Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A - Optimización

Profs: Guillermo Durán
Daniel Espinoza
Aux: Andre Carboni
Leonardo López
Rodrigo Wolf

# CTP 1

02 de Abril de 2008

La importante tienda por departamentos *Falafea* desea determinar su plan de abastecimiento y distribución para los próximos $T$ días. *Falafea* cuenta con un único centro de distribución (CD) y con $I$ tiendas distribuidas a lo largo del país, las que ofrecen $N$ productos distintos a sus clientes.

Los productos recibidos por el CD son clasificados según su destino: alguna de las tiendas o inventario. Si un producto tiene como destino alguna tienda, es enviado a la zona de despacho de la tienda respectiva, donde es etiquetado antes de ser despachado. Si un producto tiene como destino el inventario, este es enviado a la zona del almacén al que fue asignado. El CD tiene la capacidad de almacenar $H[m^3]$ y cada unidad del producto $n$ tiene un volumen de $F_n[m^3/unid.]$. Dada la planificación de mano de obra realizada por el CD, para el periodo $t$ se tiene la capacidad de recepcionar hasta $MaxR_t$ unidades de cualquier producto y una capacidad de despachar hasta $MaxD_t$ unidades de cualquier producto. Por cada unidad despachada desde el CD el día $t$ se incurre en un costo $\alpha_t[\$/unid.]$ y el costo díario de mantención del inventario del CD es de $M[\$/m^3]$. Al comienzo del horizonte el CD cuenta con $R_n$ unidades del producto $n$ en inventario.

Como la capacidad de proceso del CD es limitada, se tiene la opción de arrendar por día alguna de las $K$ posibles bodegas externas. Las bodegas externas no tienen la capacidad de almacenar inventario, pero sirven a *Falafea* para procesar (clasificar y etiquetar) productos que recibe de sus proveedores y despacha a sus tiendas en el mismo día (para así disminuir la carga de trabajo del CD). La bodega externa $k$ tiene la capacidad de procesar hasta $MaxP$ unidades al día de cualquier producto a un costo de $\beta_k[\$/unid.]$. El costo de arriendo de la bodega $k$ es de $A_k[\$]$ por día.

Cada producto $n$ es adquirido a un único proveedor a un costo $C_n[\$/unid.]$ y cada proveedor es responsable del transporte del producto desde sus bodegas hasta el CD o alguna de las bodegas que arrendadas (según defina *Falafea*). El proveedor del producto $n$ ha informado que para el periodo $t$ puede vender a *Falafea* hasta $B_{nt}$ unidades. El costo unitario de trasporte desde el CD a la tienda $i$ es de $\mu_i[\$/m^3]$ y desde la bodega externa $k$ hasta la tienda $i$ es de $\lambda_{ki}[\$/m^3]$. Los envíos desde el CD o cualquiera de las bodegas externas hasta la tienda $i$ demora un total de $\delta_i$ días. Cada tienda $i$ ha acordado con el CD el envío de $D_{nit}$ unidades del producto $n$ para cada día $t > \delta_i$, para satisfacer la demanda de sus clientes. Por otra parte, el CD puede decidir dejar demanda insatisfecha por algunos productos en algunas tiendas por motivos operacionales. El costo de dejar demanda insatisfecha del producto $n$ en la tienda $i$ es de $\theta_{ni}[\$/unid.]$.

*Falafea* le solicita que plantee un modelo de programación lineal mixto que minimice sus costos de abastecimiento y distribución en el horizonte de $T$ días.

**Bonus** (1 punto)

Suponga ahora que existe la posibilidad de que *Falafea* firme contratos especiales por determinados productos con sus proveedores. Si se firma un contrato especial por el producto $n$, su proveedor tendrá la capacidad de vender $U_{nt}$ unidades extras en el día $t$ a cambio de un costo fijo de $CO_n[\$]$. Además, el proveedor de este producto exigirá que *Falafea* compre al menos $P_n$ unidades de su producto a lo largo del horizonte de planificación, que no se deje demanda insatisfecha por este producto y que no se firme un contrato especial con alguno de los productos competidores del producto en cuestión. Se conoce el parámetro $G_{nm}$ que es 1 si el producto $n$ compite en el mercado con el producto $m$ y es 0 en caso contrario. Modifique su modelo para incorporar esta situación, es decir, indique qué variables de decisión y restricciones tendría que agregar, qué restricciones tendría que modificar y cómo cambiaría la función objetivo.

Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial
IN34A - Optimización

Profs: Guillermo Durán
Daniel Espinoza
Aux: Andre Carboni
Leonardo López
Rodrigo Wolf

# Pauta CTP 1

02 de Abril de 2008

• **Variables de decisión** (1.2 puntos)

$x_{nt}$ = Unidades compradas del producto $n$ que son enviadas al CD en el día $t$.

$\overline{X}_{nkt}$ = Unidades compradas del producto $n$ que son enviadas a la bodega externa $k$ en el día $t$.

$y_{nit}$ = Unidades del producto $n$ enviadas desde el CD a la tienda $i$ en el día $t$.

$\overline{Y}_{nkit}$ = Unidades del producto $n$ enviadas desde la bodega externa $k$ a la tienda $i$ en el día $t$.

$I_{nt}$ = Unidades del producto $n$ en inventario en el CD al final del día $t$.

$S_{nit}$ = Unidades de demanda insatisfecha del producto $n$ en la tienda $i$ en $t$.

$z_{kt} = \begin{cases} 1 & \text{si se arrienda la bodega externa } k \text{ para el día } t \\ 0 & \sim \end{cases}$

• **Restricciones**

1. Naturaleza de las variables (0.3 puntos):

$$x_{nt}, \overline{X}_{nkt}, y_{nit}, \overline{Y}_{nkit}, I_{nt}, S_{nit} \geq 0$$

$$z_{kt} \in \{0, 1\}$$

$$\forall n \in \{1, ..., N\}, \forall i \in \{1, ..., I\}, \forall k \in \{1, ..., K\}, \forall t \in \{1, ..., T\}$$

2. Satisfacer disponibilidad de cada producto (0.4 puntos):

$$x_{nt} + \sum_k \overline{X}_{nkt} \leq B_{nt} \quad \forall n, t$$

3. Satisfacer la demanda de cada tienda (0.5 puntos):

$$y_{ni,t-\delta_i} + \sum_k \overline{Y}_{nki,t-\delta_i} \geq D_{nit} - S_{nit} \quad \forall n, i \quad \forall t > \delta_i$$

4. Capacidad de almacenamiento del CD (0.4 puntos):

$$\sum_n F_n I_{nt} \leq H \quad \forall t$$

5. Capacidad de recepción del CD (0.4 puntos):

$$\sum_n x_{nt} \leq MaxR_t \quad \forall t$$

6. Capacidad de despacho del CD (0.4 puntos):

$$\sum_{n,i} y_{nit} \leq MaxD_t \quad \forall t$$

7. Ecuación de inventario del CD (0.5 puntos):

$$\begin{aligned} I_{nt} &= I_{n,t-1} + x_{nt} - \sum_i y_{nit} \quad \forall n \quad \forall t > 1 \\ I_{n1} &= R_n + x_{n1} - \sum_i y_{ni1} \quad \forall n \end{aligned}$$

8. Continuidad de flujo en las bodegas externas (0.4 puntos):

$$\overline{X}_{nkt} = \sum_i \overline{Y}_{nkit} \quad \forall n, k, t$$

9. Capacidad de procesamiento de cada bodega externa (0.5 puntos):

$$\sum_n \overline{X}_{nkt} \leq MaxP \cdot z_{kt} \quad \forall k, t$$

**Observación:** Alternativamente a la restricción (7), podría crearse la variable de inventario para el día artificial $t = 0$ y hacerla igual al inventario inicial. De esta forma, esta restricción podría reemplazarse por:

$$\begin{aligned} I_{nt} &= I_{n,t-1} + x_{nt} - \sum_i y_{nit} \quad \forall n \quad \forall t \\ I_{n0} &= R_n \quad \forall n \end{aligned}$$

• **Función Objetivo** (1 puntos)

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad Z = & \left( \sum_{n,t} C_n \cdot x_{nt} + \sum_{n,k,t} C_n \cdot \overline{X}_{nkt} \right) + \left( \sum_{n,i,t} \mu_i \cdot F_n \cdot y_{nit} + \sum_{n,k,i,t} \lambda_{ki} \cdot F_n \cdot \overline{Y}_{nkit} \right) \\ & + \left( \sum_{n,i,t} \alpha_t \cdot y_{nit} + \sum_{n,k,i,t} \beta_k \cdot \overline{Y}_{nkit} \right) + \sum_{n,t} M \cdot F_n \cdot I_{nt} + \sum_{k,t} A_k \cdot z_{kt} + \sum_{n,i,t} \theta_{ni} \cdot S_{nit} \end{aligned}$$

## Bonus:

• **Variables de decisión** (0.1 puntos)

$$w_n = \begin{cases} 1 & \text{si se firma un contrato especial por el producto } n \\ 0 & \sim \end{cases}$$

• **Restricciones**

- Restricciones Modificadas:

1. Satisfacer disponibilidad de cada producto (0.15 puntos):

$$x_{nt} + \sum_{k} \overline{X}_{nkt} \leq B_{nt} + U_{nt} \cdot w_n \quad \forall n, t$$

- Restricciones Nuevas:

1. Naturaleza de las variables (0.05 puntos):

$$w_n \in \{0, 1\} \quad \forall n \in \{1, ..., N\}$$

2. Satisfacer el mínimo de compras de un producto, si se firma un contrato especial (0.175 puntos):

$$\sum_{t} x_{nt} + \sum_{k,t} \overline{X}_{nkt} \geq P_n \cdot w_n \quad \forall n$$

3. No puede haber demanda insatisfecha por los productos con contrato especial (0.175 puntos):

$$S_{nit} \leq D_{nit} \cdot (1 - w_n) \quad \forall n, i \quad \forall t > \delta_i$$

4. Si se firma un contrato especial con algún producto, no se puede firmar con los productos competidores (0.2 puntos):

$$w_n + w_m \leq 2 - G_{nm} \quad \forall n \in \{1, ..., N\} \quad \forall m \in \{1, ..., N\}$$

- **Función Objetivo** (0.15 puntos)

$$\text{mín} \quad Z' = \quad Z + \sum_{n} CO_n \cdot w_n$$

Dudas y/o consultas
Leonardo López H.
lelopez@ing.uchile.cl