IN34A - Optimización

Anexos Dualidad

Leonardo López H.

lelopez@ing.uchile.cl

Primavera 2008

Dualidad I

Consideremos el problema primal (P):

$$
\begin{aligned}
(P) \quad \text{máx} \quad & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
s.a. \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad i = 1, ..., m \\
& x_j \geq 0 \qquad\qquad\quad j = 1, ..., n
\end{aligned}
$$

- Si amplificamos la restricción i por un multiplicador $y_i \geq 0$:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \leq b_i \, y_i$$

- Si luego sumamos las m ecuaciones obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i \, y_i$$

Dualidad II

- Queremos encontrar una condición sobre cada coeficiente de la f.o. c_j tal que el lado derecho de la inecuación anterior sea **una cota superior al valor de la función objetivo del problema** (P).
- Notemos que podemos intercambiar las sumatorias del lado izquierdo de la inecuación:

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \right) x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i \, y_i$$

- Si $c_j \leq \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \ \forall j = 1, ..., n$, entonces se cumplirá que:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \right) x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i \, y_i$$

Dualidad III

- Por lo tanto, el término $\sum_{i=1}^{m} b_i\, y_i$ será una cota superior al valor de la función objetivo del problema (P) si $c_j \leq \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \;\; \forall j = 1, ..., n$
- ¿Cuáles son los multiplicadores $y_i \geq 0$ que definen la mínima cota superior que podemos encontrar para la f.o. del problema (P)?
- Esto lo podemos encontrar resolviendo el siguiente problema de optimización:

$$
\begin{aligned}
(D) \quad \text{mín} \quad & w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i & \\
\text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j & j = 1, ..., n \\
& y_i \geq 0 & i = 1, ..., m
\end{aligned}
$$

Dualidad IV

- A este problema (D) lo llamaremos problema **Dual** del problema Primal (P). Cada multiplicador $y_i \geq 0$ $i = 1, ..., m$ es la **variable dual asociada a la restricción i del problema primal (P)**.
- Acabamos de verificar el teorema débil de dualidad, que establece que si tememos un problema de maximización entonces: el valor de la función objetivo de su dual, evaluada en cualquier solución factible (del dual), siempre es una cota superior del valor de la función objetivo del primal, evaluada en cualquier solución factible (del primal).
- (P) y (D) podemos escribirlos de forma matricial:

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & z = c^T x \\ s.a. & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (D) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & w = b^T y \\ s.a. & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Holgura Complementaria I

Teorema de Holgura Complementaria (THC)

Sea x^* solución factible del primal (P) e y^* solución factible del dual (D), entonces:
x^* es solución óptima de (P) e y^* es solución óptima de (D) **SSI**

$$\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \right) x_j^* = 0 \quad \forall j = 1, ..., n$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right) y_i^* = 0 \quad \forall i = 1, ..., m$$

Holgura Complementaria II

- Si una restricción del primal (P) **NO es activa** entonces, por el THC, la variable dual asociada debe ser cero.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i \Rightarrow y_i^* = 0$$

- Si $x_j^* > 0$ (y por lo tanto es una variable básica para el primal) entonces, por el THC, la restricción del dual (D) asociada debe ser activa.

$$x_j^* > 0 \Rightarrow c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j$$

- Si una restricción del dual (D) NO es activa entonces, por el THC, la varible primal asociada debe ser cero.
- Si $y_i^* > 0$ (y por lo tanto es una variable básica para el dual) entonces, por el THC, la restricción del primal (P) asociada debe ser activa.

Precios sombra I

- Notemos que: $z^* = c^T x^* = c_{B^*}^T x_{B^*}^* = c_{B^*}^T B^{*-1} b$.
- Pero habíamos definido el **vector de precios sombra** como $\pi^* = c_{B^*}^T B^{*-1}$ (ojo que es un vector fila). Entonces $z^* = \pi^* b = b^T \pi^{*T}$.
- Por otro lado, $w^* = b^T y^*$. Por el teorema fundamental de dualidad tenemos que $z^* = w^*$, por lo tanto: $y^* = \pi^{*T}$. Es decir, **el valor óptimo de las variables duales corresponden al vector de precios sombra**.

Dualidad y Simplex I

- Para un problema de maximización (como el primal), la condición de optimalidad de Simplex es: $\overline{c}_R \leq 0$.
- Habíamos definido los costos reducidos de las variables básicas como cero y el de las no básicas como: $\overline{c}_R^T = c_R^T - c_B^T \, B^{-1} \, R$
- En la última iteración los costos reducidos son:

$$\overline{c}_{R^*}^T = c_{R^*}^T - c_{B^*}^T \, B^{*-1} \, R^* = c_{R^*}^T - \pi^* \, R^* = c_{R^*}^T - {y^*}^T \, R^*$$

- Es decir, para cada variable no básica tenemos que su costo reducido es:

$$\overline{c}_j = c_j - {y^*}^T \, A_{\bullet j} = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*$$

Dualidad y Simplex II

- Por otro lado, cada variable primal x_j tiene asociada la j-ésima restricción del problema dual que establece que:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq c_j \Leftrightarrow c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \leq 0$$

- Por lo tanto, podemos definir el costo reducido de la variable primal x_j (sin importar si es básica o no) como la holgura de la j-ésima restricción.

$$\overline{c}_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*$$

- Por el THC, si $x_j^* > 0$ (y por lo tanto la variable j es básica) entonces $\overline{c}_j = 0$.

Dualidad y Simplex III

- Por lo tanto, cuando en una iteración de simplex sobre el primal se cumple la condición de optimalidad, se ha encontrado un vector de multiplicadores π^* que es una solución factible del problema dual (D).
  - La función objetivo del problema primal (P) es: $z^* = c_{B^*} \, {B^*}^{-1} \, b = b^T \, {\pi^*}^T$
  - La función objetivo del problema dual (D) para la solución factible $y = {\pi^*}^T$ encontrada es: $w = b^T \, y = b^T \, {\pi^*}^T$.
  - Como $z^* = w^*$ entonces, por el teorema fundamental de dualidad, la solución factible $y = {\pi^*}^T$ es la solución óptima del problema dual. Por lo tanto, **la base utilizada en esta iteración de simplex es la base óptima del problema primal.**