Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Civil Industrial.
IN34A Optimización – Sección 2

Profesor: Ximena Schultz S.

Ejercicio en Clases Nº 3
27 de octubre de 2008

El presidente de su equipo favorito de fútbol ha pedido su ayuda para decidir qué momento es el indicado para vender a cada uno de sus I jugadores estrellas del momento.

Un experto del mercado de jugadores ha estimando que por cada mes que el jugador i permanece en el club, su pase se valora en c_i miles de euros. Sin embargo, el no vender jugadores perjudica la imagen del club ante los equipos europeos, por lo tanto, el experto ha recomendado que el promedio ponderado de los plazos de venta de los jugadores no supere los M meses. El experto ha estimado el ponderador para cada jugador, indicando que el ponderador del jugador i es w_i.

Fuentes internas del club, le han indicado que por cada mes que permanece el jugador i en el club, el descontento del plantel aumenta en v_i medido en unidades de descontento por mes. El presidente desea mantener un ambiente de tranquilidad al interior del plantel, lo cual sucede solo si el nivel de descontento no supera el nivel crítico V.

1. (2 puntos) Suponiendo que las transacciones de los jugadores sólo pueden realizarse el primer día de cada mes, formule el problema de programación lineal entera que permita encontrar los plazos de venta óptimos de cada jugador.

2. (3 puntos) Resuelva el problema planteado en el punto anterior, utilizando el algoritmo de Branch & Bound, para la siguiente instancia:

I	c_1	c_2	w_1	w_2	M	v_1	v_2	V
2	5	8	0.5	0.5	3	5	9	45

   Nota: Los subproblemas lineales que genere pueden resolverse gráficamente.

3. (1 Puntos) Si antes de comenzar a resolver un problema entero con Branch & Bound usted conociera alguna solución entera factible. ¿Podría aprovechar esta información para hacer más eficiente el algoritmo? ¿Cómo?

Pauta Ejercicio en Clases Nº 3
27 de octubre de 2008

1.

Variables de decisión:

x_i =número de meses más en que será vendido el jugador i

Función objetivo:

$$MaxZ = \sum_{i=1}^{I} c_i x_i$$

Restricciones

- Plazo de venta promedio ponderado no debe superar los M meses

  $$\sum_{i=1}^{I} w_i x_i \leq M$$

- Mantener la tranquilidad del plantel

  $$\sum_{i=1}^{I} v_i x_i \leq V$$

- Naturaleza de las variables

  $$x_i \in N \quad \forall i = 1,...,I$$

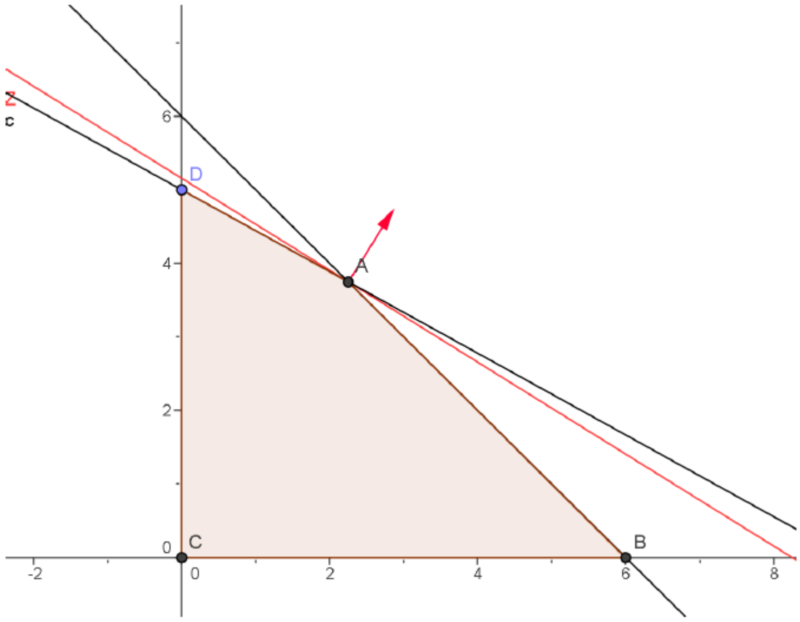
2. En este caso el problema queda:

$$
\begin{aligned}
(PE) \quad & MaxZ = 5x_1 + 8x_2 \\
& s.a \\
& 0.5x_1 + 0.5x_2 \leq 3 \\
& 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\
& x_1, x_2 \in N
\end{aligned}
$$

El primer paso de B&B es inicializar el incumbente en $\bar{z} = -\infty$. Luego, debemos encontrar la solución del problema relajado de (PE):

$$
\begin{aligned}
(P_0) \quad & MaxZ = 5x_1 + 8x_2 \\
& s.a \\
& 0.5x_1 + 0.5x_2 \leq 3 \quad \textbf{(1)} \\
& 5x_1 + 9x_2 \leq 45 \quad \textbf{(2)} \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Este problema puede ser resulto gráficamente. A continuación se observa la región factible y función objetivo:



El óptimo se encuentra en la intersección de las restricciones (1) y (2), por lo tanto, la solución es: x_1=2.25; x_2=3.75 y z_0=41.25.

Ramificaremos en profundidad para obtener rápidamente un valor más alto para el incúmbete.

Si ramificamos x_2, se generan los problemas:

$$(P_1)\quad \begin{array}{l} MaxZ = 5x_1 + 8x_2 \\ s.a \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 \le 3 \\ 5x_1 + 9x_2 \le 45 \\ x_2 \ge 4 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{array} \qquad (P_2)\quad \begin{array}{l} MaxZ = 5x_1 + 8x_2 \\ s.a \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 \le 3 \\ 5x_1 + 9x_2 \le 45 \\ x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$$

Resolviendo (P1), se obtiene que: x_1=1.8; x_2=4 y z_1=41, la que tampoco es una solución entera. Ramificado x_1, se generan los problemas:

$$(P_3)\quad \begin{array}{l} MaxZ = 5x_1 + 8x_2 \\ s.a \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 \le 3 \\ 5x_1 + 9x_2 \le 45 \\ x_2 \ge 4 \\ x_1 \ge 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{array} \qquad (P_4)\quad \begin{array}{l} MaxZ = 5x_1 + 8x_2 \\ s.a \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 \le 3 \\ 5x_1 + 9x_2 \le 45 \\ x_2 \ge 4 \\ x_1 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$$

Es posible observar que (P3) resulta infactible, pues si x_1 y x_2 son mayores o iguales que 2 y 4 respectivamente, la restricción número 2 no se satisface.

Resolviendo (P4), obtenemos que: x_1=1; x_2=4.44 y z_4=40.55. Aún la solución no es entera, por lo que debemos ramificar x_2, generando los problemas:

$$
(P_5)\quad
\begin{array}{l}
MaxZ = 5x_1 + 8x_2 \\
s.a \\
0.5x_1 + 0.5x_2 \leq 3 \\
5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\
x_2 \geq 4 \\
x_1 \leq 1 \\
x_2 \leq 4 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
\qquad\qquad
(P_6)\quad
\begin{array}{l}
MaxZ = 5x_1 + 8x_2 \\
s.a \\
0.5x_1 + 0.5x_2 \leq 3 \\
5x_1 + 9x_2 \leq 45 \\
x_2 \geq 4 \\
x_1 \leq 1 \\
x_2 \geq 5 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Resolviendo (P5), obtenemos que: x_1=1; x_2=4 y z_5=37, que resulta ser nuestra primera solución entera. Como $z_5 \geq \bar{z}$, entonces actualizamos el incumbente: $\bar{z} = 37$.
Resolviendo (P6), se obtiene: x_1=0; x_2=5 y z_6=40, que es una solución entera mejor que la anterior, por lo que actualizamos el valor del incúmbete: $\bar{z} = 40$.
Con esto, terminamos la rama que nace desde el problema (P1).

Resolviendo (P2), se obtiene que x_1=3; x_2=3 y z_2=39. Cómo $z_2 \leq \bar{z}$, entonces la solución es peor que el incumbente por lo que no es necesario seguir ramificando.

Luego, como la mejor solución entera encontrada es la del problema (P6). La solución óptima del problema (PE) es:

$$x_1^* = 0;\ x_2^* = 5 \text{ y } z^* = 40$$

3. Si, es posible aprovechar esta información. Como se conoce una solución factible para el problema entero, podríamos utilizar su valor en la función objetivo z' como incumbente inicial. Es decir, si se trata de un problema de maximización, podríamos utilizar $\bar{z} = z'$ en lugar de $\bar{z} = -\infty$. Con esto se espera poder eliminar ramas que tienen valores en la función objetivo menores que z' desde un comienzo, pues sabemos que seguir ramificándolas no tiene sentido pues las soluciones, que ya sabemos que no son óptimas, solo pueden empeorar. Dependiendo de la calidad de la solución inicial z', se pueden obtener aumentos considerables en la eficiencia del algoritmo.