INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Leonardo López, Ximena Schultz, Richard Weber

Auxiliares: Fernanda Bravo, André Carboni, Nelson Devia, Ignacio Escobar, Rodrigo Wolf

IN34A – Optimización
Auxiliar N°3
27 de Agosto, 2008

Problema 1

Sea el siguiente problema de minimización:

$$\begin{aligned}
&Min\, F(x_1,x_2): (x_1-4)^2+(x_2-4)^2\\
&sa \qquad g_1(x_1,x_2): (x_1-1)^2+x_2^2 \le 1\\
&\qquad\quad\; g_2(x_1,x_2): x_1^{\,2}+(x_2-1)^2 \le 1\\
&\qquad\quad\; x_1 \ge 0\\
&\qquad\quad\; x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

a. Desarrolle las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para el problema
b. Revise el cumplimiento de las condiciones KKT para los siguientes puntos:
(0,0); (2, 0); (0,2)
c. Qué podemos concluir para cada uno de estos puntos?
d. Muestre las restricciones, el conjunto de soluciones factibles y la función objetivo gráficamente.
e. Determine un candidato para ser solución óptima analizando el grafico. Verifique si este candidato cumple con las condiciones de KKT.
f. De la solución optima y el valor de la función objetivo asociado.

Problema 2

Sea el siguiente problema de maximización:

$$\begin{aligned}
&Max\;\; x_1-2x_2\\
&sa \qquad 5x_1-2x_2 \le 3\\
&\qquad\quad\; x_1+x_2 \ge 1\\
&\qquad\quad\; -3x_1+x_2 \le 3\\
&\qquad\quad\; x_1-2x_2 \ge -3\\
&\qquad\quad\; x_1 \ge 0\\
&\qquad\quad\; x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

a. Grafique el problema y postule 4 puntos como posibles óptimos del problema.
b. Pruebe las condiciones necesarias y suficientes de KKT en los puntos escogidos y concluya acerca de los resultados obtenidos.
c. Muestre para el punto óptimo, el cono formado por los gradientes de las restricciones activas. .Que condición debe cumplir el gradiente de la función objetivo?

Pregunta 3

Una empresa productora desea programar la entrega de P pedidos. El tonelaje asociado al pedido p es T_p (p = 1, …, P). Estos pedidos son realizados por sus P clientes, donde p es el pedido del cliente p (p = 1, …, P).

Para esto la empresa cuenta con un servicio de transporte externo que posee K camiones, siendo C_k la capacidad del camión k (k=1, …, K). Los camiones siempre van en una vuelta de la empresa productora al sitio de un cliente y vuelven a la empresa productora, es decir no pueden despachar a diferentes clientes en una vuelta.

La empresa de transporte cobra un costo *de F* por tonelada que se lleva en el camión, y un costo fijo G por viaje.

Se estima que cada camión demora m_p minutos en ir desde la empresa productora hasta p (cliente p).

Se supone que el tiempo de la carga en el lado de la empresa productora y la descarga en el lado de cada uno de los clientes tiene tiempo 0.

Desarrolle un modelo de programación lineal mixto que permita a la empresa productora decidir qué camiones utilizar en cada vuelta, y cómo cargarlo, de manera de minimizar el costo a la subcontratación del transporte de los pedidos. Considere que la jornada laboral de un camión es de H horas al día.

Solución:

Problema 1:

a) Primero se lleva el problema a la forma estándar

$$\begin{array}{lll} \min f(x_1;x_2) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 & & (P') \\ \text{s.a} \quad g_1 : (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 & & \\ \quad\quad g_2 : x_1^2 + (x_2 - 1)^2 - 1 \leq 0 & & \\ \quad\quad g3 : -x_1 \leq 0 & & \\ \quad\quad g4 : -x_2 \leq 0 & & \end{array}$$

Ahora calculamos los gradientes de f y g_i

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2*(x_1 - 4) \\ 2*(x_2 - 4) \end{pmatrix} \;;\; \nabla g_1 = \begin{pmatrix} 2*(x_1 - 1) \\ 2*x_2 \end{pmatrix} \;;\; \nabla g_2 = \begin{pmatrix} 2*x_1 \\ 2*(x_2 - 1) \end{pmatrix} \;;\; \nabla g_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \;;\; \nabla g_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Así, se tiene que las condiciones de KKT son las siguientes:

$$\begin{pmatrix} 2*(x_1 - 4) \\ 2*(x_2 - 4) \end{pmatrix} + \mu_1 * \begin{pmatrix} 2*(x_1 - 1) \\ 2*x_2 \end{pmatrix} + \mu_2 * \begin{pmatrix} 2*x_1 \\ 2*(x_2 - 1) \end{pmatrix} + \mu_3 * \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_4 * \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

y

$$\begin{aligned} &\mu_1 * \; ((x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1) = 0 \\ &\mu_2 * ((x_1^2 + (x_2 - 1)^2 - 1) = 0 \\ &\mu_3 * (-x_1) = 0 \\ &\mu_4 * (-x_2) = 0 \end{aligned}$$

b) Punto (0,0):

$$\begin{aligned} &\mu_1 * \; ((0-1)^2 + 0^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 * 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 \in \Re \\ &\mu_2 * ((0^2 + (0-1)^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 * 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_2 \in \Re \\ &\mu_3 * 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_3 \in \Re \\ &\mu_4 * 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_4 \in \Re \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{pmatrix} 2*(0-4) \\ 2*(0-4) \end{pmatrix} + \mu_1 * \begin{pmatrix} 2*(0-1) \\ 2*0 \end{pmatrix} + \mu_2 * \begin{pmatrix} 2*0 \\ 2*(0-1) \end{pmatrix} + \mu_3 * \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_4 * \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \end{pmatrix} + \mu_1 * \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 * \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu_3 * \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_4 * \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Pero notemos que $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes, al igual que $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, por lo que basta con:

$$\begin{pmatrix} -8 \\ -8 \end{pmatrix} + \mu_3 * \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_4 * \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

De donde

$$\mu_3 = -8 < 0$$
$$\mu_4 = -8 < 0$$

Como son menores que 0, no cumplen KKT.

<u>Punto (2,0):</u>

$$\mu_1 * \ ((2-1)^2 + 0^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 * 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 \in \Re$$
$$\mu_2 * ((2^2 + (0-1)^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 * 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_2 = 0$$
$$\mu_3 * (-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_3 = 0$$
$$\mu_4 * 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_4 \in \Re$$

Entonces,

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix} + \mu_1 * \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_4 * \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

De donde

$$\mu_1 = 2$$
$$\mu_4 = -8 < 0$$

Como $\mu_4 < 0$ entonces no cumple KKT.

<u>Punto (0,2):</u>

$$\mu_1 * \ ((0-1)^2 + 2^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 * 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 = 0$$
$$\mu_2 * ((0^2 + (2-1)^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 * 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_2 \in \Re$$
$$\mu_3 * 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_3 \in \Re$$
$$\mu_4 * (-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_4 = 0$$

Entonces,

$$\begin{pmatrix}-8\\-4\end{pmatrix}+\mu_2*\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}+\mu_3*\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=0$$

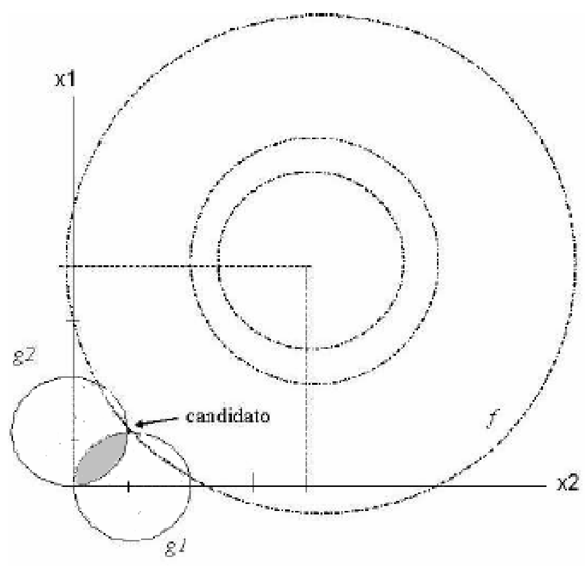
De donde

$$\mu_2 = 2$$
$$\mu_3 = -8 < 0$$

Como $\mu_3 < 0$ entonces no cumple KKT.

c) (0,0) Es un punto en el extremo del poliedro factible que no cumple KKT, como la región es convexa, quiere decir que (0,0) no es óptimo del problema. Se puede observar que, moviéndose en cualquier punto al interior de la región factible, la función objetivo mejora.
(2,0) Es un punto que no cumple KKT lo que indica que este punto tiene alguna característica particular, en este caso, esto sucede porque no se encuentra dentro del poliedro factible.
(0,2) Es un punto que no cumple lo que indica que este punto tiene alguna característica particular, en este caso, esto sucede porque no se encuentra dentro del poliedro factible.

d)



e) El candidato para se solución óptima se encuentra en la intersección entre ambas restricciones más cercanas al (4,4).
Utilizando entonces g_1 y g_2 (restricciones activas) para obtener el punto (x_1,x_2) correspondiente, llegamos a que el candidato a óptimo es el (1,1).

¿Cumple KKT?

$$
\begin{aligned}
&\mu_1 * \ ((1-1)^2 + 1^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 * 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 \in \Re \\
&\mu_2 * ((1^2 + (1-1)^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 * 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_2 \in \Re \\
&\mu_3 * 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_3 = 0 \\
&\mu_4 * 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_4 = 0
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix} + \mu_1 * \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_4 * \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0
$$

De donde

$$
\begin{aligned}
\mu_1 &= 3 \\
\mu_4 &= 3
\end{aligned}
$$

Como ambos son positivos, ¡entonces se cumple KKT! **:)**

f) La solución óptima es el valor encontrado en la parte e) ya que, como se observa gráficamente, la región es convexa, pues los puntos que conforman la línea que une a cualquier par de puntos dentro de la región pertenecen a ella.
Así como la región es convexa, también lo son las restricciones asociadas y función objetivo asociadas. Luego el punto óptima es:

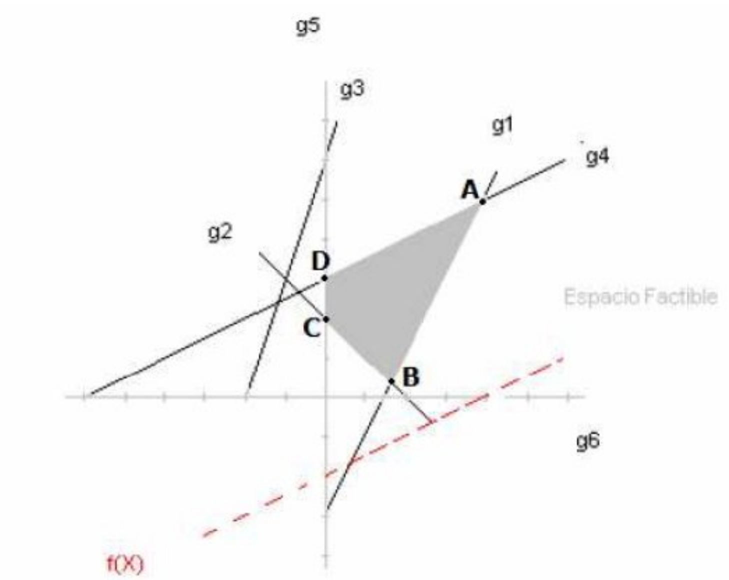
$$(x_1,x_2)=(1,1)$$

Y la función objetivo:

$$f(1,1)= 9 + 9 = 18$$

Problema 2:

a)



Las 4 esquinas del poliedro factible son candidatos a óptimo (puntos A,B, C y D).

Punto A:
Se activan las restricciones g1 y g4
A = (3/2,9/4)

Punto B
Se activan las restricciones g1 y g2
B = (5/7,2/7)

Punto C
Se activan las restricciones g2 y g5
C = (0,1)

Punto D
Se activan las restricciones g4 y g5
D = (0,3/2)

b) Primero llevamos el problema a su forma estándar:

$$
\begin{aligned}
&\min f = -x_1 + 2x_2 \\
&\text{s.a.} \quad g_1 : 5x_1 - 2x_2 - 3 \leq 0 \\
&\qquad\quad g_2 : 1 - x_1 - x_2 \leq 0 \\
&\qquad\quad g_3 : -3x_1 + x_2 - 3 \leq 0 \\
&\qquad\quad g_4 : -x_1 + 2x_2 - 3 \leq 0 \\
&\qquad\quad g_5 : -x_1 \leq 0 \\
&\qquad\quad g_6 : -x_2 \leq 0
\end{aligned}
$$

Ahora calculamos los gradientes de f y g_i

$$\nabla f=\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix} \;;\; \nabla g_1=\begin{pmatrix}5\\ -2_2\end{pmatrix} \;;\; \nabla g_2=\begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix} \;;\; \nabla g_3=\begin{pmatrix}-3\\ 1\end{pmatrix} \;;\; \nabla g_4=\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix} \;;\; \nabla g_5=\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix} \;;\; \nabla g_6=\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}$$

<u>Punto A = (3/2,9/4):</u>

Restricciones 1 y 4 activas, entonces:

$$\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}+\mu_1*\begin{pmatrix}5\\ -2\end{pmatrix}+\mu_4*\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}=0$$

Y de aquí

$$\mu_1 = 0$$
$$\mu_4 = -1 < 0$$

Como μ_4 < 0 entonces no cumple KKT.

<u>Punto B = (5/7,2/7):</u>

Restricciones 1 y 2 activas, entonces:

$$\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}+\mu_1*\begin{pmatrix}5\\ -2\end{pmatrix}+\mu_2*\begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix}=0$$

Y de aquí

$$\mu_1 = 3/7$$
$$\mu_2 = 8/7$$

¡Cumple KKT!

<u>Punto C = (0,1):</u>

Restricciones 2 y 5 activas, entonces:

$$\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}+\mu_2*\begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix}+\mu_5*\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}=0$$

Y de aquí

$$\mu_2 = 2$$
$$\mu_5 = -3$$

Como μ_5 < 0 entonces no cumple KKT.

Punto D = (0,3/2):

Restricciones 4 y 5 activas, entonces:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_4 * \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_5 * \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Y de aquí

$$\mu_4 = -1$$
$$\mu_5 = 0$$

Como $\mu_4 < 0$ entonces no cumple KKT.

Así, B es nuestro único candidato y como f es convexa y las restricciones también son convexas, B es optimo global del problema

Pregunta 4

Variables
(0.7 por cada una)

$$x_{skp} \begin{cases} 1 & \text{Si el camión k va a dejar pedido del cliente p en la salida s.} \\ 0 & \text{Si no.} \end{cases}$$

y_{skp} = Toneladas que el camión k lleva al cliente p en la salida s

Con , k=1,..., K, p=1,...,P, s=1,..., V_k Tal que el número máximo de salidas depende de cada camión y está dado por $V_k = \sum_p \left\lceil \frac{T_p}{C_k} \right\rceil$ que es el caso en que el camión k abastece a todos los clientes.

Restricciones

- (0.7 ptos) Respetar la capacidad en cada visita

$$y_{skp} \leq C_k x_{skp} \qquad \forall s, k, p$$

- (0.7 ptos) Hacerlo antes de H horas

$$\sum_{s=1}^{V_k}\sum_{p=1}^{P} x_{skp}\cdot 2\cdot m_p \leq H\cdot 60 \qquad \forall k$$

- (0.7 ptos) No sobrepasar la carga en cada visita

$$y_{skp} \leq T_p x_{skp} \qquad \forall s,k,p$$

- (0.7 ptos) Visitar a solo un cliente por vuelta

$$\sum_{p=1}^{P} x_{skp} = 1 \qquad \forall s,k$$

- (0.7 ptos) Que cada cliente reciba exactamente su pedido

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{s=1}^{V_k} y_{skp} = T_p \qquad \forall p$$

- (0.5 ptos) Naturaleza de las variables:

$$x_{skp} \in \{0,1\} \qquad \forall s,k,p$$
$$y_{skp} \geq 0 \qquad \forall s,k,p$$

Función Objetivo
(0.6 ptos)

$$\min z = \sum_{p=1}^{P}\sum_{k=1}^{K}\sum_{s=1}^{V_k} x_{skp}\cdot G + \sum_{p=1}^{P}\sum_{k=1}^{K}\sum_{s=1}^{V_k} y_{skp}\cdot F$$

Dudas y/o Comentarios
mariabra@ing.uchile.cl