Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN34A: Clase Auxiliar

Análisis Post Optimal y Algoritmo de Ramificación y Acotamiento

Marcel Goic F.[1]

[1]Esta es una versión bastante preliminar por lo que puede contar con numerosas faltas de ortografía y errores no forzados. Si encuentran alguno favor de denunciarlo a mgoic@dii.uchile.cl

1. Algoritmo de Ramificación y Acotamiento

Hasta el momento solo hemos visto métodos de resolución de problemas lineales continuos. Sin embargo es muy frecuente que la naturaleza del problema nos diga que las variables son enteras o binarias. Una alternativa es simplemente aproximar la solución hacia el entero mas cercano, pero esta estratégia podría ser bastante mala como de hecho ocurre para las variables binarias.

El algoritmo de ramificación y acotamiento (o de branch and bound) comienza con una relajación del problema (no considerar restricciones de integralidad) y construye un árbol con soluciones enteras particionando el conjunto de soluciones factibles de modo de descartar soluciones fraccionarias. Sin embargo, este solo hecho de descomponer nos puede llevar a un problema inmanejable por lo que debemos *podar* el árbol de manera inteligente.

1.1. Problema Inicial.

Sin perdida de generalidad, supongamos que el problema que a resolver es de la forma:

$$(P)\ \text{mín}\ z = c^t \cdot x$$

$$\text{s.a}\quad A \cdot x \leq b$$
$$x \in \mathbb{N}$$

Luego, comenzaremos el algoritmo con un problema relajado en que no consideramos las restricciones de integralidad:

$$(P_0)\ \text{mín}\ z = c^t \cdot x$$

$$\text{s.a}\quad A \cdot x \leq b$$
$$x \in \mathbb{R}^+$$

Además definiremos $\bar{z}$ como incumbente o mejor solución entera que inicialmente tomaremos como $\bar{z} = \infty$.

Observación: Si el problema es binario, no consideraremos las restricciones de $x_i \in \{0, 1\}$, pero debemos agregar las de $0 \leq x_i \leq 1$.

1.2. Ramificación.

Supongamos que en algún nodo del árbol tenemos un problema (P_k) con conjunto de restricciones R_k. y solución óptima tal que $x_i^* = f$ con f un número fraccionario. Entonces, **ramificaremos** este problema en otros 2 problemas en que agregaremos a cada uno una restricción que le impida tomar el valor $x_i = f$:

$$(P_k^-)\ \text{mín}\ z = c^t \cdot x \qquad (P_k^+)\ \text{mín}\ z = c^t \cdot x$$

$$\text{s.a}\quad x \in R_k \qquad \text{s.a}\quad x \in R_k$$
$$x_i \leq \lfloor f \rfloor \qquad x_i \geq \lfloor f \rfloor + 1$$

1.3. Acotamiento.

En principio, con el proceso de ramificación tendremos en las ramas finales del árbol, todas las soluciones factibles enteras del problema original. Sin embargo, un nodo del árbol puede no requerir mas ramificaciones, en cuyo caso se dice que se **acota** (poda) esa rama. Esto puede ocurrir porque:

1. El problema en el nodo es infactible por lo que todos los subproblemas generados a partir de él serán infactibles tambien.
2. El problema en el nodo tiene un valor óptimo z^* peor que la mejor solución entera encontrada $z^* \geq \bar{z}$, por lo que todos los subproblemas generados a partir de él seran peores.
3. El problema en el nodo tiene una solución entera. Si el valor óptimo z^* es mejor que la mejor solución encontrada hasta el momento $z^* \leq \bar{z}$, actualizamos el incumbente como $\bar{z} = z^*$

1.4. Resumen Algoritmo.

1. L=$\{(P_0)\}$
2. Escoger un problema (nodo) de la lista L.
   - Si L=$\varnothing$ Terminar:
     - Si $\bar{z} = \infty$ el problema es infactible.
     - Si $\bar{z} \leq \infty$ la solución óptima del problema entero es $(\bar{x}, \bar{z})$.
   - De lo contrario, sea (P) el problema escogido.
3. Resolver (P)
   - Si (P) no factible, eliminarlo de la lista L, lo que es equivalente a podar la rama del árbol de soluciones que nace en (P). Ir a 2.
   - Si (P) factible, sea $\hat{z}$ el valor óptimo y $\hat{x}$ una solución óptima.

- Si $\hat{z} \geq \bar{z}$ eliminar el problema (P) de la lista. Ir a 2.
- Si $\hat{z} \leq \bar{z}$ y si $\hat{x}$ cumple integralidad, eliminar el problema (P) de la lista y actualizar el incumbente: $\bar{z} = \hat{z}$ y $\bar{x} = \hat{x}$. Ir a 2.
- Si $\hat{z} \leq \bar{z}$ y Si $\hat{x}$ no cumple integralidad, sea k tal que x_k fraccionario. Ramificar el problema (P) creando dos nuevos problemas (P^+) y (P^-). El problema (P^-) se construye agregando la restricción $x_k \leq \lfloor \hat{x_k} \rfloor$ al problema (P) y (P^+) se construye agregando a las restricciones de (P) la restricción $x_k \geq \lfloor \hat{x_k} \rfloor + 1$. Ambos problemas se agregan a la lista L, i.e L=L $\bigcup\{(P^-), (P^+)\}$. Ir a 2.

2. Análisis Post Optimal

En la formulación de un problema de optimización, utilizamos una gran cantidad de parametrosque asumimos como constantes y conocidos. Esto último no es necesariamente cierto por lo cual nos interesará saber como varía la solución óptima si varía alguno de los parámetros del problema. Análisis post optimal consiste en encontrar esta nueva solución óptima aprovechando la solución óptima actual evitando así empezar todo de nuevo.

La filosofía general es aprovechar la forma canónica óptima y ver si al hacer algún cambio la solución sigue siendo fatible y óptima. En caso de no serlo, debemos continuar con las iteraciones simplex. Así por ejemplo y sin intentar ser exhaustivo:

- **Cambio en c_i:** El espacio de soluciones factibles no cambia por lo que la base (vértice) sigue siendo factible, pero podría no ser óptima. Entonces debemos recalcular los costos reducidos para aplicar el criterio de óptimalidad:
  - Si $\bar{c}_i \geq 0 \, \forall x_i$ no básico la base sigue siendo óptima.
  - Si $\exists \, x_i$ no básico tal que $\bar{c}_i < 0$ la base ya no es óptima: la variable x_i debe entrar a la base para poder seguir iterando.
- **Cambio en b_j:** El punto podrá ser infactible. Si existe variable básica $x_i < 0$, lo que podemos hacer es sacarla de la base fijandola en 0 haciendo entrar otra variable.

3. Análisis post optimal en el marco de un algoritmo de ramificación y acotamiento

¿Qué utilidad podría tener lo que vimos de análisis post optimal en un esquema de branch and bound?. La respuesta es casi evidente. En un esquema de branch and bound tendremos que resolver muchos problemas de optimización, pero un problema *hijo* difiere de un problema *padre* en el arbol de problemas solo por la adición de una restrición. Luego podemos

aprovechar la resolución del problema *padre* para resolver el problema *hijo*. En efecto, la adición de una restricción puede verse como la adición de una variable en el problema dual. Luego, calculamos el costo reducido de dicha variable en el dual y si cumple con el criterio de optimalidad el punto anterior sigue siendo óptimo y si no debemos introducir la nueva variable en la base y seguir iterando con simplex.

4. Problemas

4.1. Problema 1

Resolver el siguiente problema usando el algoritmo de ramificación y acotamiento:

$$\begin{array}{lrcl} & \text{mín } z = -5x_1 - 8x_2 & & \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 & \leq & 45 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \text{ y enteros} \end{array}$$

Solución

Lo primero que debemos hacer es inicializar el incumbente en $\bar{z} = \infty$ e inicializar la lista de problemas pendientes con la relajación lineal del problema:

$$\begin{array}{lrcl} & (P_0)\ \text{mín } z = -5x_1 - 8x_2 & & \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 & \leq & 45 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Como es el único problema que hay en la lista, lo resolvemos obteniendo la siguiente solución óptima: $z_0 = -41{,}25$; $x_1 = 2{,}25$ y $x_2 = 3{,}75$ [2]. Notamos que las 2 variables son fraccionarias por lo que podemos tomar cualquiera de ellas como variable de ramificación. Escojamos la variable x_2 para ramificar generandose así los siguientes problemas:

[2]En problemas reales, esta relajación debe ser resuelta mediante simplex, pero con fines académicos podemos resolver gráficamente

$$(P_1)\ \text{mín}\ z = -5x_1 - 8x_2 \qquad (P_2)\ \text{mín}\ z = -5x_1 - 8x_2$$

$$\begin{array}{rrcl} \text{s.a} & x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 & \leq & 45 \\ & x_2 & \geq & 4 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rrcl} \text{s.a} & x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 & \leq & 45 \\ & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Tenemos ahora que la lista esta compuesta por 2 problemas pendientes: L=$\{(P_1), (P_2)\}$. Sin embargo, aún no encontramos una solución entera por lo que no actualizamos el incumbente.

Resolviendo primero (P_1), se tiene que $z_1 = -41$; $x_1 = 1{,}8$ y $x_2 = 4$, que tampoco es solución entera por lo que ramificamos nuevamente por variable x_1, dando origen a los problemas:

$$(P_3)\ \text{mín}\ z = -5x_1 - 8x_2 \qquad (P_4)\ \text{mín}\ z = -5x_1 - 8x_2$$

$$\begin{array}{rrcl} \text{s.a} & x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 & \leq & 45 \\ & x_2 & \geq & 4 \\ & x_1 & \geq & 2 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rrcl} \text{s.a} & x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 & \leq & 45 \\ & x_2 & \geq & 4 \\ & x_1 & \leq & 1 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Tenemos como problemas pendientes L=$\{(P_2), (P_3), (P_4)\}$ y aun ninguna solución entera. Escogemos (P_3) para ser resuelto obteniendo que es infactible. Esto significa que eliminamos a (P_3) sin ser ramificado.

Ahora es necesario escoger entre los elementos de la lista pendientes L=$\{(P_2), (P_4)\}$. Escogemos (P_4) para ser resuelto obteniendo que $z_4 = -40{,}55$; $x_1 = 1$ y $x_2 = 4{,}44$. Nuevamente no tenemos una solución entera y por lo tanto debemos ramificar según variable x_2 dando paso a los siguientes problemas:

$$(P_5)\ \text{mín}\ z = -5x_1 - 8x_2 \qquad (P_6)\ \text{mín}\ z = -5x_1 - 8x_2$$

$$\begin{array}{rrcl} \text{s.a} & x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 & \leq & 45 \\ & x_2 & \geq & 4 \\ & x_1 & \leq & 1 \\ & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rrcl} \text{s.a} & x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ & 5x_1 + 9x_2 & \leq & 45 \\ & x_2 & \geq & 4 \\ & x_1 & \leq & 1 \\ & x_2 & \geq & 5 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Notamos que el espacio factibles de (P_6) es solo el punto $(x_1 = 0, x_2 = 5)$ y el de (P_5) es el segmento de recta que une el punto $(0, 4)$ con el punto $(1, 4)$. Si se resuelve (P_5) se obtiene la

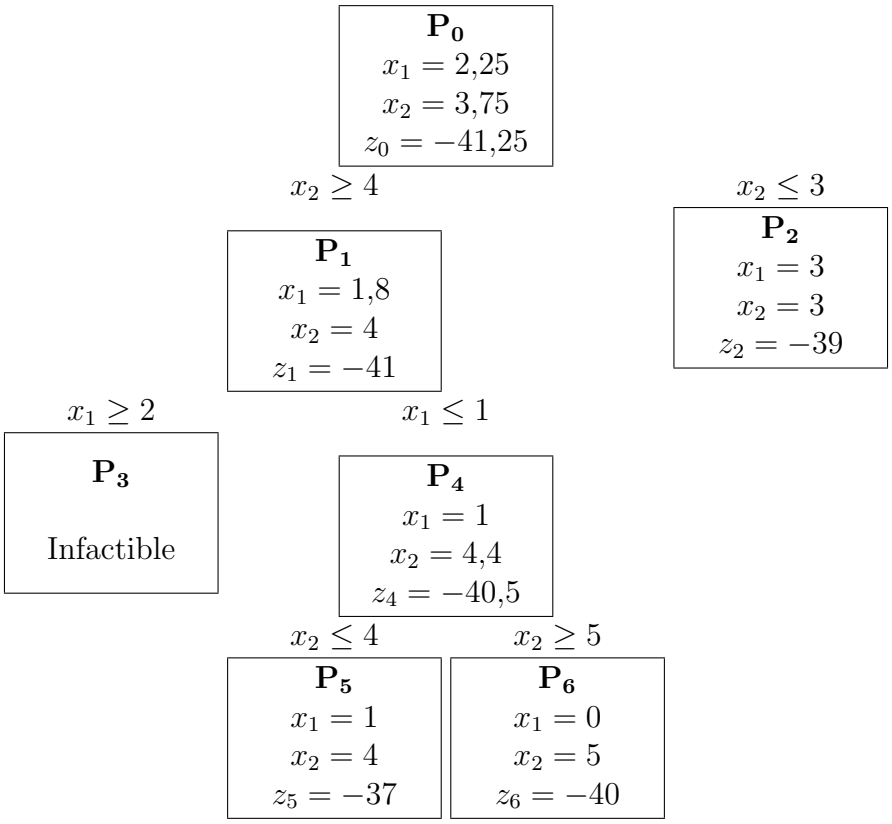
primera solución entera: $z_5 = -37$; $x_1 = 1$ y $x_2 = 4$ por lo que actualizamos el incumbente: $\bar{z} = -37$.

Ahora la lista es L=$\{(P_2), (P_6)\}$. Resolviendo (P_6) se tiene que $z_6 = -40$; $x_1 = 0$ y $x_2 = 5$, que es una solución entera mejor que la anterior por lo que actualizamos el incumbente: $\bar{z} = -40$.

Resolviendo finalmente el último problema de la lista: (P_2) se obtiene que $z_2 = -39$; $x_1 = 3$ y $x_2 = 3$, que es una solución entera peor que la del incumbente por lo cual no es necesario ramificar.

Como no quedan problemas en la lista, hemos encontrado que el óptimo entero del problema viene dado por $z^* = -40$; $x_1^* = 0$ y $x_2^* = 5$

El árbol final es el que se muestra en la figura.



Observación: Si la solución de P_2 hubiera tenido $z_6 = -39$ y solución fraccionaria tampoco hubieramos ramificado porque hubiese tenido un valor de la función objetivo peor que la del incumbente por lo que todos los problemas hijos tendrian una solución peor que la mejor que ya tenemos.

Observación: Notar la gran cantidad de cálculos que deben realizarse para la resolución de

un problema entero incluso para problemas de tamaño reducido. En la practica, la restricciones de cálculo computacional están dadas por el número de variables enteras que tiene el problema. Tanto es así que muchos problemas no pueden ser resueltos con un computador razonable por lo cual se construyen heurísticas de redondeo.

$\odot$

4.2. Problema 2

Sea el siguiente problema lineal:

$$\text{máx } z = 8x_1 + 14x_2 + 30x_3 + 50x_4$$

$$\begin{array}{rrcc} \text{s.a} & x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 16x_4 & \leq & 800 \\ & 1{,}5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 & \leq & 1000 \\ & 0{,}5x_1 + 0{,}6x_2 + x_3 + 2x_4 & \leq & 340 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Para resolver el problema se agregan como variables de holgura x_5, x_6 y x_7 a la primera, segunda y tercera restricción respectivamente. Se sabe que la base óptima es $B = [a_{,2}, a_{,1}, a_{,7}]$ cuya inversa resulta ser:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0{,}1 & -0{,}4 & 1 \end{bmatrix}$$

Con la información anterior responda las siguientes preguntas considerando cada una de ellas independiente de las demás.

1. Suponga que $c_1 = 8$ se cambia por $c_1 = 9$. Analice si existe un cambio en los siguientes aspectos.
   - El conjunto de variables básicas.
   - El valor de las variables básicas.
   - El valor de la función objetivo.
   - El valor de los precios sombra. En caso afirmativo, determine para cada precio sombra el valor antiguo y el nuevo.
2. Suponga que $b_2 = 1000$ se cambia por $b_2 = 900$. Analice si existe un cambio en los siguientes aspectos.

- El conjunto de variables básicas.
- El valor de las variables básicas.
- El valor de la función objetivo.
- El valor de los precios sombra. En caso afirmativo, determine para cada precio sombra el valor antiguo y el nuevo.

3. Suponga que $c_3 = 30$ se cambia por $c_3 = 60$. Analice si cambia el óptimo del problema. En caso afirmativo, encuentre el nuevo óptimo.

Solución

1. Al cambiar el costo de una variable básica pueden cambiar los costos reducidos de todas las variables no básicas. Si alguno de ellos es negativo la base ya no será óptima (problema de minimización).

   Con los antiguos costos la condición de optimalidad (forma estandar) venia dada por:

$$\begin{aligned}
\bar{c}_R &= c_R - c_B B^{-1} R \\
(\bar{c}_3, \bar{c}_4, \bar{c}_5, \bar{c}_6) &= (c_3, c_4, c_5, c_6) - (c_2, c_1, c_7) B^{-1} R \\
&= (-30, -50, 0, 0) - (-14, -8, 0) \begin{pmatrix} 1{,}5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0{,}1 & -0{,}4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 16 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (28, 40, 5, 2) > 0.
\end{aligned}$$

   Y por tanto la base era óptima. Ahora, con los nuevo costos los cálculos son completamente análogos, pero cambiando -8 por -9:

$$\begin{aligned}
\bar{c}_R &= c_R - c_B B^{-1} R \\
(\bar{c}_3, \bar{c}_4, \bar{c}_5, \bar{c}_6) &= (c_3, c_4, c_5, c_6) - (c_2, c_1, c_7) B^{-1} R \\
&= (-30, -50, 0, 0) - (-14, -9, 0) \begin{pmatrix} 1{,}5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0{,}1 & -0{,}4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 16 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (16, 18, 3, 4) > 0.
\end{aligned}$$

   Y por tanto la base sigue siendo óptima (el criterio de optimalidad se sigue cumpliendo). De esta manera:

   - No cambia el conjunto de variables básicas.

- No cambia el valor de las variables básicas.
- Solo cambia el valor de la función objetivo a -6400.
- Además, por el teorema fundamental de dualidad, sabemos que

$$\frac{\partial z^*}{\partial b_i} = c_B B^{*-1}_{\cdot i} = \pi_i^* = y_i^*$$

Luego, si cambia c_B tambien cambiaran las variables duales óptimas y_i^*.
Los antiguos valores venían dados por:

$$\begin{aligned}(y_1^*, y_2^*, y_3^*) &= (-14, -8, 0) \begin{pmatrix} 1{,}5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0{,}1 & -0{,}4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (5, 2, 0)\end{aligned}$$

Y los nuevos valores vendrán dados por:

$$\begin{aligned}(y_1^*, y_2^*, y_3^*) &= (-14, -9, 0) \begin{pmatrix} 1{,}5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0{,}1 & -0{,}4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (3, 4, 0)\end{aligned}$$

2. Como $\bar{b} = B^{-1}b$, si se cambia el lado derecho b necesariamente cambiará el lado derecho modificado de la última forma canónica $\bar{b}$. Si el nuevo lado derecho modificado es no negativo se mantiene la base óptima, pero cambiará el valor de las variables básicas y por tanto el valor de la función objetivo. Calculemos el valor del nuevo lador derecho modificado:

$$\begin{aligned}\bar{b} &= B^{-1}b \\ &= \begin{pmatrix} 1{,}5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0{,}1 & -0{,}4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 800 \\ 900 \\ 340 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 60 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Luego, se cumple la no negatividad y por tanto la base sigue siendo factible. Entonces:

- No cambia el conjunto de variables básicas.
- Las variables básicas cambian de valor: $x_2 = 300$, $x_1 = 200$ y $x_7 = 60$
- Tambien cambia el valor de la función objetivo, siendo su nuevo valor de -5800.
- Además, como $y^* = c_B B^{-1}$ y no han cambiado ni c_B ni B, entonces las variables duales óptimas (precios sombras) no cambia.

3. Calculamos los nuevos costos reducidos para ver si se sigue manteniendo la condición de optimalidad.

$$\begin{aligned}
\bar{c}_R &= c_R - c_B B^{-1} R \\
(\bar{c}_3, \bar{c}_4, \bar{c}_5, \bar{c}_6) &= (c_3, c_4, c_5, c_6) - (c_2, c_1, c_7) B^{-1} R \\
&= (-60, -50, 0, 0) - (-14, -8, 0) \begin{pmatrix} 1{,}5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0{,}1 & -0{,}4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 16 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (-2, 40, 5, 2) \not> 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la base anterior ya no es óptima y debemos seguir iterando.

- **variable que entra:** $\text{mín}\{c_s | c_s > 0\} = -2$, luego x_3 entra a la base.
- **variable que sale:** Buscamos $\underset{\bar{a_{i3}} > 0}{\text{mín}} \{\frac{\bar{b_i}}{\bar{a_{i3}}}\}$

$$\bar{a}_{\cdot 3} = B^{-1} a_{\cdot 3} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0{,}1 & -0{,}4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -12 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1{,}5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0{,}1 & -0{,}4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 800 \\ 1000 \\ 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 400 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Luego encontramos $\text{mín}\{\frac{200}{11}, \frac{20}{0{,}4}\} = \text{mín}\{18.\bar{18}, 50\} = 18.\bar{18}$ y por tanto x_2 entra a la base.

- La nueva base:

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 4 & 1{,}5 & 0 \\ 3 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 3/22 & -1/11 & 0 \\ -4/11 & 10/11 & 0 \\ -5/22 & -2/11 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos los costos reducidos de esta nueva base para ver si se cumple la condición de optimalidad.

$$\begin{aligned}
\bar{c}_R &= c_R - c_B B^{-1} R \\
(\bar{c}_2, \bar{c}_4, \bar{c}_5, \bar{c}_6) &= (c_2, c_4, c_5, c_6) - (c_3, c_1, c_7) B^{-1} R \\
&= (-14, -50, 0, 0) - (-60, -8, 0) \begin{pmatrix} 3/22 & -1/11 & 0 \\ -4/11 & 10/11 & 0 \\ -5/22 & -2/11 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 16 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0{,}6 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (0.\bar{18}, 43.\bar{45}, 5.\bar{27}, 1.\bar{18}) > 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la base anterior constituye la nueva solución óptima del problema.

$\odot$