Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A – Optimización

Profesores: Guillermo Durán
Daniel Espinoza
Auxiliares: André Carboni
Leonardo López
Rodrigo Wolf

# Auxiliar Extra Control 1

## Problema 1

a) Justifique o rechace la siguiente afirmación:
"Un modelo matemático debe tener la mayor fidelidad representativa posible".

b) Describa brevemente en qué consiste la validación de un modelo matemático. ¿Qué curso de acción debe tomarse si un modelo no cumple la validación?.

c) Justifique la denominación de "método" para los procedimientos de optimización llamados método del gradiente y método de Newton.

d) Indique una ventaja y una desventaja del método de Newton frente al método del gradiente.

e) Por qué si existe un algoritmo polinomial que resuelva un problema NP Completo se dice que P=NP?

f) Suponga un punto que cumple las condiciones de Kuhn-Tucker. ¿Puede afirmarse que es un óptimo?. Analice las posibles situaciones.

g)Explique qué es un problema de decisión y qué es un problema de optimización. Dé un ejemplo de cada uno. (1 punto)

h) i) Escriba y grafique un problema de programación lineal infactible. (1 punto)

ii) ¿Puede existir un óptimo de un problema de programación lineal que no sea un vértice del poliedro factible?
Si la respuesta es si, de un ejemplo y grafíquelo; si la respuesta es no, explique porque. (1 punto)

## Problema 2

1. Sea el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lrcl} \text{máx} & f(x) = x_1 & & \\ s.a: & & & \\ & (x_1-1)^2 + x_2^2 & \geq & 1 \\ & (x_1-2)^2 + x_2^2 & \leq & 4 \\ & (x_1-3)^2 + x_2^2 & \geq & 1 \end{array}$$

   *a)* Encuentre la solución óptima gráficamente. Verifique si esta solución óptima cumple las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.

   *b)* Encuentre 2 puntos más que cumplan las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker. Explique que características tienen.

2. Sea el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lrcl} \text{máx} & f(x) = x_2 & & \\ s.a: & & & \\ & (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 & \leq & 1 \\ & x_2 & \leq & 1 \end{array}$$

   *a)* Encuentre gráficamente la(s) solución(es) óptima(s). Verifique si cumple(n) las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker. Comente la situación.

   *b)* Encuentre otro punto que cumpla las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker. Comente de que punto se trata.

## Problema 3

a) (5.7puntos) No es fácil dirimir cual es el rol de un canal de televisión público como lo es TVN. En el caso de este muchas son las críticas a los contenidos de su programación y al escaso aporte del canal para la cultura del país.

Ante tal situación la presidenta de la republica doña Michelle Bachelet, le ha solicitado al presidente del directorio de TVN, Francisco Vidal, que la programación del canal de todos cumpla con los siguientes requisitos:

- Se autofinancie
- Se transmita al menos tres horas de programación cultural o informativa o educativa a la semana durante el bloque prime (entre 22 y 24 horas)
- Que como máximo hayan 10 horas de programas faranduleros a la semana
- Que al menos el 50% de los programas que se transmiten (ojo: no de las horas transmitidas) sean de factura nacional (hechos en Chile)
- Que al menos un 10% de las horas que se transmiten en un día sean de entretención
- Que se vea en pantalla el máximo de programación cultural, informativa y educativa posible respetando lo antes señalado

Ante tal petición el señor Vidal, de gran verborrea, le contesta a la presidenta que no se preocupe, que el tiene todo bajo control. Sin embargo, la realidad es que el presidente del directorio esta algo complicado ya que no esta seguro que estructura de programación le permite cumplir con todos estos requisitos, es por esto que él ha acudido a usted para que le ayude a solucionar este dilema: el de definir los programas que TVN transmite de lunes a domingo.

Para poder hacer esto el ex ministro le ha proporcionado la siguiente información referente a la forma en que debe operar el canal y los parámetros involucrados

- La programación de lunes a viernes es la misma a toda hora
- La programación del sábado es la misma que la del domingo
- Los programas disponibles para mostrar en pantalla están identificados de la siguiente forma: 1,…,n son culturales o informativos o educativos, n+1,…,m son de entretención y m+1,…,M son de farándulas
- Los programas duran 1hora
- Un programa no es transmitido más de una vez al día
- Un programa que se trasmite durante los días hábiles no es transmitido durante el fin de semana
- TVN transmite las 24 horas del día
- $CH_i$ (i=1,…,n,…, m,…,M ) vale 1 si es que el programa es hecho en Chile y 0 en caso contrario
- $IP_i$ (i=1,…,n,…, m,…,M ) son los ingresos del programa i si se transmite en horario prime
- $I_i$ (i=1,…,n,…, m,…,M ) son los ingresos del programa i si se transmite en otro horario
- $C_i$ (i=1,…,n,…, m,…,M ) son los costos del programa i (no importa el horario en que se transmita)
- Todo programa de entretención debe ir seguido de una cultural o informativo o educativo
- Por cada tres horas de programas culturales o educativos o informativos que contenga los días hábiles se permite una hora de programas de entretención durante cada uno de los días del fin de semana (por ejemplo si se transmiten 10 horas de culturales en cada día hábil se pueden dar hasta 3 horas de entretenidos tanto el sábado como el domingo).

Ahora el que tengamos una televisión con contenido depende de cómo usted resuelva este PPL (Se recomienda usar variables binarias).

b) (0,3 décimas) Que le respondería al señor Vidal si este le dijese que junto con todas las restricciones señaladas anteriormente debe incluir una que diga que por cada tres horas o más de programas de entretención que haya en un día deben haber exactamente tres horas de programas faranduleros ese mismo día (no se aceptan consultas de esta pregunta)

## SOLUCIÓN

a) Se Rechaza la afirmación.
La mayor fidelidad representativa implica una gran complejidad de modelo. Esto atenta contra una solución medianamente viable.

b) La validación consiste en verificar que el modelo matemático construido represente adecuadamente el problema por resolver.
La validación se puede hacer con datos históricos. En este caso el modelo debe representar la situación del sistema en la época histórica de los datos.
También la validación puede hacerse mediante modificaciones sustanciales de uno o más parámetro, cuyo resultado en la solución es perfectamente predecible.
Si el modelo no cumple la validación debe volverse a la etapa de modelamiento y luego a la resolución nuevamente para volver a validar finalmente.

c) En ambos casos no hay seguridad de encontrar el óptimo en un número finito de pasos.

d) Ventaja del método de Newton frente al gradiente es su mejor convergencia.
La desventaja más importante del método de Newton es que dependiendo del punto de partida y la función a optimizar este procedimiento puede alejarse del óptimo y no encontrarlo.
Esto nunca ocurre con el método del gradiente.

**e)**

Un problema $A$ es **NP-completo** si:

1. $A \in$ NP
2. Todo problema en NP se puede transformar polinomialmente a $A$

Esto signfica que si encuentro un algoritmo polinomial para un problema NP-completo, automáticamente se pueden resolver polinomialmente todos los problemas de la clase NP.

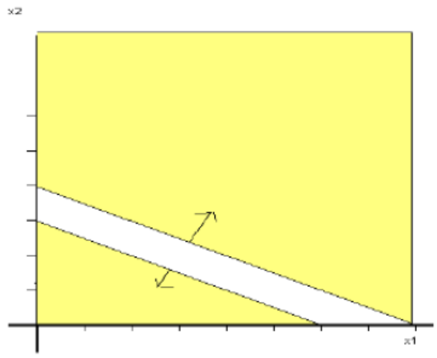
f) Si un punto cumple Kuhn – Tucker no pude afirmarse que se óptimo local o global.
Las condiciones son solo necesarias.

g) Un problema de decisión es un problema en el cual se debe seleccionar entre alternativas, no implica necesariamente la obligación de optimizar. Un ejemplo de un problema de decisión es aquel que se enfrenta al comprar un producto del cual no se tiene información.

Un problema de optimización en cambio, es un problema en el cual se debe tomar la decisión que permita obtener el mejor desempeño de un sistema, los problemas generales de optimización desean encontrar el mejor valor de una medida de desempeño (función objetivo) con la condición adicional que las variables de decisión cumplan ciertas limitaciones (restricciones). Un ejemplo de problema de optimización puede ser aquel en que se debe decidir la ruta óptima a utilizar por una empresa para minimizar los costos de transporte sujeto a la cantidad de vehículos que posee la empresa.

h) i)Un ejemplo puede ser: Problema infactible:

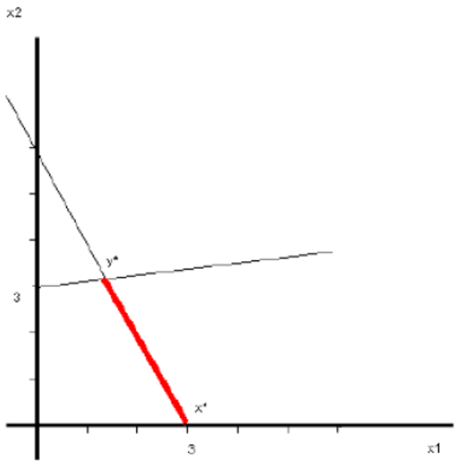
$$\begin{aligned} &\text{Max } z=2x_1+x_2 \\ &\text{s.a } x_1+2x_2\leq 6 \\ &\quad x_1+2x_2\geq 8 \\ &\quad x_1,x_2\geq 0 \end{aligned}$$




ii)) Si, esto sucede cuando la pendiente de la función objetivo tiene el mismo valor que la pendiente de una de las restricciones. (son paralelas)

Cualquier ejemplo que cumpla con la condición anterior estará bueno. Uno de estos pude ser:

$$\begin{aligned} &\text{Max } z=2x_1+x_2 \\ &\text{s.a } -x_1+3x_2\leq 6 \\ &\quad 2x_1+x_2\leq 8 \\ &\quad x_1,x_2\geq 0 \end{aligned}$$




## Problema 2

1. Primero debe transformarse el problema original en un problema en forma estándar, quedando:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & \tilde{f}(x) = -x_1 & \\ s.a: & & \\ & 1-(x_1-1)^2-x_2^2 \leq 0 & (g_1) \\ & (x_1-2)^2+x_2^2-4 \leq 0 & (g_2) \\ & 1-(x_1-3)^2-x_2^2 \leq 0 & (g_3) \end{array}$$

Ahora escribamos $\nabla f(x)$ y $\nabla g_i(x)$:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -2 \cdot (x_1 - 1) \\ -2 \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (x_1 - 2) \\ 2 \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} -2 \cdot (x_1 - 3) \\ -2 \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

*a*) La solución óptima corresponde al punto $(x_1, x_2) = (4, 0)$, el cual se puede ver en la Figura 1.

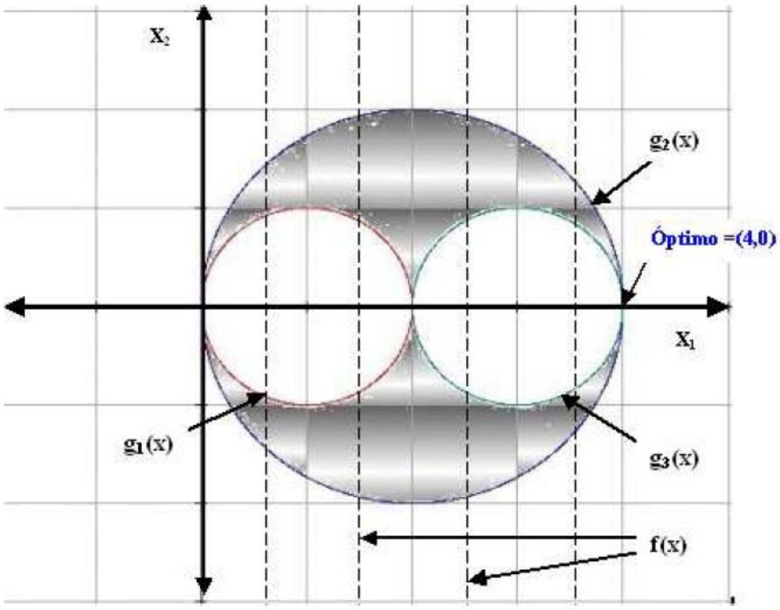



Figura 1: Gráfico asociado al problema inicial.

Para verificar las condiciones de KKT en ese punto se tiene:

- Las restricciones $g_2$ y $g_3$ son activas en el punto $(4, 0)$, por lo tanto $u_2$ y $u_3 \in \mathbb{R}$.
- La restricción $g_1$ es inactiva en el punto $(4, 0)$, por lo tanto $u_1 = 0$.

Utilizando una de las condiciones de KKT ($\nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(x) = 0$) se tiene que:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 2 \cdot (4-2) \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 2 \cdot (4-3) \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

entonces se tiene la siguiente ecuación:

$$-1 + 4u_2 - 2u_3 = 0$$

Luego, es posible encontrar un par de valores para $u_2 \geq 0$ y $u_3 \geq 0$ que cumplan la restricción, por ejemplo $u_2 = 1$ y $u_3 = \frac{3}{2}$. Luego, existen $u_1, u_2$ y $u_3 \geq 0$ entonces se cumple la condición de KKT para el punto $(4, 0)$.

*b*) Otros dos puntos que cumplen con las condiciones de KKT pueden ser:

- Punto $(0, 0)$:
  En este punto las restricciones $g_1$ y $g_2$ son activas, por lo tanto $u_1$ y $u_2 \in \mathbb{R}$. La restricción $g_3$ es inactiva, por lo tanto $u_3 = 0$. Ahora, utilizando $\nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(x) = 0$ se tiene que:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 2 \cdot (0-1) \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 2 \cdot (0-2) \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  entonces se obtiene la siguiente ecuación:

$$-1 + 2u_1 - 4u_2 = 0$$

  Luego, es posible encontrar un par de valores para $u_1 \geq 0$ y $u_2 \geq 0$ que cumplan la restricción, por ejemplo $u_1 = 1$ y $u_2 = \frac{1}{4}$. Luego, existen $u_1, u_2$ y $u_3 \geq 0$ entonces se cumple la condición de KKT para el punto $(0, 0)$.

- Punto $(2, 0)$:
  En este punto las restricciones $g_1$ y $g_3$ son activas, por lo tanto $u_1$ y $u_3 \in \mathbb{R}$. La restricción $g_2$ es inactiva, por lo tanto $u_2 = 0$. Ahora, utilizando $\nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(x) = 0$ se tiene que:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 2 \cdot (2-1) \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 2 \cdot (2-3) \\ 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  entonces se obtiene la siguiente ecuación:

$$-1 - 2u_1 + 2u_3 = 0$$

  Luego, es posible encontrar un par de valores para $u_1 \geq 0$ y $u_3 \geq 0$ que cumplan la restricción, por ejemplo $u_1 = 1$ y $u_2 = \frac{3}{2}$. Luego, existen $u_1, u_2$ y $u_3 \geq 0$ entonces se cumple la condición de KKT para el punto $(2, 0)$.

**2)**

Sea el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{lrcl} \text{máx} & f(x) = x_2 & & \\ s.a: & & & \\ & (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 & \leq & 1 \\ & x_2 & \leq & 1 \end{array}$$

*a*) Primero, transformemos el problema planteado a la forma estándar y calculemos $\nabla f(x)$ y $\nabla g_i(x)$.

La forma estándar es:

$$\begin{array}{lrcl} \text{mín} & \tilde{f}(x) = -x_2 & & \\ s.a: & & & \\ & (x_1-1)^2+(x_2-1)^2-1 & \leq & 0 \\ & x_2-1 & \leq & 0 \end{array}$$

Además:

$$\nabla \tilde{f}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{-1} \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 2\cdot(x_1-1) \\ 2\cdot(x_2-1) \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gráficamente se puede apreciar (ver Figura 2) que la solución óptima al problema corresponde a todo el segmento comprendido entre los puntos $(0,1)$ y $(2,1)$.

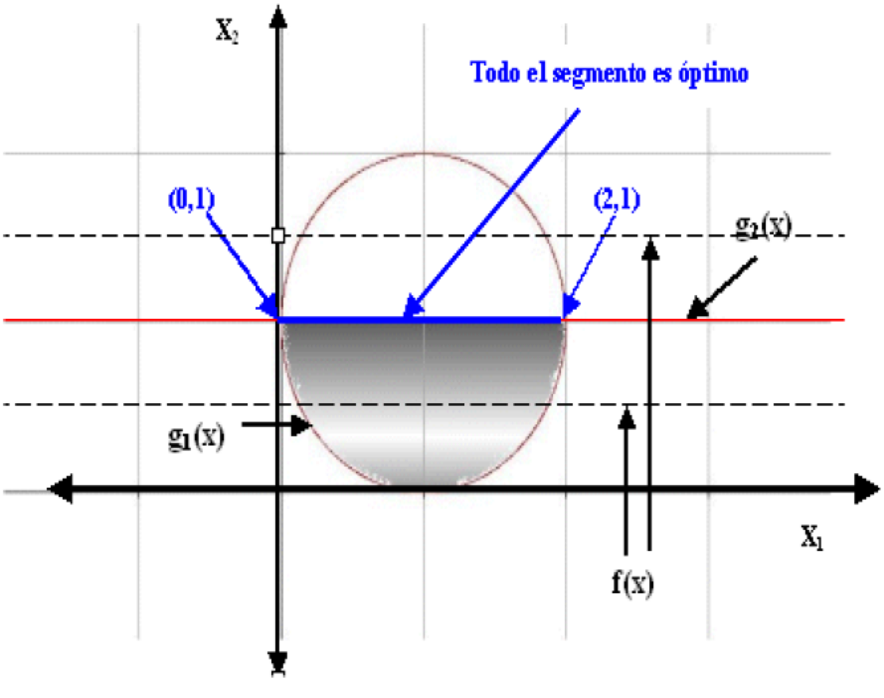



Figura 2: Gráfico asociado al problema inicial.

Luego, para analizar las condiciones de KKT, revisemos 3 casos:

- Segmento completo exceptuando los extremos: en este caso, las restricción $g_1$ es inactiva, por lo tanto $u_1 = 0$, y la restricción $g_2$ es activa, luego $u_2 \in \mathbb{R}$. Ahora, utilizando $\nabla \tilde{f}(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(x) = 0$ se tiene que:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

entonces se obtiene la siguiente ecuación:

$$-1 + u_2 = 0$$

Luego, $u_2 = 1$, y como existen $u_1$ y $u_2 \geq 0$ entonces se cumple la condición de KKT para cualquier punto del segmento.

- Punto $(0,1)$: en este punto ambas restricciones son activas, por lo tanto $u_1$ y $u_2 \in \mathbb{R}$. Ahora, utilizando $\nabla \tilde{f}(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(x) = 0$ se tiene que:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 2 \cdot (0-1) \\ 2 \cdot (1-1) \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

entonces se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$-2u_1 = 0$$

$$-1 + u_2 = 0$$

Luego, la solución a este sistema de ecuaciones es $u_1 = 0$ y $u_2 = 1$. Como existen $u_1$ y $u_2 \geq 0$ entonces se cumple la condición de KKT para el punto $(0,1)$.

- Punto $(2,1)$: en este punto ambas restricciones son activas, por lo tanto $u_1$ y $u_2 \in \mathbb{R}$. Ahora, utilizando $\nabla \tilde{f}(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(x) = 0$ se tiene que:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 2 \cdot (2-1) \\ 2 \cdot (1-1) \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

entonces se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$2u_1 = 0$$

$$-1 + u_2 = 0$$

Luego, la solución a este sistema de ecuaciones es $u_1 = 0$ y $u_2 = 1$. Como existen $u_1$ y $u_2 \geq 0$ entonces se cumple la condición de KKT para el punto $(0,1)$.

*b)* No es posible encontrar otro punto que cumplas las condiciones de KKT, esto porque la función $(f(x))$ y las restricciones $(g_i(x))$ son convexas, luego, cualquier otro punto que cumpla las condiciones de KKT necesariamente será óptimo global del problema, pero estos (los óptimos globales) ya han sido determinados y analizada la condición de KKT en ellos.

**Problema 3**

a)

$$X_{it} = \begin{cases} 1 & \text{si TRANSMITO PROGRAMA } i \text{ ENTRE } t \text{ y } t+1 \text{ DE LUNES a VIERNES} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$Y_{it} = \begin{cases} 1 & \text{si TRANSMITO PROGRAMA } i \text{ ENTRE } t \text{ y } t+1 \text{ SABADO y DOMINGO} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

0,5

$\boxed{\text{OBS: } i = 1, \dots, M \quad t = 0, \dots, 23}$

0- NATURALEZA DE LAS VARIABLES

$$X_{it}, Y_{it} \in \{0, 1\}$$

0,4

1- SE AUTOFINANCIE

$$5 \cdot \left( \sum_{i=1}^{M} \sum_{t=0}^{21} X_{it} (I_i - C_i) + \sum_{i=1}^{M} \sum_{t=22}^{23} X_{it} (IP_i - C_i) \right)$$

$$+ 2 \cdot \left( \sum_{i=1}^{M} \sum_{t=0}^{21} Y_{it} (I_i - C_i) + \sum_{i=1}^{M} \sum_{t=22}^{23} Y_{it} (IP_i - C_i) \right) \geq \emptyset$$

0,4

2- MÍNIMO CULTURAL EN EL BLOQUE PRIME

$$5 \cdot \sum_{i \in CUL} X_{i22} + X_{i23} \quad + \quad 2 \cdot \sum_{i \in CUL} Y_{i22} + Y_{i23} \geq 3$$

0,4

3- MÁXIMO FARANDULERO

$$5 \cdot \sum_{t=1}^{23} \sum_{i \in FAR} X_{it} + 2 \sum_{t=1}^{23} \sum_{i \in FAR} Y_{it} \leq 10$$

0,4

4- FACTURA NACIONAL

$$\sum_{i} \sum_{t} (X_{it}) CH_i + \sum_{i} \sum_{t} Y_{it} \, CH_i \geq 24$$

0,4

5- MÍNIMO DE ENTRETENCIÓN

$$\sum_{i \in ENT} \sum_{t} X_{it} \geq 2,4 \qquad \sum_{i \in ENT} \sum_{t} Y_{it} \geq 2,4$$

0,4

6. NO MÁS DE UNA VEZ AL DÍA

$$\sum_t X_{it} \leq 1 \qquad \forall i$$

0,4

$$\sum_t Y_{it} \leq 1 \qquad \forall i$$

7. SI VA DE LUN a VIER NO VA EL FIN DE SEMANA

$$\sum_t X_{it} + \sum_t Y_{it} \leq 1 \qquad \forall i$$

0,4

8. TRANSMITE LAS 24 HORAS

$$\sum_{i,t} X_{it} = 24 \quad ; \quad \sum_{i,t} Y_{it} = 24 \qquad \sum_i x_{it} = 1 \quad \forall t \quad \sum_i y_{it} = 1 \quad \forall t$$

9- ENTRETENIDO SEGUIDO DE CULTURAL

a) $\sum_{i \in ENT} X_{i,t} \leq \sum_{i \in CUL} X_{it+1} \qquad \forall T \{0, \dots, 22\}$

b) $\sum_{i \in ENT} X_{i23} \leq \sum_{i \in CUL} X_{i0}$

c) $\sum_{i \in ENT} X_{i23} \leq \sum_{i \in CUL} Y_{i0}$

D) $\sum_{i \in ENT} Y_{i,t} \leq \sum_{i \in CUL} Y_{it+1} \qquad \forall T \{0, \dots 22\}$

E) $\sum_{i \in ENT} Y_{i23} \leq \sum_{i \in CUL} Y_{i0}$

f) $\sum_{i \in ENT} Y_{i23} \leq \sum_{i \in CUL} X_{i0}$

a, b, D, E 0,4

c) y f) 0,4

10. 3 HORAS DE CULTURALES PERMITEN 1 HORA DE ENTRETENIDOS

$$\sum_{\substack{i \in ENT \\ t}} Y_{it} \leq \frac{1}{3} \cdot \sum_{\substack{i \in CUL \\ t}} X_{it}$$ 0,4

F.OBJ $\quad \text{MAX} \sum_{\substack{i \in CUL \\ t}} X_{it} + Y_{it}$

0,4

$$\left( \Leftrightarrow \quad \text{MAX } 5 \cdot \sum_{\substack{i \in CUL \\ t}} X_{it} + 2 \cdot \sum_{\substack{i \in CUL \\ t}} Y_{it} \right)$$

b)

HAY QUE CONTESTARLE QUE SU PETICIÓN GENERA UN PROBLEMA INFACTIBLE. YA QUE LA RESTRICCIÓN 5 OBLIGA A QUE TODOS LOS DÍAS HAYAN 3 HORAS DE PROGRAMAS ENTRETENIDOS, PERO LA RESTRICCIÓN 3 IMPOSIBILITA EL HECHO DE QUE HAYAN $\geq 1$ HORAS DE FARANDULA A LA SEMANA 0,3

OBSERVACIONES: • SIEMPRE HAY MÁS DE UNA FORMA DE RESOLVER EL PROBLEMA

• EN LAS SUMATORIAS NO IMPORTA QUE PONGAN: $\sum_{i,t}$ SÓLO SI HAY QUE SUMAR PARA TODO EL RANGO DE VALORES

• OTRA OPCIÓN DE MODELAMIENTO ES USANDO:

$$X_{it} = \begin{cases} 1 & \text{SI TRANSMITO PROGRAMA } i \text{ ENTRE } t \text{ y } t+1 \\ \sim & \end{cases}$$

$t = 0, \ldots, 167$ ACÁ HABRÍA QUE IMPONER POR EJEMPLO QUE

$$X_{i0} = X_{i24} = X_{i48} = X_{i72} = X_{i96} \quad ; \quad X_{i120} = X_{i144} \quad \text{Y ASÍ.}$$