IN34A - Optimización

Capítulo 2 - Anexos 2

Leonardo López H.

lelopez@ing.uchile.cl

Primavera 2008

Ejemplo I

$$
\begin{array}{ll}
\text{mín} & f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \\
s.a. & g_1(x) = x_1^2 - x_2 \leq 0 \\
 & g_2(x) = x_1 + x_2 - 2 \leq 0
\end{array}
$$

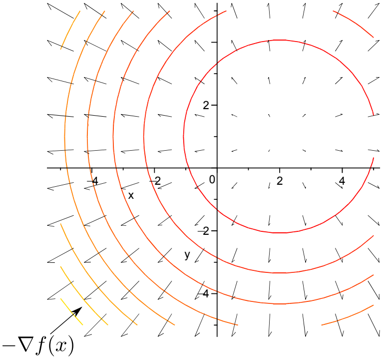

Figura: $f(x)$

Ejemplo II

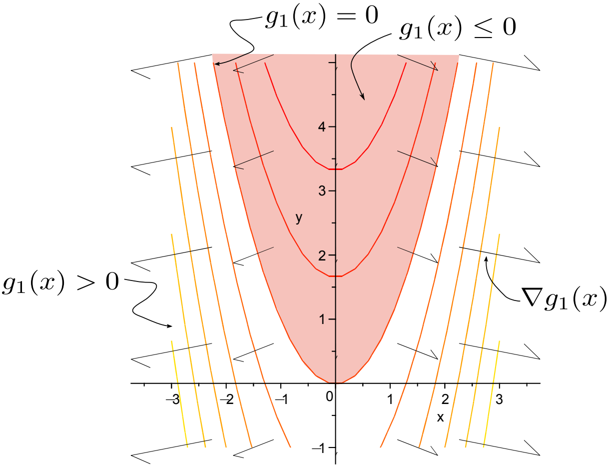

Figura: $g_1(x)$

Ejemplo III

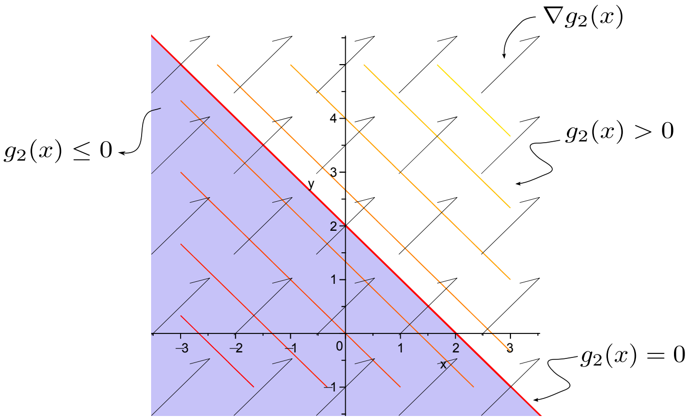

Figura: $g_2(x)$

Ejemplo IV

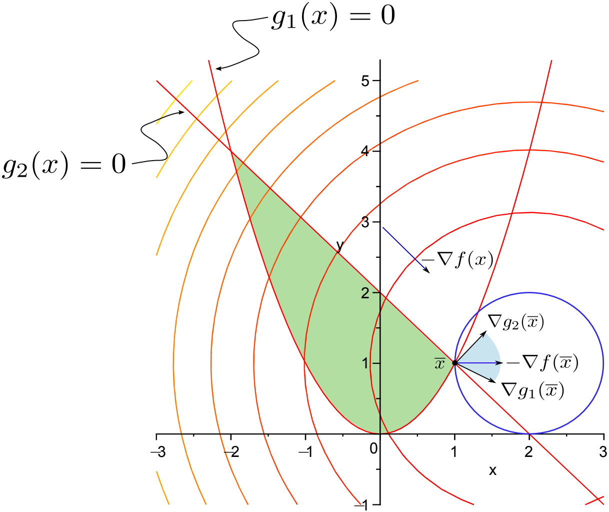

Figura: Problema

Clausura I

Definición: Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces:

- $x \in S$ se dice **punto interior** de S si $\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq S$.
- $x \in S$ se dice **punto adherente** de S si $\forall \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$.
- $x \in S$ se dice **punto frontera** de S si $\forall \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset \wedge B(x, \varepsilon) \cap S^c \neq \emptyset$.

Definición: Dado $S \subseteq \mathbb{R}^n$, se define los conjuntos:

- **Interior** de S: $int(S) = \{x \in S / x \text{ es punto interior de } S\}$.
- **Adherencia o clausura** de S: $cl(S) = \{x \in S / x \text{ es punto adherente de } S\}$.
- **Frontera** de S: $\partial S = \{x \in \mathbb{R}^n / x \text{ es punto frontera de } S\}$.

Clausura II

Propiedades:

- S es abierto $\Leftrightarrow S = int(S)$.
- S es cerrada $\Leftrightarrow S = cl(S)$.
- $cl(S) = S \cup \partial S$. Es decir, $cl(S)$ es el conjunto cerrado más pequeño que contiene S.
- S convexo $\Rightarrow int(S)$ convexo.
- S convexo con $int(S) \neq \emptyset \Rightarrow cl(S)$ convexo.

Lagrangeano I

- Consideremos el siguiente problema de optimización con restricciones:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & f(x) & \\ s.a. & g_i(x) \leq 0 & i = 1, ..., m \\ & h_j(x) \leq 0 & j = 1, ..., p \end{array}$$

- Se define el Lagrangeano asociado al problema como una función $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

$$L(x, \mu, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j h_j(x)$$

Lagrangeano II

- Notemos que:

$$\nabla_x L(x,\mu,\lambda) = \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \nabla h_j(x)$$

$$\nabla_{\mu_i} L(x,\mu,\lambda) = g_i(x) \quad \forall i = 1, \dots, m$$

$$\nabla_{\lambda_j} L(x,\mu,\lambda) = h_j(x) \quad \forall j = 1, \dots, p$$

- Luego podemos reconstruir las condiciones de KKT en función del Lagrangeano.

Condiciones de KKT

$$\nabla_x L(x, \mu, \lambda) = 0$$

$$\nabla_{\mu_i} L(x, \mu, \lambda) \leq 0 \quad \forall i = 1, ..., m$$

$$\nabla_{\lambda_j} L(x, \mu, \lambda) = 0 \quad \forall j = 1, ..., p$$

$$\mu_i g_i(x) = 0 \quad \forall i = 1, ..., m$$

$$\mu_i \geq 0 \quad \forall i = 1, ..., m$$

- Resolver este sistema, significa determinar (x, μ, λ) tales que verifican la condición necesaria y que x sea factible para el problema.
- Con los supuestos de convexidad para f y la región factible, la condición necesaria es suficiente y por lo tanto x es mínimo global.