Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN34A: Clase Auxiliar

# Optimización de Problemas no lineales.

Marcel Goic F.[1]

[1]Esta es una versión bastante preliminar por lo que puede contar con numerosas faltas de ortografía y errores no forzados. Si encuentran alguno favor de denunciarlo a mgoic@cec.uchile.cl

# 1. Introducción

En gran parte del curso nos concentraremos en los métodos de resolución de problemas de programación *lineal*. Sin embargo, en la práctica a veces surge la necesidad de resolver problemas de optimización *no lineales* por lo que es necesario estudiar criterios y métodos de optimización mas generales para resolver problemas en que restricciones o función objetivo son no lineales. Además, nos servirá para destacar las ventajas que tiene el modelar un problema de manera que tanto restricciones como función objetivo sean lineales.

Para enfrentar el problema, tenemos que tener un criterios general de optimalidad (local): Para que un punto factible sea óptimo se necesita que la función objetivo no sea mejor en una vecindad factible del punto, es decir, todas las direcciones en que se mejora la función objetivo, son infactibles. Este criterio toma formas mas especializadas para estructuras de problemas mas especificas. Para hacer el estudio un poco mas ordenado, dividiremos la materia en 2 partes: Optimización irrestricta y Optimización Restringida.

# 2. Optimización Irrestricta

Queremos resolver

$$\begin{array}{c} \min\ f(x) \\ s.a\ x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

Para que un punto $x^*$ sea óptimo, se requiere que $\nabla f(x^*) = 0$. Luego necesitamos algún procedimiento eficiente para encontrar puntos estacionarios o de $\nabla f() = 0$. Es aquí donde aparece el concepto de *métodos de descenso*.

## 2.1. Métodos de descenso

Dentro del marco de optimización sin restricciones, existen métodos iterativos que nos permiten llegar a óptimos locales (puntos estacionarios). Por simplicidad, analizaremos un problema de minimización[2](como en casi todo el curso): $\min f(\vec{x})$.

### 2.1.1. Método del gradiente

Este método se basa en el hecho que la dirección de máximo ascenso de una función esta dado por su gradiente y por tanto la de mayor descenso viene dada por menos (-) el gradiente. La formula de recursión:

[2] El problema de maximización es análogo

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - \lambda_k \cdot \nabla f(\vec{x}_k)$$

Con $\lambda_k$ determinado por la minimización de la siguiente función de $\lambda$:

$$h(\lambda) = f(\vec{x}_k - \lambda \cdot \nabla f(\vec{x}_k))$$

#### 2.1.2. Método de Newton

Este método se basa en una aproximación de Taylor de $2^{do}$ orden de la función objetivo. Luego se minimiza esta aproximación igualando su gradiente a cero. A partir de esto, se llega a la siguiente formula de recursión:

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - \{H_f(\vec{x}_k)\}^{-1} \cdot \nabla f(\vec{x}_k)$$

**Observación:**

1. En ambos métodos, como es obvio a partir de las formulas de recursión, la condición de termino viene dada por $\nabla f(\vec{x}_k = \vec{0})$.
2. Observar que en el método del gradiente, nos acercamos zig-zageando al óptimo pues los gradientes de iteraciones sucesivas son ortogonales.
3. Notar también que en el método de newton, para polinomios de $2^{do}$ grado se alcanza el óptimo en 1 iteración porque la aproximación de Taylor coincide con la función.

# 3. Optimización Restringida

Dentro del marco de optimización con restricciones, ¿Como sabemos si un punto es óptimo local?. Claramente la condición $\nabla f(\vec{x}_k = \vec{0})$ no nos sirve pues el óptimo puede estar en la frontera de nuestro espacio de soluciones factibles donde ella no necesariamente se cumple. Surge Asi la condición de KKT.

## 3.1. Condiciones de Karush Khun-Tucker (KKT).

#### 3.1.1. Condición necesaria de KKT.

Para que $x^*$, punto factible sea mínimo local del problema

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & f(x) & \\ \text{s.a} & g_i(x) \leq 0 & \text{i=1...m} \end{array}$$

debe necesariamente cumplir que existan $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m \geq 0$ tales que:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \cdot \nabla g_i(x^*) = 0 \tag{1}$$

$$\mu_i \cdot g_i(x^*) = 0 \quad \forall i = 1...m \tag{2}$$

### 3.1.2. Condición suficiente de KKT.

Si $f(x)$ y $g_i(x)$ son convexas [3], entonces la condición necesaria de KKT se transforma en suficiente. En otras palabras, en un problema en que las funciones son convexas, un punto que cumple con KKT es mínimo global.

## 3.2. Condiciones de Lagrange.

Consideremos ahora el caso en que las restricciones son de igualdad.

### 3.2.1. Condición necesaria de Lagrange.

Para que $x^*$, punto factible sea mínimo local del problema

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & f(x) & \\ \text{s.a} & h_j(x) = 0 & \text{j=1...n} \end{array}$$

debe necesariamente cumplir que existan $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ irrestrictos en signo tales que:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \nabla h_j(x^*) = 0$$

### 3.2.2. Condición suficiente de Lagrange.

Si $f(x^*)$ convexa y $h_j(x^*)$ son lineales, entonces la condición necesaria de Lagrange se transforma en suficiente. En otras palabras, en un problema en que la funcion objetivo es convexas y las restricciones lineales, un punto que cumple con Lagrange es mínimo global.

[3] Por ejemplo $H_f(x^*)$ semidefinido positivo.

### 3.3. Técnica de los multiplicadores de Lagrange

Consideremos el problema de optimización general:

$$\min \ f(x)$$

$$\begin{array}{rrcll} s.a & g_i(x) & \leq & 0 & i = 1...m \\ & h_j(x) & = & 0 & j = 1...n \end{array}$$

Para resolver este problema, debemos construir la función lagrangeana como:

$$L = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j h_j(x)$$

Y luego resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcll} \frac{\partial L}{\partial x} & = & 0 & \\ \frac{\partial L}{\partial \mu} & \leq & 0 & \forall i \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} & = & 0 & \forall j \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} \mu_i & \geq & 0 & \forall i \\ \mu_i g_i & = & 0 & \forall i \end{array}$$

# 4. Tabla Resumen

| **Problema** | **Condición necesaria** | **Condición suficiente** | **Técnica** |
|---|---|---|---|
| $\min f(x)$ | $\nabla f(x) = 0$ | $f$ convexa | Método de Gradiente<br>Método Newton |
| $\min f(x)$<br>s.a $\quad g_i(x) \leq 0$ | $\nabla f(x) + \sum_i \mu_i \nabla g_i = 0$<br>$\mu_i g_i = 0$ | $f$convexa<br>$g_i$ convexas | Multiplicadores lagrange |
| $\min f(x)$<br>s.a $\quad h_j(x) = 0$ | $\nabla f(x) + \sum_j \lambda_j \nabla h_j = 0$ | $f$convexa<br>$h_j$ lineales | Multiplicadores lagrange |

$\odot$

# 5. Problemas

### 5.1. Problema 1

1. Sea el problema de minimización $Min\ f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Si $x_1$ y $x_2$ pueden tomar cualquier valor real, resolver el problema aplicando el método del gradiente. Para dicho efecto, tome como punto de partida el par $(x_1 = 2, x_2 = 1)$.

2. Sea el problema de minimización $Min\, f(x_1, x_2) = \frac{(x_1-2)^2}{4} + (x_2-2)^2$. Comience a iterar con el método del gradiente e infiera que ocurre con la convergencia de la sucesión de descenso. Tome como punto de partida el par $(x_1 = 0, x_2 = 0)$.

**Solución**

1. Debemos resolver $\min\ f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ con $\vec{x}_0 = (2, 1)$

- Método del gradiente: $\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - \lambda_k \nabla f(\vec{x}_k)$

  Claramente, antes de comenzar a iterar se requiere calcular $\nabla f(\vec{x})$:

$$\nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

  Ahora, comenzamos a iterar:

  - Iteración 1:
    - Vemos si estamos en el óptimo: $\nabla f(2,1) = (4,2) \neq \vec{0} \Rightarrow$ Seguimos.
    - Calculamos nuevo punto $\vec{x}_1$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \lambda_0 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

      Para calcular $\lambda_0$ minimizamos $h(\lambda)$:

$$\begin{aligned} h(\lambda) &= f(\vec{x}_0 - \lambda \nabla f(\vec{x}_0)) \\ &= f\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= (2-4\lambda)^2 + (1-2\lambda)^2 \end{aligned}$$

$$\frac{dh(\lambda)}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \frac{1}{2}$$

    (Si quieren pueden verificar que el punto crítico es óptimo comprobando que $d^2h/d\lambda^2 > 0$)
    Entonces:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  - Iteración 2:
    - Vemos si estamos en el óptimo: $\nabla f(0,0) = (0,0) = \vec{0} \Rightarrow$ Fin.

$$\therefore \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ es el mínimo de } x_1^2 + x_2^2$$

- Método de Newton: $\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - \{H_f(\vec{x}_k)\}^{-1}\nabla f(\vec{x}_k)$

  Claramente, antes de comenzar a iterar se requiere calcular $\nabla f(\vec{x})$ y $\{H_f(\vec{x})\}^{-1}$:

$$\nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$H_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{H_f(\vec{x})\}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

  Ahora, comenzamos a iterar:

  - Iteración 1:
    - Vemos si estamos en el óptimo: $\nabla f(2,1) = (4,2) \neq \vec{0} \Rightarrow$ Seguimos.
    - Calculamos nuevo punto $\vec{x}_1$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  - Iteración 2:
    - Vemos si estamos en el óptimo: $\nabla f(0,0) = (0,0) = \vec{0} \Rightarrow$ Fin.
    - Calculamos nuevo punto $\vec{x}_1$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{ Tambien se concluye que } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ es el mínimo de } x_1^2 + x_2^2$$

$\odot$

2. Debemos resolver $\min\ f(x_1, x_2) = \frac{(x_1-2)^2}{4} + (x_2-2)^2$.

   Claramente, como ya vimos, antes de comenzar a iterar con el método del gradiente, calculamos $\nabla f(\vec{x})$:

$$\nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{2} - 1 \\ 2x_2 - 2 \end{pmatrix}$$

   Ahora comenzamos a iterar

   - Iteración 1:
     - Vemos si estamos en el óptimo: $\nabla f(0,0) = (-1,-2) \neq \vec{0} \Rightarrow$ Seguimos.

- Calculamos nuevo punto $\vec{x}_1$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda_0 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Para calcular $\lambda_0$ minimizamos $h(\lambda)$:

$$\begin{aligned} h(\lambda) &= f(\vec{x}_0 - \lambda \nabla f(\vec{x}_0)) \\ &= f\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{(\lambda-2)^2}{4} + (2\lambda-2)^2 \end{aligned}$$

$$\frac{dh(\lambda)}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \frac{10}{17}$$

(Si quieren pueden verificar que el punto crítico es óptimo comprobando que $d^2h/d\lambda^2|_{10/17} > 0$)
Entonces:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{10}{17} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{17} \\ \frac{20}{17} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{10}{17} \\ \frac{20}{17} \end{pmatrix}$$

- Iteración 2:
  - Vemos si estamos en el óptimo: $\nabla f(10/17, 20/17) = (-12/17, 6/17) \neq \vec{0} \Rightarrow$ Seguimos.
  - Calculamos nuevo punto $\vec{x}_2$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} \frac{10}{17} \\ \frac{20}{17} \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} \frac{-12}{17} \\ \frac{6}{17} \end{pmatrix}$$

Para calcular $\lambda_1$ minimizamos $h(\lambda)$:

$$\begin{aligned} h(\lambda) &= f(\vec{x}_1 - \lambda \nabla f(\vec{x}_1)) \\ &= f\left\{ \begin{pmatrix} \frac{10}{17} \\ \frac{20}{17} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} \frac{-12}{17} \\ \frac{6}{17} \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{((\frac{10}{17} - \frac{12}{17}\lambda) - 2)^2}{4} + ((\frac{20}{17} - \frac{6}{17}\lambda) - 2)^2 \end{aligned}$$

$$\frac{dh(\lambda)}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \frac{5}{4}$$

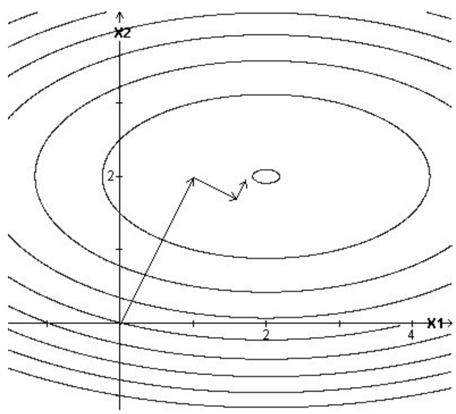
(Si quieren pueden verificar que el punto crítico es óptimo comprobando que $d^2h/d\lambda^2|_{10/17} > 0$)
Entonces:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} \frac{10}{17} \\ \frac{20}{17} \end{pmatrix} - \frac{5}{4} \begin{pmatrix} \frac{-12}{17} \\ \frac{6}{17} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{50}{34} \\ \frac{25}{34} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{50}{34} \\ \frac{25}{34} \end{pmatrix}$$

- Iteración 3:
  - Vemos si estamos en el óptimo: $\nabla f(50/34, 25/34) = (-9/34, -18/34) \neq \vec{0} \Rightarrow$ Habría que continuar iterando.

  Para ver que pasa con la convergencia, nos fijamos en las direcciones de descenso en las iteraciones determinados por el gradiente de la función:
  - $d_0 = \nabla f(\vec{x}_0) = (1, 2)$
  - $d_1 = \nabla f(\vec{x}_1) = (12/17, -6/17) = 6/17(2, -1)$
  - $d_2 = \nabla f(\vec{x}_2) = (9/34, 18/34) = 9/34(1, 2)$

  Y comprobamos el fenómeno de zig-zag




$\odot$

## 5.2. Problema 2

Sea el problema:

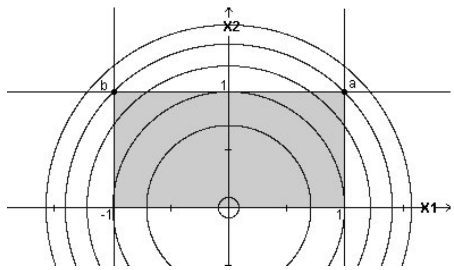
$$\begin{aligned} \text{máx } & f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \\ s.a \quad & x_1 \leq 1 \\ & x_1 \geq -1 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Resuelva gráficamente el problema. Verifique el cumplimiento de las condiciones de Khun-Tucker en el óptimo.

2. Verifique si para los puntos $(x_1 = 0, x_2 = 1)$ y $(x_1 = 0, x_2 = 0)$ se cumplen las condiciones de Khun-Tucker. ¿Existen direcciones factibles para estos 2 puntos en los cuales se mejore el valor de la función objetivo?. Explique brevemente.

**Solución**

1. Al resolver gráficamente, dibujando las curvas de nivel, podemos ver que los óptimos del problema vienen dados por a=(1,1) y b=(-1,1).




De las condiciones de KKT notamos 2 cosas:

*a*) Las condiciones están escritas para la forma estandar del problema, es decir, el problema es de minimización y las restricciones estan escritas de la forma $g_i(\vec{x}) \leq 0$.

*b*) Claramente, antes de plantear las ecuaciones necesitamos conocer los gradientes de la función objetivo ($\nabla f$) y de las restricciones ($\nabla g$)

Entonces:

- Escribimos el problema en forma estandar

$$\min \quad \tilde{f} = -x_1^2 - x_2^2$$

$$\begin{array}{llrrrcl} s.a & g_1 : & x_1 & & -1 & \leq & 0 \\ & g_2 : & -x_1 & & -1 & \leq & 0 \\ & g_3 : & & x_2 & -1 & \leq & 0 \\ & g_4 : & & -x_2 & & \leq & 0 \end{array}$$

- Calculamos los gradientes:

$$\nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla g_2(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_3(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \nabla g_4(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Ahora podemos imponer las ecuaciones sobre los 2 puntos óptimos encontrados: a y b.
  - <u>a=(1,1)</u>
    - $\mu_1 \cdot (x_1^a - 1) = 0$. Como $x_1^a = 1 \Rightarrow (x_1^a) = 0$ y por tanto la condición se cumple $\forall \mu_1 \in R$ y no podemos decir nada más.
    - $\mu_2 \cdot (-x_1^a - 1) = 0$. Como $x_1^a = 1 \Rightarrow (x_1^a) = 2 \neq 0$ y por tanto la condición solo se cumple si $\mu_2 = 0$.
    - $\mu_3 \cdot (x_2^a - 1) = 0$. Análogamente al primer caso, $\mu_3 \in R$.
    - $\mu_4 \cdot (-x_2^a) = 0$ Análogamente al segundo caso, $\mu_4 = 0$.

    La otra condición:
    $$\begin{pmatrix} -2x_1^a \\ -2x_2^a \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
    Reemplazando los valores:
    $$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
    Resolviendo el sistema de ecuaciones:
    $\mu_1 = 2 \qquad \mu_2 = 0$
    $\mu_3 = 2 \qquad \mu_4 = 0$
    Como $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \geq 0 \Rightarrow$ se cumple la condición de KKT para el punto a=(1,1).
  - <u>b=(-1,1)</u>
    - $\mu_1 \cdot (x_1^b - 1) = 0 \Rightarrow \mu_1 = 0$
    - $\mu_2 \cdot (-x_1^b - 1) = 0 \Rightarrow \mu_2 \in R$
    - $\mu_3 \cdot (x_2^b - 1) = 0 \Rightarrow \mu_3 \in R$
    - $\mu_4 \cdot (-x_2^b) = 0 \Rightarrow \mu_4 = 0$

    Y la otra condición:
    $$\begin{pmatrix} -2x_1^b \\ -2x_2^b \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
    Reemplazando los valores:
    $$\begin{pmatrix} +2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
    Resolviendo el sistema de ecuaciones:
    $\mu_1 = 0 \qquad \mu_2 = 2$
    $\mu_3 = 2 \qquad \mu_4 = 0$
    Como $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \geq 0 \Rightarrow$ se cumple la condición de KKT para el punto b=(-1,1).

2. Para verificar las condiciones de KKT, el sistema a resolver es el mismo anterior, pero evaluando en otros puntos

   - (0,1)

     - $\mu_1 \cdot (0-1) = 0 \Rightarrow \mu_1 = 0$
     - $\mu_2 \cdot (-0-1) = 0 \Rightarrow \mu_2 = 0$
     - $\mu_3 \cdot (1-1) = 0 \Rightarrow \mu_3 \in R$
     - $\mu_4 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow \mu_4 = 0$

     La otra condición (evaluada inmediatamente):

     $$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

     Resolviendo el sistema de ecuaciones:
     $\mu_3 = 2$ Como $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \geq 0 \Rightarrow$ se cumple la condición de KKT para el punto (0,1).

   - (0,0)

     - $\mu_1 \cdot (0-1) = 0 \Rightarrow \mu_1 = 0$
     - $\mu_2 \cdot (-0-1) = 0 \Rightarrow \mu_2 = 0$
     - $\mu_3 \cdot (0-1) = 0 \Rightarrow \mu_3 = 0$
     - $\mu_4 \cdot (-0) = 0 \Rightarrow \mu_4 \in R$

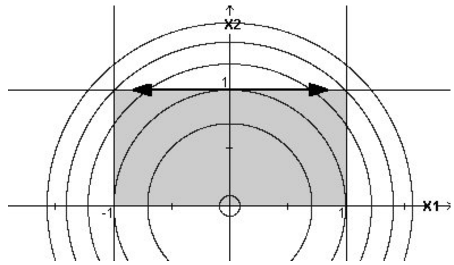
     La otra condición (evaluada inmediatamente):

     $$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

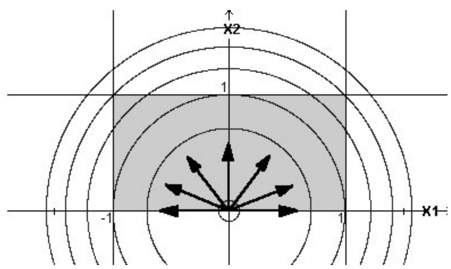
     Resolviendo el sistema de ecuaciones:
     $\mu_4 = 0$
     Como $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \geq 0 \Rightarrow$ se cumple la condición de KKT para el punto (0,1).

   Con respecto a las direcciones factibles, debemos decir que una dirección factible es aquella dirección (vector) que al movernos *un poco* (diferencial) sobre ella no nos *saldremos* del conjunto factible. Así, las direcciones factibles que mejoren el valor de la función objetivo las podemos hallar gráficamente:

   - (0,1)
     Este punto no es óptimo local porque existen direcciones factibles que mejoran la función objetivo, siendo estas las direcciones (1,0) y (-1,0) como lo indica el dibujo.




- (0,0) Este punto tampoco es óptimo local porque tambien existen direcciones factibles que mejoran la función objetivo, siendo estas todas las direcciones factibles como lo indica el dibujo (el punto es un mínimo).




$\odot$

## 5.3. Problema 4

Sea el problema

$$\min\ f(x,y) = e^{-x} + e^{-2y}$$

$$\begin{array}{rrcl} s.a & x+y & = & 1 \\ & x & \geq & 0 \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Encontrar el óptimo del problema utilizando la técnica de los multiplicadores de Lagrange.

### Solución

La forma estandar equivalente del problema viene dada por:

$$\min\ f(x,y) = e^{-x} + e^{-2y}$$

$$\begin{array}{rrcll} s.a & x+y-1 & = & 0 & (h_1) \\ & -x & \leq & 0 & (g_1) \\ & -y & \leq & 0 & (g_2) \end{array}$$

Construimos la función Lagrangeana:

$$L = e^{-x} + e^{-2y} + \lambda(x+y-1) + \mu_1(-x) + \mu_2(-y)$$

Luego las condiciones de lagrange, nos llevan al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{cr} \partial L/\partial x = 0: & -e^{-x} + \lambda - \mu_1 = 0 \\ \partial L/\partial y = 0: & -2e^{-2y} + \lambda - \mu_2 = 0 \\ \partial L/\partial \lambda = 0: & x+y-1 = 0 \\ \partial L/\partial \mu_1 = 0: & -x \leq 0 \\ \partial L/\partial \mu_2 = 0: & -y \leq 0 \end{array}$$

y las condiciones adicionales:

$$\mu_1, \mu_2 \geq 0$$

$$\mu_1(-x) = 0$$

$$\mu_2(-y) = 0$$

Estas condiciones adicionales nos dicen que hay 4 casos posibles:

- $\underline{x=0, y=0}$(Restricciones $g_1$ y $g_2$ activas)

  En este caso, la restricción $x+y-1=0$ no se satisface y por tanto este caso no es posible.

- $\underline{x=0, \mu_2=0}$(Restriccion $g_1$ activa)

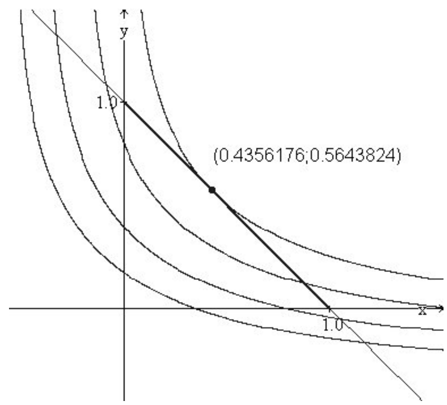
  En este caso, al resolver el sistema se obtiene que $\mu_1 = 2e^{-2} - 1 = -0,729 < 0$ y nuevamente no puede ser.

- $\underline{y=0, \mu_1=0}$(Restriccion $g_1$ activa)

  En este caso, al resolver el sistema se obtiene que $\mu_2 = 2e^{-2} - 1 = -1,632 < 0$ y nuevamente no puede ser.

- $\underline{\mu_1 = 0, \mu_2 = 0}$ (Ni $g_1$ ni $g_2$ activas)

  En este caso, al resolver el sistema de ecuaciones $\mu_1, \mu_2 \geq 0$ y el resultado óptimo viene dado por ($x = 0{,}436; y = 0{,}564$) como lo indica el gráfico.




$\odot$

## 5.4. Problema Propuesto

Sea el problema:

$$\text{máx } f(x_1, x_2) = x_2$$

$$\begin{aligned} s.a \quad & x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \\ & x_1^2 + x_2^2 \geq 1 \end{aligned}$$

Verifique si para ($x_1 = 0, x_2 = -1$) se cumplen las condiciones de Khun-Tucker. ¿Existen direcciones factibles en las cuales se mejore el valor de la función objetivo?. Explique brevemente. $\odot$