = 1 \quad \forall i \in I$

4) **No sobrepasar Masa de área k**: $\sum_{i \in C} \sum_{h \in Hk} Mi * Xih \leq M^{k}_{máx}$

5) **No sobrepasar la Masa del Avión**: $\sum_{i \in C} \sum_{h \in H} Mi * Xih \leq$ $M_{máx}$

El centro de gravedad se puede escribir como:

$$Cg = \frac{\sum_{h \in H} \sum_{i \in C} PhMiXih + MoPo}{Mo + \sum_{h \in H} \sum_{i \in C} MiXih}$$

Ojo que esto es una expresión no lineal. Pero se debe imponer que

$$\bar{P} - \varepsilon \leq Cg \leq \bar{P} + \varepsilon$$

Con esto podemos escribirla en forma lineal de la siguiente manera:

6) $(\bar{P} - \varepsilon)(Mo + \sum_{h \in H} \sum_{i \in C} MiXih) \leq \sum_{h \in H} \sum_{i \in C} PhMiXih + MoPo$

7) $(\bar{P} + \varepsilon)(Mo + \sum_{h \in H} \sum_{i \in C} MiXih) \geq \sum_{h \in H} \sum_{i \in C} PhMiXih + MoPo$

8) $\sum_{i \in T1} Xih + 2 * \sum_{i \in T2} Xih \leq Nh \quad \forall h \in H$

9) $\sum_{n \in H \setminus \{h\}} Xin = 0 \quad \forall (i,h) \in A$

10) Xih + Xjh $\leq 1 \quad \forall (i,j) \in E$, $\forall h \in H$

Función Objetivo.

Máx $\sum_{i \in C} \sum_{h \in H} Mi * Xih$

b) (1 pto.)

Suponga ahora que existe un conjunto R de pares (n,h) que especifica que el compartimiento $n \in H$ no puede utilizarse si no se utiliza previamente el compartimiento $h \in H$ y un conjunto W de pares (n,h) que especifica que el compartimiento $n \in H$ sólo puede utilizarse si se ha utilizado completamente la capacidad del compartimiento $h \in H$ (sin celdas disponibles).
¿Cómo modificaría su modelo para incluir esta situación?

Solución:

Ahora se agrega la variable de decisión

Yh = $\begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ Si se usa compartimento h

Restricciones:

1) Yn $\leq Yh \qquad \forall (n,h) \in R$

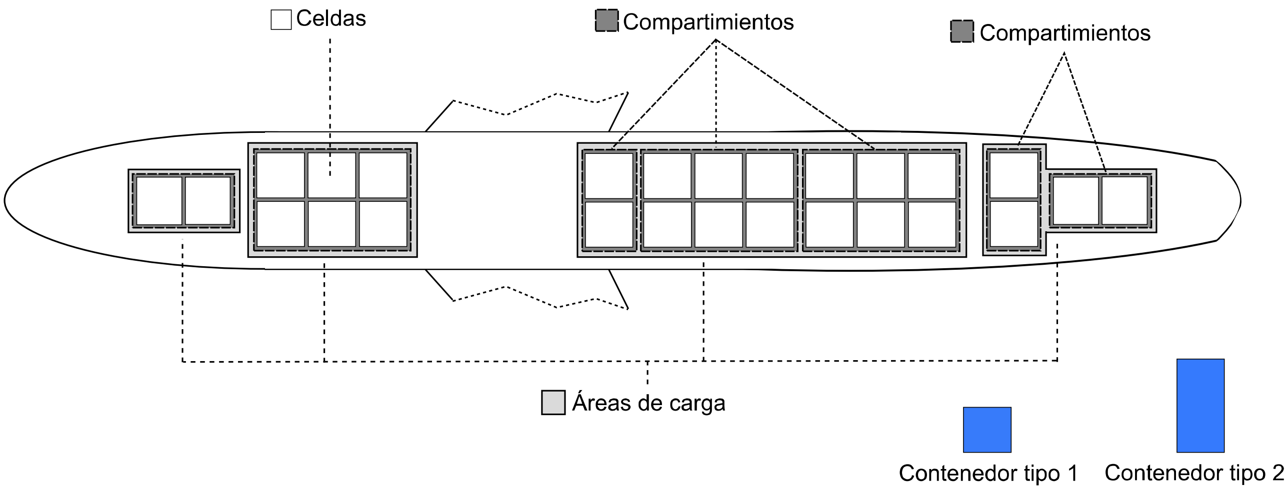
2) Yn $\leq \dfrac{\sum_{i \in T1} Xih + 2 * \sum_{i \in T2} Xih}{Nh} \qquad \forall (n,h) \in W$

Además se debe poner:

3) $\sum_{i \in C} Xih \leq Yh \quad \forall h \in H$

Nota: también se puede modificar la restricción 8

$$\sum_{i \in T1} Xih + 2 * \sum_{i \in T2} Xih \leq Nh * Yh$$



Dudas Y/o Consultas a:

Ignacio Escobar Rojas.

igescoba@ing.uchile.cl