INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Leonardo López, Ximena Schultz, Richard Weber

Auxiliares: Fernanda Bravo. André Carboni, Nelson Devia, Ignacio Escobar, Rodrigo Wolf

IN34A – Optimización
Auxiliar Extra Control 2
13 de Octubre, 2008

Problema 1

Considere el siguiente problema:

$$
\begin{aligned}
\text{(P)} \quad & \max z = x_2 \\
& \text{s.a.} \quad -x_1 + x_2 \leq 2 \\
& \qquad 2x_1 + x_2 \leq 4 \\
& \qquad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

1. Calcular el óptimo en forma gráfica.
2. Escribir el problema dual y encontrar su óptimo (sin usar simplex ni análisis gráfico).

Problema 2

Sea el siguiente problema de programación lineal:

$$
\begin{aligned}
\text{(P)} \quad & \min w = 20y_1 + 2y_2 \\
& s.a: \quad 4y_1 + y_2 \geq 3 \qquad (1) \\
& \qquad 5\, y_1 - y_2 \geq 1 \qquad (2) \\
& \qquad y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

1. Formule el problema dual del problema original, al que llamaremos (D).
2. Grafique el problema (D), especificando claramente las restricciones, función objetivo y área factible. Calcule el óptimo.
3. Resuelva el problema (D) utilizando SIMPLEX matricial, comenzando desde el origen.
4. Suponga que se agrega una tercera restricción al problema (D):

$$x_1 + x_2 \geq 1 \qquad (3)$$

   Muestre gráficamente por qué no es posible usar el origen como base inicial. ¿Qué se debe hacer en este caso? (sólo indique, no resuelva).

:

5 Encuentre el óptimo del problema original (P) usando el teorema de holgura complementaria.

Problema 3

Considere el siguiente problema de optimización lineal:

$$
\begin{array}{lll}
(P) & \max & z = x_1 + x_2 + 3x_3 \\
 & s.a & x_1 + x_3 \leq 2 \\
 & & x_2 + x_3 \leq 2 \\
 & & x_3 \geq 1 \\
 & & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

1. Transforme el problema llevándolo a forma estándar.
2. Aplicando Fase I, determine una solución básica factible inicial.
3. Resuelva el problema utilizando Simplex.
4. Indique qué características presenta esta solución óptima:
   i. ¿Es el problema no acotado?
   ii. ¿Existen óptimos alternativos?
   iii. ¿Existen restricciones redundantes?
   iv. ¿Es la solución óptima degenerada?

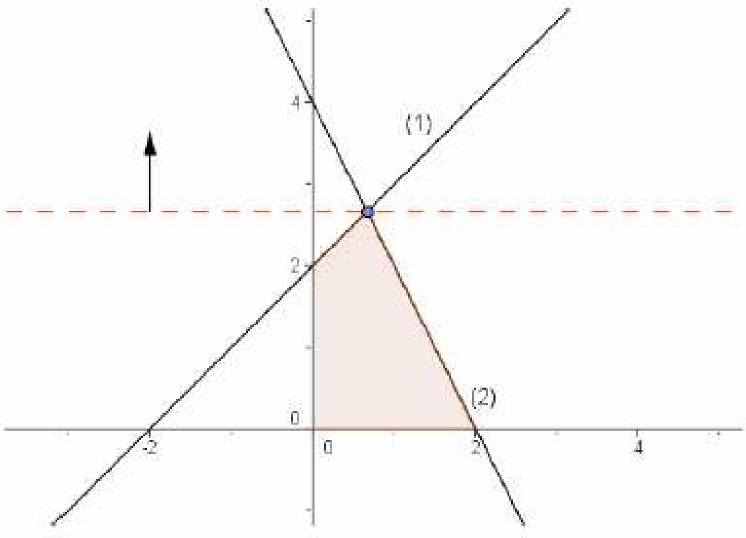
Problema 4

1. Dé una explicación sobre el significado económico del óptimo dual. Justifique la respuesta.
2. Suponga que ha resuelto un problema de programación lineal de restricciones Ax = b y se le avisa que un valor del vector b debe ser modificado. ¿Puede ocurrir que la base óptima del problema original sea factible pero no óptimo en el nuevo problema? Justifique.

Solución:

Pregunta 1:

1)



Luego, X_1*=2/3; X_2*=8/3; Z*=8/3

2) El problema dual está dado por:

$$
\begin{array}{lll}
(D) & \min & w = 2y_1 + 4y_2 \\
 & \text{s.a.} & -y_1 + 2y_2 \geq 0 \\
 & & y_1 + y_2 \geq 1 \\
 & & y_1, y_2 \geq 0
\end{array}
$$

Usando Holgura-Complementaria:

$$
\begin{array}{c}
(-x_1^* + x_2^* - 2)y_1^* = 0 \\
(2x_1^* + x_2^* - 4)y_2^* = 0 \\
(0 + y_1^* - 2y_2^*)x_1^* = 0 \\
(1 - y_1^* - y_2^*)x_2 = 0
\end{array}
$$

Como x_1* y x_2* son distintos de cero, se debe cumplir que:

$$
\begin{array}{c}
Y_1^* - 2y_2^* = 0 \\
1 - y_1^* - y_2^* = 0
\end{array}
$$

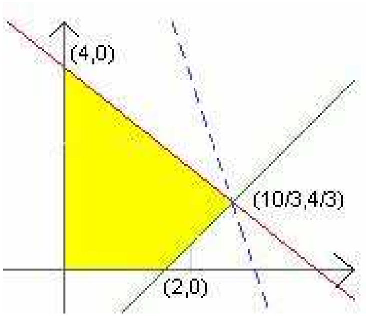
Luego el punto óptimo es: (y_1*, y_2*) = (2/3, 1/3). Por lo tanto, el valor óptimo de la función objetivo está dado por w* = 8/3, verificando w* = z*.

Pregunta 2:

1)

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + x_2 \\ s.a:\ \ 4x_1 + 5x_2 &\le 20 \\ x_1 - x_2 &\le 2 \\ x_1, x_2, &\ge 0 \end{aligned}$$

2) El gráfico del problema se muestra a continuación:



El punto óptimo es (10/3,4/3).

z = 11,3

3) Primero se debe llevar el problema a la forma estándar

$$\begin{aligned} \min -z &= -3x_1 - x_2 \\ s.a:\ \ 4x_1 + 5x_2 + x_3 &= 20 \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

Comenzamos desde el origen, por lo que las variables no básicas son X_1 y X_2. Las variables básicas son X_3 y X_4. Con lo anterior se tiene que:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{R} = B^{-1} * R = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 20 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{b} = B^{-1} * b = \begin{bmatrix} 20 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Veamos si el punto es el óptimo del problema, calculando los costos reducidos:

$$\overline{Cr} = [-3 \quad -1] - [0 \quad 0] * \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

No estamos en el óptimo pues existen costos reducidos negativos.

$$\Rightarrow \quad \overline{Cr} = [-3 \quad -1]$$

Criterio de entrada a la base: Entra la variable con menores costos reducidos, entonces entra X_1

Criterio de salida de la base: $\min_{ais}\left\{\frac{\overline{b_i}}{\overline{a_{is}}}\right\} = \left\{\frac{20}{4} \quad \frac{2}{1}\right\} \Rightarrow$ Sale X_4

Con esto, las nuevas variables básicas son X_3 y X_1 y las no básicas X_4 y X_2

Ahora iteramos:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{R} = B^{-1} * R = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 20 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{b} = B^{-1} * b = \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Veamos si el punto es el óptimo del problema, calculando los costos reducidos:

$$\overline{Cr} = [0 \quad -1] - [0 \quad -3] * \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{Cr} = [3 \quad -4]$$

No estamos en el óptimo pues existen costos reducidos negativos.
Criterio de entrada a la base: Entra la variable con menores costos reducidos, entonces entra X_2

Criterio de salida de la base: $\min_{ais}\left\{\frac{\overline{b_i}}{\overline{a_{is}}}\right\} = \left\{\frac{12}{9}\right\} \Rightarrow$ Sale X_3

Con esto, las nuevas variables básicas son X_2 y X_1 y las no básicas X_4 y X_3

Iteramos nuevamente:

$$B=\begin{bmatrix}5 & 4\\ -1 & 1\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^{-1}=\begin{bmatrix}1/9 & -4/9\\ 1/9 & 5/9\end{bmatrix}$$

$$R=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{R}=B^{-1}*R=\begin{bmatrix}-4/9 & 1/9\\ 5/9 & 1/9\end{bmatrix}$$

$$b=\begin{bmatrix}20\\ 2\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{b}=B^{-1}*b=\begin{bmatrix}4/3\\ 10/3\end{bmatrix}$$

Veamos si el punto es el óptimo del problema, calculando los costos reducidos:

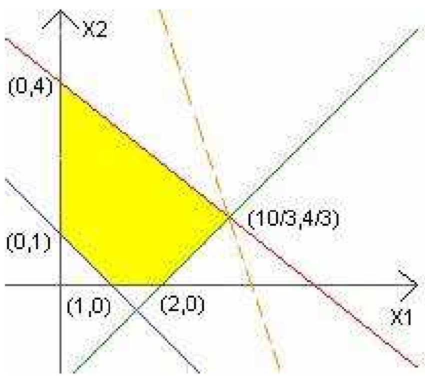
$$\overline{Cr}=[0 \quad 0]-[-1 \quad -3]*\begin{bmatrix}-4/9 & 1/9\\ 5/9 & 1/9\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{Cr}=[11/9 \quad 4/9]$$

Como ambos costos reducidos son positivos, estamos en el óptimo.

Por lo tanto, el punto óptimo es X_1=10/3, X_2= 4/3 y con esto Z = 11,3.

4) El nuevo gráfico será:



donde claramente se puede ver que el punto (0,0) no es factible, por lo que el origen no será una base factible inicial. En este caso se debe utilizar Fase I de Simplex. Cuando se encuentra el valor óptimo de este problema (que debe ser 0), se toma aquella base óptima como la base factible inicial para comenzar a iterar.

5) Usando holgura complementaria:

$$(4x^*_1 + 5x^*_2 - 20)\cdot y^*_1 = 0$$
$$(1x^*_1 - x^*_2 - 2)\cdot y^*_2 = 0$$

$$(3 - 4y^*_1 - y^*_2)\cdot x^*_1 = 0$$
$$(1 - 5y^*_1 + y^*_2)\cdot x^*_2 = 0$$

Como x^*_1 y x^*_2 son distintos de cero, se debe cumplir que:

$$3 - 4y^*_1 - y^*_2 = 0$$
$$5y^*_1 + y^*_2 = 0$$

Resolviendo el sistema, obtenemos que *$(y^*_1,y^*_2) = (4/9,11/9)$y con esto, $w = 11.3$*

Pregunta 3

a) Forma estándar:

$$\begin{gathered} \text{Min - } z = -x_1 - x_2 - 3x_3 \\ s.a. \\ x_1 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 + x_3 + x_5 = 2 \\ x_3 - x_6 = 1 \\ x_i \geq 0 \end{gathered}$$

b) Para aplicar Fase I, se puede resolver alguno de los dos siguientes problemas:

$$\begin{gathered} \text{Min } t_1 + t_2 + t_3 \\ s.a. \\ x_1 + x_3 + x_4 + t_1 = 2 \\ x_2 + x_3 + x_5 + t_2 = 2 \\ x_3 - x_6 + t_3 = 1 \\ x_i \geq 0, t_i \geq 0 \end{gathered}$$

O bien, uno simplificado:

$$\text{Min}\, t_1$$
$$s.a.$$
$$x_1 + x_3 + x_4 = 2$$
$$x_2 + x_3 + x_5 = 2$$
$$x_3 - x_6 + t_1 = 1$$
$$x_i \geq 0, t_i \geq 0$$

Resolvamos este último problema:

Iteración 1:

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X_4 & X_5 & t_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow B^{-1} = I \Rightarrow \overline{b} = b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ t_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R = (0,0,0,0) - (0,0,1) \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} X_1 & X_2 & X_3 & X_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\overline{c}_R = (0,0,-1,1)$$

Esto quiere decir que no estamos en el óptimo y que X_3 entra a la base.

$$\overline{A}_{\bullet 3} = B^{-1} \cdot A_{\bullet 3} = I \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Criterio de Salida:

$$\begin{array}{ccc} X_4 & X_5 & t_1 \end{array}$$
$$\min\left\{\frac{2}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{1}\right\} = \min\{2,2,1\} = 1$$

Entonces, t_1 sale de la base.

Iteración 2:

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} X_4 & X_5 & X_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ t_1 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como la solución óptima nos indica que $t_1 = 0$, la suma óptima de variables artificiales es nula y por tanto las podemos eliminar obteniendo un vértice factible para el problema original. Además, como ninguna variable artificial está en la base óptima de fase I, entonces podemos tomar dicha base como vértice inicial para la fase II.

Luego, la base óptima de Fase I:

$$B = \begin{array}{c} \begin{matrix} X_4 & X_5 & X_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Es una base primal factible para el problema original.

NOTA:

Si la suma óptima de variables artificiales es nula, pero existen variables artificiales en la base óptima de fase I, entonces podemos intentar reemplazarla por cualquier variable no básica para formar una base factible para la fase II.

Si la suma óptima de variables artificiales es no nula, significa que alguna variable artificial es positiva y por tanto no la podemos eliminar. En dicho caso, el problema es infactible.

c) **Iteración 1 (Fase II):**

De acuerdo a la parte b) partimos con la base factible:

$$B = (A4, A5, A3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{b} = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{c}_r = (-1, -1, -3) \Rightarrow \text{Solución no es óptima por lo que entra } x_6$$

$$\overline{A}_{\bullet 6} = B^{-1} \cdot A_{\bullet 6} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Min}\ \{\frac{b_i}{\overline{a}_{i6}} ; \overline{a}_{i6} > 0\} = \text{Min}\{\frac{1}{1};\frac{1}{1}\} = 1$$

En el criterio de salida hay empate. Luego, podemos predecir que encontraremos una solución degenerada. Escojamos X_4 como variable que sale de la base (podríamos escoger X_5 también).

Iteración 2 (Fase II):

Tenemos ahora la base:

$$B = (A6, A5, A3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_r = (2,-1,3) \Rightarrow \text{Solución no es óptima y sale } x_2$$

$$\overline{A}_{\bullet 2} = B^{-1} \cdot A_{\bullet 2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Min}\,\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{i2}}; \bar{a}_{i2} > 0\} = \text{Min}\{\frac{0}{1}\} = 0 \Rightarrow \text{Sale } x_5$$

Iteración 3 (Fase II):

Tenemos ahora la base:

$$B = (A6, A2, A3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_r = (1,1,2)$$

Luego, como todos los costos reducidos son mayores que cero, la solución es óptima. Entonces, en el óptimo las variables básicas valen: $X_6=1$; $X_2=0$; $X_3=2$ y las no básicas valen todas cero: $X_1=0$; $X_4=0$; $X_5=0$.

d)

i. ¿Es el problema no acotado?

El problema es acotado pues: -z*= -6 => z*=6

ii. ¿Existen óptimos alternativos?

No existen múltiples soluciones óptimas, pues $\bar{c}_R > 0$ en el óptimo, es decir, no existe ninguna variable no básica con costo reducido nulo.

iii. ¿Existen restricciones redundantes?
No existen restricciones redundantes. Además, ninguna restricción es una combinación lineal de las otras.

iv. ¿Es la solución óptima degenerada?
La solución óptima es degenerada pues el vértice óptimo con cualquiera de sus bases posee una variable básica igual a cero.

Pregunta 4

1) Las variables duales en el óptimo representan el valor unitario en $ del recurso i. También se puede decir que es la disponibilidad a pagar por alguna unidad de recurso i. Justificar que el beneficio óptimo con el recurso i modificado en t_i unidades (t_i menor que un cierto ξ) es igual a:

$$z^* + \sum_i t_i y_i^*$$

2) Si la base óptima del problema original sigue siendo factible luego de la modificación (ie, se sigue verificando que $x_b = B^{-1} * b \geq 0$), entonces necesariamente este punto es óptimo en el nuevo problema. Esto se debe a que la condición de optimalidad, $\overline{C_r} \geq 0$, se sigue verificando, pues no se ve afectada por cambios en el vector b.

Dudas y/o comentarios a:
André Carboni
andre@carboni.cl