



Ejercicio en Clases N° 2 **06 de octubre de 2008**

El destacado joven investigador Rigo Lobos ha decidido tomar vacaciones y emprender viaje a una ciudad de Europa. Después de arribar se ha encontrado con una disyuntiva, necesita decidir como distribuir su dinero en las distintas actividades de la ciudad.

Para simplificar el problema Rigo ha decidido dividir las actividades posibles en dos tipos: Turismo y Carrete.

Rigo posee un total de 22.000 euros diarios y sabe que, por cada euro que gasta en carrete, debe gastar uno adicional por causa de propinas y movilización. Por otra parte Rigo debe administrar su tiempo, para esto sabe que mil euros gastados en turismo significan 3 horas de ocupación en esta actividad, de la misma forma mil euros que gastados en carrete significan 1 hora de ocupación. Nuestro amigo cuenta con un total de 21 horas diarias, pues debe dormir al menos 3.

Rigo considera que gastar mil euros en turismo contribuye a su diversión en 4 [u.d] (unidades de diversión) mientras que mil euros gastados en carretes contribuirán a su diversión en 7 [u.d].

Rigo, frente a este problema ha decidido pedirle ayuda a usted versado alumno de optimización para maximizar su diversión diaria.

1. (1.5 ptos.) Formule un modelo de programación lineal continuo que permita decidir la cantidad de dinero que Rigo debe dedicar diariamente a cada actividad.
2. (2.5 ptos.) Resuelva el problema aplicando el algoritmo Simplex empezando desde el origen.
3. (1.0 ptos) Mediante análisis gráfico indique qué ocurre con la solución óptima (restricciones activas/inactivas) si:
 - a) Rigo está cansado y debe dormir al menos 6 horas diarias.
 - b) Rigo ha aumentado su asignación de diversión para el carrete a 8 [u.d].
4. (1.0 ptos.) Analice hasta qué valor puede aumentar la asignación de diversión hecha por Rigo al turismo para que la solución óptima (restricciones activas e inactivas) no cambie.

Ejercicio en Clases N° 2
06 de octubre de 2008

1.-Variables Decisión:

X_1 Miles de euros gastados en Turismo.
 X_2 Miles de euros gastados en carrete

$$\begin{array}{ll} \max & 4X_1 + 7X_2 \\ \text{s.a.} & X_1 + 2X_2 \leq 22 \\ & 3X_1 + X_2 \leq 21 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{No superar el presupuesto} \\ \text{No superar cantidad de horas disponibles.} \end{array}$$

2.- Empezando desde el origen:

$$\begin{array}{ll} \min & -4X_1 - 7X_2 \\ \text{s.a.} & X_1 + 2X_2 + X_3 = 22 \\ & 3X_1 + X_2 + X_4 = 21 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{array}$$

$$B = \begin{pmatrix} X_3 & X_4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow R = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = I^{-1} \rightarrow \bar{b} = b = \begin{pmatrix} 22 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R = (-4, -7) \leq 0$$

Esto quiere decir que no estamos en el óptimo y que X_2 debe entrar a la base

Criterio de Salida:

$$\min \left\{ \frac{22}{2}, \frac{21}{1} \right\} = \min \{11, 21\} = 11 \quad X_3 \text{ sale de la base}$$

Iteración 1

$$B = \begin{pmatrix} X_2 & X_4 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow R = \begin{pmatrix} X_1 & X_3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = c_R - c_B B^{-1} R = (-4, 0) - (-7, 0) \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = (-4, 0) + (7/2, 7/2) = (-1/2, 7/2)$$

Esto quiere decir que no estamos en el óptimo y que X_1 entra a la base.

$$\bar{A}_{\bullet 1} = B^{-1} \cdot A_{\bullet 1} = B^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

Criterio de Salida:

$$\min \left\{ \frac{11}{1/2}, \frac{10}{5/2} \right\} = \min \{22, 4\} = 2/3$$

X_4 sale de la base

Iteración 2:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$$\bar{b} = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = c_R - c_B B^{-1}R = (0, 0) - (-7, -4) \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_R = (0, 0) + (1/5, 17/5) = (1/5, 17/5) \geq 0 \Rightarrow \text{óptimo}$$

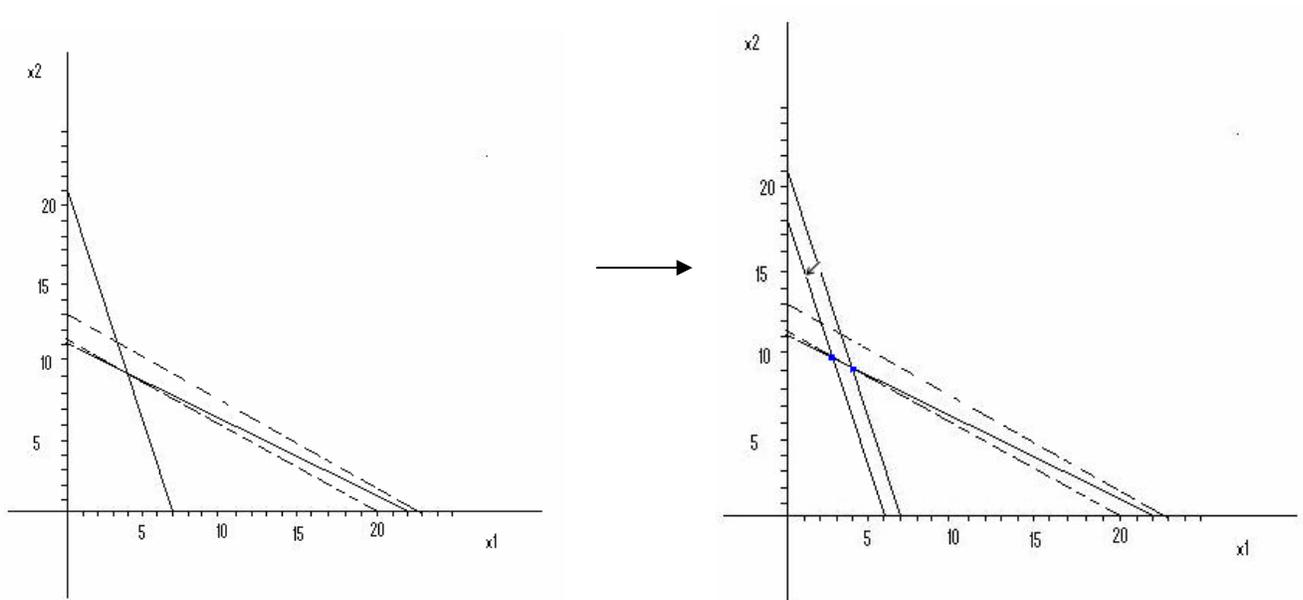
$$z = 4 \cdot 4 + 7 \cdot 9 = 79 = z^*$$

Observemos que, en el óptimo, ambas restricciones son activas.

3.- a) Si Rigo debe dormir al menos 6 horas diarias la segunda restricción que da en:

$$3X_1 + X_2 \leq 18 \quad \text{No superar cantidad de horas disponibles.}$$

De esta forma la figura queda:

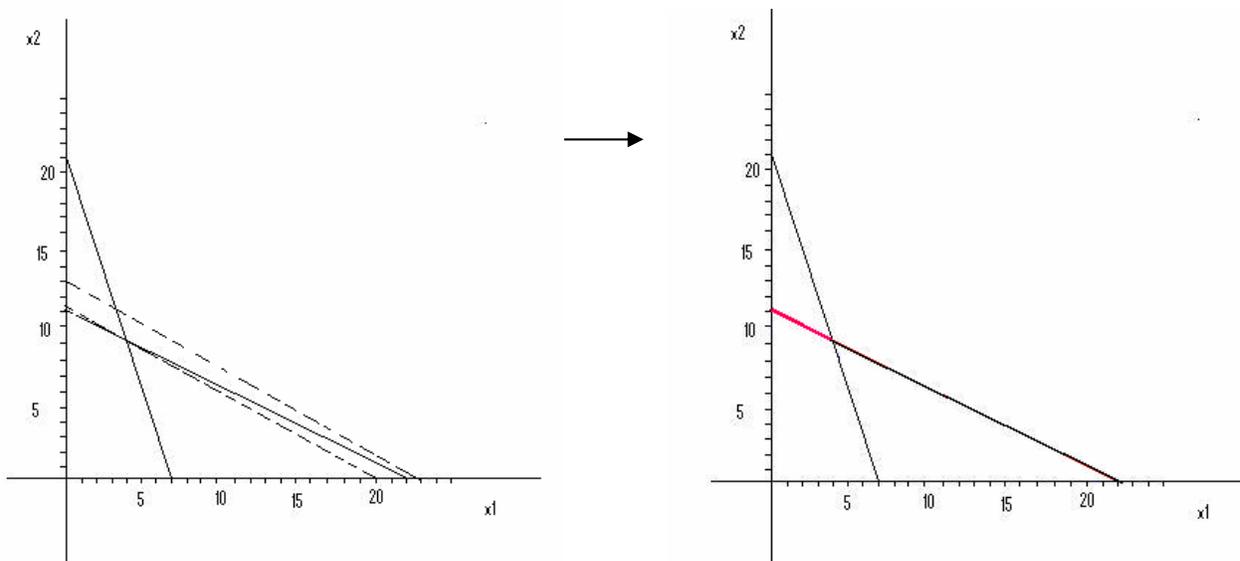


Las restricciones activas e inactivas se mantiene iguales cambia el valor del óptimo

$x_1 = 14/5$ y $x_2 = 48/5$ con $z = 78,4$ menor que la función objetivo anterior.
(No era necesario calcular el nuevo punto para el Ejercicio)

b) Si Rigo aumenta su asignación al carretera a 8 la función objetivo queda con la misma pendiente que la restricción presupuestaria, por lo que ahora se puede elegir cualquier punto de la recta roja mostrada en la figura la que incluye el punto óptimo anterior.

Las restricciones activas varían ya que se pueden elegir puntos donde la restricción horaria no es activa, es decir, si esto sucede Rigo podría dormir más. Además se hace notar que con este cambio Rigo a la vez podría no turistar.



La función objetivo cambia su valor a : $z = 88$

(No era necesario calcular el valor de la F.O. para el Ejercicio)

4.- Si se aumenta la preferencia de Rigo por el turismo se está disminuyendo la pendiente de la función objetivos a valores menores a $-4/7$ por lo que la pendiente se vuelve más vertical. Las restricciones activas e inactivas cambian en el momento en que la pendiente de la función objetivo iguala a la pendiente de la restricción horaria (igual a 3). Esto es cuando la asignación de diversión al turismo alcanza el valor de 21.