

**IN34A – Optimización
CTP N°3
29 de Octubre, 2008**

Don Zippy, un humilde y emprendedor microempresario, está planeando adquirir la franquicia de la prestigiosa cadena de comida rápida estadounidense "McChrono". Don Zippy tiene todo listo: la negociación está en una etapa avanzada, por lo que desea desde ya saber cuántas unidades de cada una de sus hamburguesas va a producir.

La franquicia le da derecho a producir 2 de las hamburguesas de McChrono: "McChrono Salvaje" y "McChrono Extra Queso". Cada unidad de McChrono Salvaje requiere de 3 hamburguesas para su preparación, mientras que una unidad de McChrono Extra Queso requiere sólo una. Asimismo, una unidad de McChrono Salvaje necesita de 2 láminas de queso, mientras que una de McChrono Extra Queso requiere de 5 láminas. Don Zippy considera que los demás ingredientes son despreciables para su cálculo, y cuenta con un total de 200 hamburguesas y 300 láminas de queso.

Don Zippy planea vender cada unidad de McChrono Salvaje en \$1000, mientras que cada unidad de McChrono Extra Queso costará \$1500.

- 1) (0,5 pts.) Plantee el modelo de programación lineal entera que debe resolver Don Zippy para maximizar sus ingresos.
- 2) (2,5 pts.) Entregue la solución del problema usando el algoritmo de Branch & Bound, justificando por qué dejó de ramificar en cada nodo.

Don Zippy debe viajar a Estados Unidos para cerrar el trato con los ejecutivos de McChrono. El microempresario ya ha empacado gran parte de sus pertenencias, pero aún le queda una mochila pequeña de 3 litros de capacidad, y debe decidir qué artículos llevará en ella. Los artículos que podría llevar en la mochila son: Su desodorante favorito que pesa 0,3lt, su notebook que pesa 2lt, un libro que pesa 1,1 lt y una radio que pesa 1,4lt. Considere que las utilidades de llevar cada artículo son 2, 9, 3 y 5, respectivamente.

- 3) (0,5 pts.) Plantee el modelo de programación lineal entera que ayude a Don Zippy a decidir qué artículos llevar en su viaje.
- 4) (2,5 pts.) Entregue la solución del problema usando el algoritmo de Branch & Bound, justificando por qué dejó de ramificar en cada nodo.

Solución:

1) Variables de decisión:

X = Cantidad de hamburguesas McChrono Salvaje
Y = Cantidad de hamburguesas McChrono Extra Queso

Restricciones:

1. Carne:

$$3*X + Y \leq 200$$

2. Queso:

$$2*X + 5*Y \leq 300$$

3. Naturaleza de las variables

X, Y enteras positivas

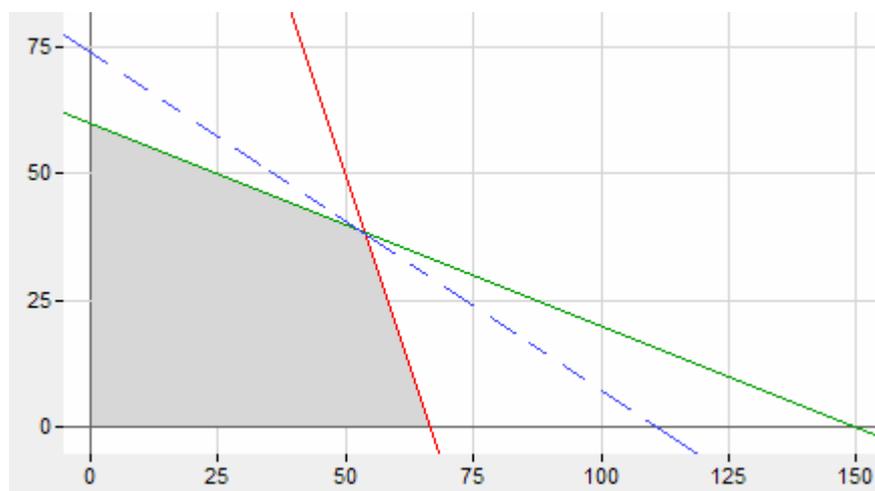
Función objetivo:

$$\text{Max } z = 1000*X + 1500*Y$$

2) Debemos resolver el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 1000x + 1500y \\ \text{s.a. } &3x + y \leq 200 \\ &2x + 5y \leq 300 \\ &x, y \text{ enteros positivos} \end{aligned}$$

Gráficamente:

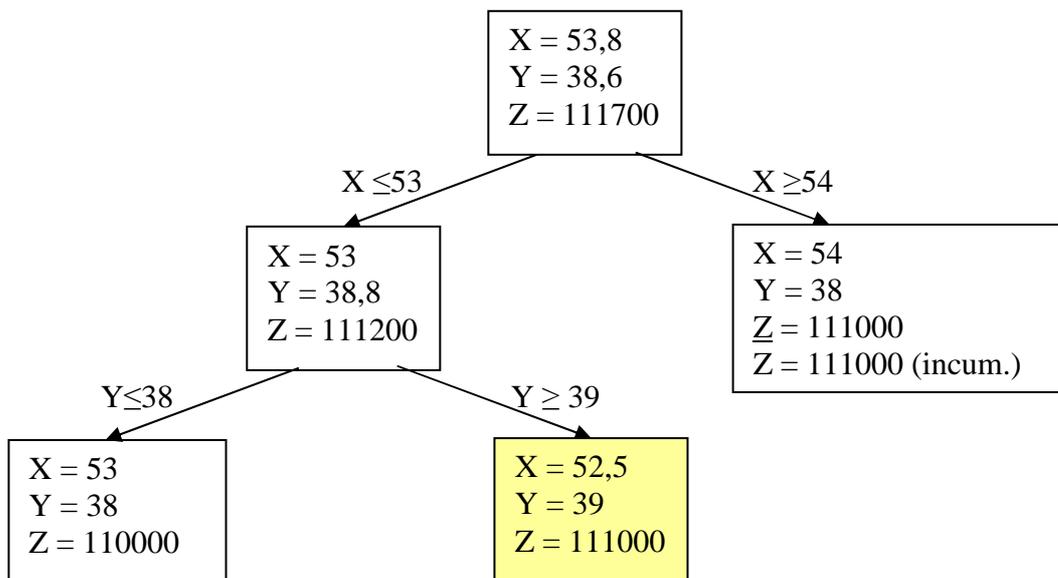


Primero se resuelve el problema relajado, que es la intersección de las dos restricciones, así se obtiene: $X = 53,8$ e $Y = 38,6$

Luego se proceda a la ramificación, comenzando con el incumbente $Z = -\infty$.

La resolución se muestra en el árbol siguiente, es importante aclarar que cada nodo contiene además de la restricción que se especifica en el mismo, las restricciones de toda la rama superior a él.

La solución entera es $X = 54$, $Y = 38$ y $Z = 111000$.



Observaciones:

- 1.- En el nodo amarillo se dejó de ramificar pues en él, el valor de Z es igual que el incumbente.
- 2.- En los demás nodos se dejó de ramificar por haber llegado a una solución entera.
- 2.- Se puede comenzar a ramificar por la variable Y , y se debe llegar al mismo resultado.

3) Variables de decisión:

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{Si lleva el desodorante} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

$$X_3 = \begin{cases} 1 & \text{Si lleva el libro} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} 1 & \text{Si lleva el notebook} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

$$X_4 = \begin{cases} 1 & \text{Si lleva la radio} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Restricciones:

Capacidad.

$$0.3X_1 + 2X_2 + 1.1X_3 + 1.4X_4 \leq 3$$

Naturaleza de las variables.

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \in \{0,1\}$$

Función objetivo:

$$\text{Max}\{2X_1 + 9X_2 + 3X_3 + 5X_4\}$$

4) Debemos resolver el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 2X_1 + 9X_2 + 3X_3 + 5X_4 \\ \text{s.a. } &0.3X_1 + 2X_2 + 1.1X_3 + 1.4X_4 \leq 3 \\ &X_1, X_2, X_3, X_4 \in \{0,1\} \end{aligned}$$

Calculamos la relación beneficio/volumen para cada artículo:

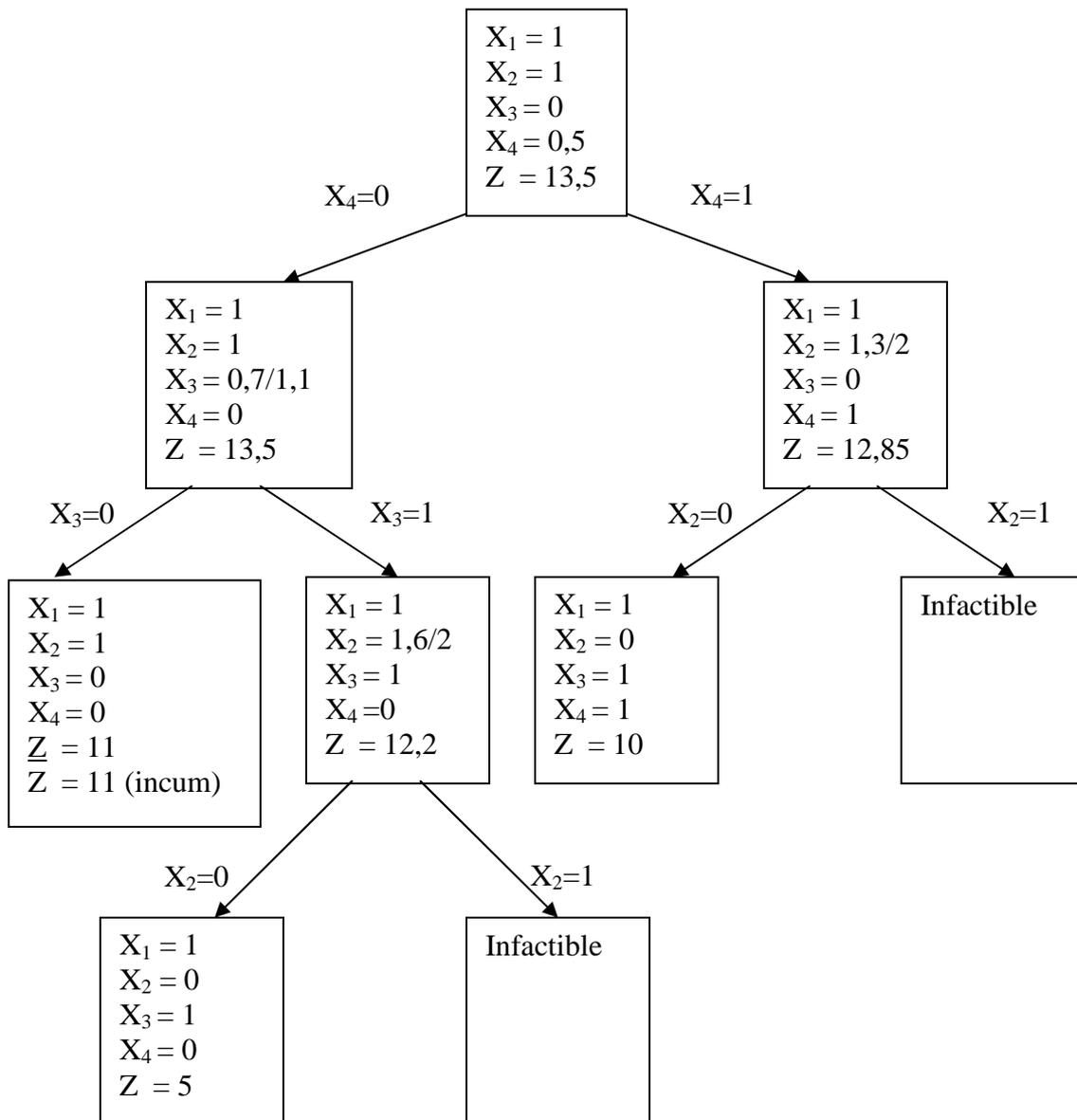
$$\text{Desodorante: } 2/0,3 = 6,6$$

$$\text{Notebook: } 9/2 = 4,5$$

$$\text{Libro: } 3/1,1 = 2,7$$

$$\text{Radio: } 5/1,4 = 3,5$$

Para llenar la mochila, se meten primero los artículos de mayor relación beneficio/volumen. De aquí se obtiene la solución relajada, y el árbol queda como sigue:



El óptimo es entonces llevar el desodorante y el notebook, con un beneficio de $Z = 11$.

Dudas y/o comentarios a:
 André Carboni
andre@carboni.cl