CAPÍTULO 6

PROGRAMACIÓN DINÁMICA

Programación Dinámica

En muchos casos las decisiones del pasado afectan los escenarios del futuro. En estos casos se pueden tomar 2 opciones: asumir que el efecto temporal o dinámico es poco relevante y solo considerar modelos de un periodo (PPL) o considerar el efecto dinámico dentro del modelo (programación dinámica).

La programación dinámica nace después de la segunda guerra mundial, donde se presentó la necesidad de resolver procesos de decisión en múltiples etapas. Está técnica usa funciones recursivas y un principio de optimalidad, desarrollado por Bellman, para resolver este tipo de problemas.

En este capítulo se desarrollará la teoría básica de programación dinámica, su uso en el modelamiento y resolución de problemas. Además se expondrán ejemplos que permitan visualizar de mejor forma su uso y resolución.

El Modelo de Programación Dinámica

La formulación del modelo que se verá a continuación corresponde a la *formulación backward*. Cabe señalar que también existe la formulación forward, pero no se verá en este capítulo.

El concepto de programación dinámica se basa en el uso de ecuaciones funcionales y el *principio de optimalidad de Bellman*. Las ecuaciones funcionales corresponden a:

- Las funciones que dan cuenta de la función objetivo (desde una etapa k hasta el fin del horizonte de tiempo)
- La función de interrelación entre estados de 2 etapas consecutivas.
- Condiciones de borde.

El Modelo de Programación Dinámica

A continuación se muestra la formulación backward:

$$f_k(y_k) = \max_{\substack{x_k \in A_k(y_k) \\ y_{k+1} = T_k(y_k, x_k)}} \{H_k(y_k, x_k, f_{k+1}(y_{k+1}))\}$$

$$k = n, n-1, \ldots, 1$$

$$y_1 = M$$

$$f_{n+1}(y_{n+1}) = F$$

Describamos cada elemento:

1. **Etapas:** k
   Particiones del problema en los cuales se pueden tomar decisiones que no dependan de estados anteriores, sino sólo del estado actual. Ej: días, meses, años, etapas de producción en una línea, etc. Para su programación debe existir una **etapa final** (n).

El Modelo de Programación Dinámica

2. **Variables de Estado:** y_k
   Variables que caracterizan la situación en la que se encuentra el sistema en una etapa dada. Estás variables dan la independencia a la etapa actual de las etapas anteriores, por lo que deben existir tantas variables de estado como las que permitan establecer en que condiciones comienza (o finaliza) una etapa para su posterior optimización.

3. **Variables de Decisión:** x_k
   Decisiones cuantificables cuyos valores se intenta determinar por medio de la resolución del modelo. Su valor determina el valor de las variables de estado de las etapas futuras.

4. **Espacio de Soluciones Factibles:** $A_k(y_k)$
   Espacio de soluciones factibles de las variables de decisión. Estos valores pueden depender de las variables de estado, es decir, para valores distintos de las variables de estado pueden haber distintos espacios de soluciones factibles.

El Modelo de Programación Dinámica

5. **Ecuaciones de Recurrencia:**
   - **Función de Recursión:** f_k
     Ecuación que indica como se acumula la función de valor desde la etapa k hasta la etapa final.
   - **Función de Transformación:** $y_{k+1} = T_k(y_k, x_k)$
     Ecuación que indican como se relaciona las variables de estado y decisión de una etapa con la variable de estado de la etapa posterior.

6. **Función de Valor o Beneficio: (Función Objetivo)** H_k
   Criterio de comparación entre distintos valores de las variables de estado. Es el objetivo a alcanzar por la resolución del problema en cada etapa.

7. **Condiciones de Borde:** $y_1 = M$ y $f_{n+1}(y_{n+1}) = F$
   Limitaciones que deben imponerse al problema, corresponden a condiciones iniciales o finales que deben cumplirse.

El Modelo de Programación Dinámica

Veamos algunas características de este modelo importantes de ser destacadas:

1. Esta formulación tiene el concepto de recursividad, que es la generalización del concepto dinámico del modelo. Esto se observa en que $f_k(y_k)$ es definido en función de las variables (y_k, x_k) del periodo k y en función de sí misma en el periodo siguiente $(f_{k+1}(y_{k+1}))$.

2. Las condiciones de borde permiten obtener la solución explícita del modelo, ya que la etapa n requiere conocer f_{n+1}, y la etapa 1 requiere desparametrizar la solución, asignando un valor conocido a y_1.

3. La función H_k corresponde a la representación de la función objetivo en la etapa k hasta la etapa n. Ella deberá construirse de manera de ir dando cuenta del valor de la función objetivo en cada etapa.

4. La función de transformación $T_k(y_k, x_k)$ establece la relación entre las variables de estado y_k e y_{k+1} para 2 periodos consecutivos. La variable de estado de la etapa siguiente (y_{k+1}) es expresada como una función de la variable de estado (y_k) y de la variable de decisión (x_k) de la etapa actual.

El Modelo de Programación Dinámica

5. El conjunto A_k representa al conjunto de restricciones asociadas a la variable de decisión de la etapa k. Estas restricciones sólo deben incluir a las variables de decisión de la etapa k y no deben incluir a las de otras etapas.

6. La solución del subproblema de optimización en la etapa k, es una solución paramétrica en la variable de estado y_k, ya que f es en función de ella. Este subproblema de optimización tiene como variable de decisión a x_k, y el resultado es leido como: "para la etapa k, x_k es la mejor decisión para un y_k dado, y $f_k(y_k)$ es el mejor valor de la función objetivo desde la etapa k hasta la etapa n".

7. Se denomina **política óptima** de la etapa $k, k+1, \ldots, n$ para un determinado estado inicial en la etapa k. La política óptima global, esto es, desde la etapa 1, constituye la solución óptima del problema, puesto que en la etapa 1 se tiene sólo un estado inicial factible.

Principio de Optimalidad de Bellman

La resolución del modelo en forma óptima mediante programación dinámica está garantizada siempre y cuando las soluciones del problema verifiquen el principio de optimalidad de Bellman: *"Una solución óptima tiene la propiedad que cualquiera sea el estado inicial y la decisión inicial, las decisiones para las etapas posteriores deben constituir una política óptima con respecto al estado resultante de la primera decisión"*.

En otras palabras, las decisiones involucradas desde una etapa en adelante sólo dependen del estado inicial de la etapa y no de las decisiones previas.

Características de un Problema de Programación Dinámica

Para que un problema pueda ser resuelto con la técnica de programación dinámica, debe cumplir con ciertas características:

- Naturaleza secuencial de las decisiones: El problema puede ser dividido en etapas.
- Cada etapa tiene un número de estados asociados a ella.
- La decisión óptima de cada etapa depende solo del estado actual y no de las decisiones anteriores.
- La decisión tomada en una etapa determina cual será el estado de la etapa siguiente.

En síntesis, la política óptima desde un estado s de la etapa k a la etapa final esta constituida por una decisión que transforma s en un estado s' de la etapa $k+1$ y por la política óptima desde el estado s' hasta la etapa final.

Resolución de un Problema de Programación Dinámica

Para resolver un problema de programación dinámica debemos al menos realizar:

- Identificación de etapas, variables de estados y variables de decisión:
  - Cada etapa debe tener asociada una o más decisiones (problema de optimización), cuya dependencia de las decisiones anteriores está dada exclusivamente por las variables de estado.
  - Cada estado debe contener toda la información relevante para la toma de decisión asociada a la etapa.
  - Las variables de decisión son aquellas sobre las cuales debemos definir su valor de modo de optimizar el beneficio acumulado y modificar el estado de la próxima etapa.
- Descripción de ecuaciones de recurrencia:
  Nos deben indicar como se acumula la función de beneficios a optimizar y como varían las funciones de estado de una etapa a otra.

Resolución de un Problema de Programación Dinámica

- Resolución:
  Debemos optimizar cada subproblema por etapas en función de los resultados de la resolución del subproblema siguiente. Notar que para que las recurrencias estén bien definidas requerimos de condiciones de borde.

Respecto a lo último, la resolución tiene la particularidad de realizarse desde atrás hacia adelante, siguiendo los siguientes pasos:

1. Partir en la etapa n, haciendo $k = n$.

2. Colocar todos los valores factibles de las variables de estado y las de decisión en la etapa k.

3. Calcular H_k para cada valor del par ordenado (y_k, x_k) calculado anteriormente.

4. Elegir para cada y_k el valor óptimo que debe tener x_k y el correspondiente valor de H_k.

Resolución de un Problema de Programación Dinámica

5. Si $k = 1$ parar, sino disminuir k en 1 y volver a (2).

6. Hacer $k = 1$

7. Dado que y_k^* se conoce, buscar el valor óptimo de x_k correspondiente a y_k^* y guardarlo en x_k^*, a partir del cual determinar y_{k+1}^*.

8. Si $k = n$ parar, sino aumentar k en 1 y volver a (7).

Luego, los valores de x_k^*, con $k = 1, \ldots, n$ corresponde a las decisiones óptimas a tomar en cada etapa y $f_1^*(y_1^*)$ corresponde al valor del beneficio en la solución óptima.

Ejemplo: Reemplazo de Equipos

Una empresa posee un equipo de 3 años de uso, y desea determinar la política de reemplazo para los próximos 3 años. Según los antecedentes recopilados, el valor de un equipo nuevo es de M$100, los costos de operaciones y el valor de rescate del equipo son entregados en la siguiente tabla:

Edad [años]	**Operación** [M$/años]	**Rescate** [M$]
1	10	70
2	40	50
3	60	30
4	70	20
5	80	10
6	85	0

Además se sabe que el costo de operación de un equipo nuevo (0 años) es de M$5 por año.

Ejemplo: Reemplazo de Equipos

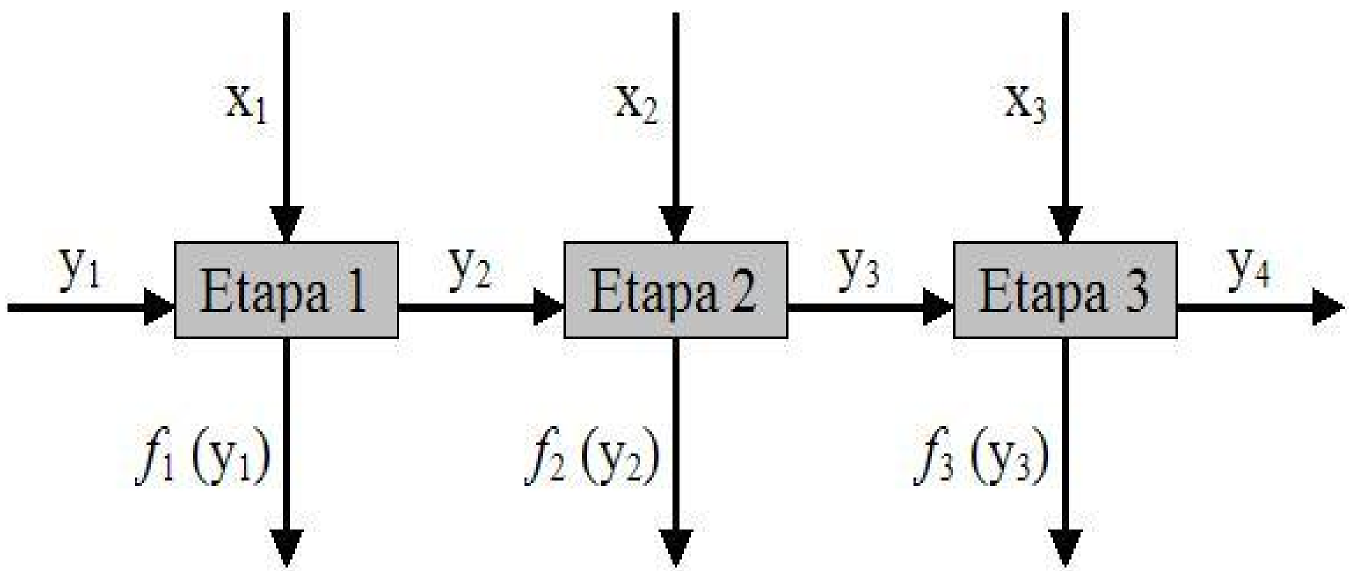
Identifiquemos los elementos del modelo de programación dinámica:

- Etapas: Los años a analizar, en este caso $t = 1, 2, 3$
- Variable de Estado:
  $y_t =$ Edad que tiene el equipo al comienzo del año t
- Variable de Decisión:
  $x_t = \begin{cases} 1 & \text{Sí se reemplaza el equipo en el año } t \\ 0 & \sim \end{cases}$
- Ecuaciones de Recurrencia:
  Función de transformación: $y_{t+1} = (1 - x_t)y_t + 1$
  Función de recursión: $f_t(y_t) = \min_{x_t \in \{0,1\}} \{(I - S(y_t))x_t + C(y_t)(1 - x_t) + C_0 x_t + f_{t+1}(y_{t+1})\}$
  Con $I =$ Inversión en un equipo nuevo = M\$100
  $S(y) =$ Valor residual de un equipo de y años de uso
  $C(y) =$ Costo anual de operación de un equipo de y años
  $C_0 =$ Costo de operación de un equipo nuevo

Ejemplo: Reemplazo de Equipos

- Condiciones de Borde:
  Condición inicial: $y_1 = 3$
  Condición final: $f_4(y_4) = -S(y_4)$
  Con $S(y_4) =$ Valor residual de un equipo de y_4 años de uso

Gráficamente el problema se puede ver como sigue:



Ahora resolvamos el modelo anterior:

Ejemplo: Reemplazo de Equipos

- Etapa 3:
  y_3 puede tomar 3 valores:

1. 5, si no hubo reemplazos en el año 1 ni en el año 2
2. 2, si hubo reemplazo en el año 1 y no hubo reemplazo en el año 2
3. 1, si hubo reemplazo en el año 2.

Luego, el problema a resolver es:

$$f_3(y_3) = \min_{\substack{x_3 \in \{0,1\} \\ y_4 = (1-x_3)y_3 + 1}} \{(I - S(y_3))x_3 + C(y_3)(1-x_3) + C_0 x_3 - S(y_4)\}$$

Apliquemos nuestra estrategia de solución en una tabla

y_3	$x_3 = 1$ (R)	$x_3 = 0$ (M)	x_3^*	$f_3(y_3)$
1	-35	-40	M	-40
2	-15	10	R	-15
5	25	80	R	25

Ejemplo: Reemplazo de Equipos

En cada casillero del cruce (y_k, x_k) se coloca el valor del costo. Luego, si el valor de y_3 es 2 o 5 conviene reemplazar el equipo en esta etapa, sin embargo si el valor de y_3 es 1, conviene mantenerlo.

Ya que conocemos la estrategia óptima de la etapa 3 pasemos a la etapa 2.

- Etapa 2:
  El problema a resolver es:

$$f_2(y_2) = \min_{\substack{x_2 \in \{0,1\} \\ y_3 = (1-x_2)y_2+1}} \{(I - S(y_2))x_2 + C(y_2)(1-x_2) + C_0 x_2 + f_3(y_3)\}$$

Aplicando la estrategia de solución tenemos

y_2	$x_2 = 1$ (R)	$x_2 = 0$ (M)	x_2^*	$f_2(y_2)$
1	-5	-5	M ó R	-5
4	45	95	R	45

Ejemplo: Reemplazo de Equipos

Luego, si el valor de y_2 es 4 conviene reemplazar el equipo en esta etapa, pero si su valor es 1, conviene reemplazar o mantener, ambas opciones son equivalentes.

Notar que y_2 solo puede tomar los valores 1 y 4, lo cual corresponde a haber hecho el reemplazo o no en la etapa 1 respectivamente.

- Etapa 1:
  El problema a resolver es:

$$f_1(y_1) = \min_{\substack{x_1 \in \{0,1\} \\ y_2 = (1-x_1)y_1 + 1}} \{(I - S(y_1))x_1 + C(y_1)(1-x_1) + C_0 x_1 + f_2(y_2)\}$$

Aplicando la estrategia de solución tenemos

y_1	$x_1 = 1$ (R)	$x_1 = 0$ (M)	x_1^*	$f_1(y_1)$
3	70	105	R	70

Ejemplo: Reemplazo de Equipos

Luego la política óptima es reemplazar ($x_1^* = 1$) en la etapa 1, a un costo total de $f_1(3) = 70$

Notar que y_1 solo puede tomar el valor 3, ya que se sabe que esa es la edad de la máquina en la etapa 1.

Observación: $x_1^* = 1$ fija los valores óptimos de las otras variables de decisión (mirando las tablas):

$$
x_1^* = 1 \longrightarrow y_2^* = 1 \begin{array}{l} \nearrow \quad x_2^* = 0 \longrightarrow y_3^* = 2 \longrightarrow x_3^* = 1 \\ \searrow \quad x_2^* = 1 \longrightarrow y_3^* = 1 \longrightarrow x_3^* = 0 \end{array}
$$

Ejemplo: Reemplazo de Equipos

En este caso en particular hay 2 políticas óptimas:

- R - M - R
- R - R - M

Chequeemos que el costo óptimo total es M$70:
Opción 1: R - M - R

$$\begin{array}{ccc}
\text{R en la etapa 1} & \Rightarrow & 75 \\
\text{M en la etapa 2} & \Rightarrow & 10 \\
\text{R en la etapa 3} & \Rightarrow & \underline{55} \\
 & subtotal & 140 \\
 & Recupero & \underline{70} \\
 & total & 70
\end{array}$$

Ejemplo: Reemplazo de Equipos

Opción 2: R - R - M

$$
\begin{array}{rcc}
\text{R en la etapa 1} & \Rightarrow & 75 \\
\text{R en la etapa 2} & \Rightarrow & 35 \\
\text{M en la etapa 3} & \Rightarrow & \underline{10} \\
 & subtotal & 120 \\
 & Recupero & \underline{50} \\
 & total & 70
\end{array}
$$

Ejemplo: Asignación de Recursos

El propietario de 3 tiendas ha comprado 5 cestas de cerezas, para satisfacer la demanda en las diferentes tiendas. El propietario desea determinar la forma de distribuir los canastos, de manera de maximizar el beneficio total. Los retornos (utilidades) en función del número de canastos distribuidos (se asume vendidos) en las 3 tiendas están dados en la siguiente tabla:

Canastos

Tienda	0	1	2	3	4	5
1	0	3	7	9	12	13
2	0	5	10	11	11	11
3	0	4	6	11	12	12

Ejemplo: Asignación de Recursos

Identifiquemos los elementos del modelo de programación dinámica:

- Etapas: Cada etapa corresponde a una de las 3 tiendas, en este caso $k = 1, 2, 3$
- Variable de Estado:
  $y_k =$ Número de canastos disponibles al comienzo de cada etapa k.
- Variable de Decisión:
  $x_t =$ Número de canastos entregados en cada tienda k.
- Ecuaciones de Recurrencia:
  Función de transformación: $y_{k+1} = y_k - x_k$
  Función de recursión:

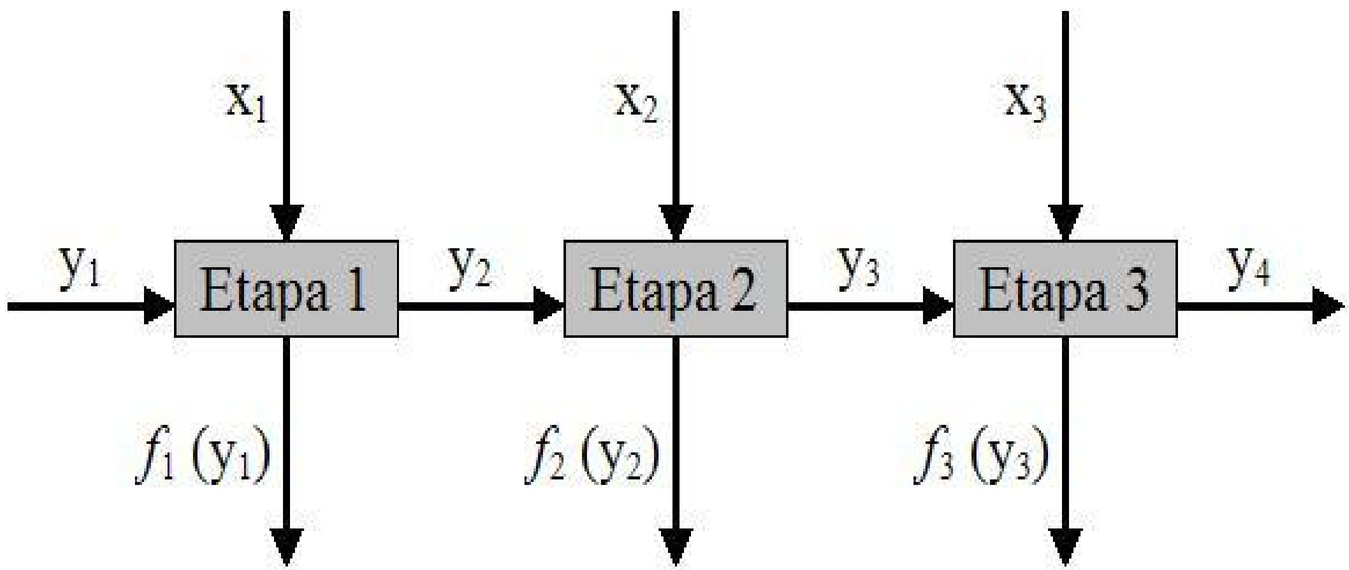
$$f_k(y_k) = \max_{0 \leq x_k \leq y_k} \{U_k(x_k) + f_{k+1}(y_{k+1})\}$$

Con $U_k(x_k) =$ Utilidad de poner x_k canastas en la tienda k

Ejemplo: Asignación de Recursos

- Condiciones de Borde:
  Condición inicial: $y_1 = 5$
  Condición final: Dado que los retornos son positivos, se repartirán todos los canastos, por lo tanto $f_4(y_4) = 0$

Gráficamente el problema se puede ver como sigue:



Ahora resolvamos el modelo anterior:

Ejemplo: Asignación de Recursos

- Etapa 3:
  El problema a resolver es:

$$f_3(y_3) = \max_{0 \leq x_3 \leq y_3} \{U_3(x_3) + f_4(y_4)\} = \max_{0 \leq x_3 \leq y_3} \{U_3(x_3)\}$$

Apliquemos nuestra estrategia de solución en una tabla

y_3	$x_3 = 0$	$x_3 = 1$	$x_3 = 2$	$x_3 = 3$	$x_3 = 4$	$x_3 = 5$	x_3^*	$f_3(y_3)$
0	0	-	-	-	-	-	0	0
1	0	4	-	-	-	-	1	4
2	0	4	6	-	-	-	2	6
3	0	4	6	11	-	-	3	11
4	0	4	6	11	12	-	4	12
5	0	4	6	11	12	12	4 ó 5	12

Ejemplo: Asignación de Recursos

- Etapa 2:
  El problema a resolver es:

$$f_2(y_2) = \max_{0 \leq x_2 \leq y_2,\ y_3 = y_2 - x_2} \{U_2(x_2) + f_3(y_3)\}$$

Aplicando la estrategia de solución tenemos

y_2	$x_2 = 0$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$	$x_2 = 5$	x_2^*	$f_2(y_2)$
0	0	-	-	-	-	-	0	0
1	4	5	-	-	-	-	1	5
2	6	9	10	-	-	-	2	10
3	11	11	14	11	-	-	2	14
4	12	16	16	15	11	-	1 ó 2	16
5	12	17	21	17	15	11	2	21

Ejemplo: Asignación de Recursos

- Etapa 1:
  El problema a resolver es:

$$f_1(y_1) = \max_{0 \leq x_1 \leq y_1,\ y_2 = y_1 - x_1} \{U_1(x_1) + f_2(y_2)\}$$

  Aplicando la estrategia de solución tenemos

y_1	$x_1 = 0$	$x_1 = 1$	$x_1 = 2$	$x_1 = 3$	$x_1 = 4$	$x_1 = 5$	x_1^*	$f_1(y_1)$
5	21	19	21	19	17	13	0 ó 2	21

Así vemos que tenemos 2 estrategias óptimas:

$$x_1^* = 0 \longrightarrow y_2^* = 5 \longrightarrow x_2^* = 2 \longrightarrow y_3^* = 3 \longrightarrow x_3^* = 3$$

$$x_1^* = 2 \longrightarrow y_2^* = 3 \longrightarrow x_2^* = 2 \longrightarrow y_3^* = 1 \longrightarrow x_3^* = 1$$

Ambas con un beneficio de 21.

Ejemplo: Planificación de Producción e Inventario

Una empresa debe decidir su política de producción e inventario para los próximos 3 meses. La empresa ha adquirido algunos compromisos de entrega para estos meses: 3, 2 y 4 unidades, respectivamente.

En el proceso productivo se incurre en algunos costos que están asociados con la producción propiamente tal y el almacenamiento de los productos. Estos costos son: Costos de almacenamiento (h_i por unidad con $i = 2, 3, 4$) y costos de producción (c_i por unidad con $i = 1, 2, 3$). Los valores de los costos se indican a continuación:

Mes	h_i [$ / unidad-mes]	c_i [$ / unidad]
1	-	10
2	1	15
3	3	20
4	2	-

Ejemplo: Planificación de Producción e Inventario

Si modelamos el problema como un PPL tendríamos:

x_t: Cantidad a producir en el mes t
y_t: Cantidad de productos en bodega (inventario) al inicio del mes t
d_t: requerimientos de entrega de producto para el mes t.

$$\begin{aligned} \text{mín}\, 10x_1 + 15x_2 + 20x_3 + 1y_2 + 3y_3 + 2y_4 & \\ \text{s.a.} \quad y_2 &= y_1 + x_1 - d_1 \\ y_3 &= y_2 + x_2 - d_2 \\ y_4 &= y_3 + x_3 - d_3 \\ x_i &\geq 0, \text{ entero } \forall i \\ y_i &\geq 0, \text{ entero } \forall i \end{aligned}$$

Ejemplo: Planificación de Producción e Inventario

Identifiquemos los elementos del modelo de programación dinámica:

- Etapas: meses de planificación $i = 1, 2, 3$
- Variable de Estado:
  $y_k =$ nivel de inventario al comienzo del periodo k.
- Variable de Decisión:
  $x_k =$ Cantidad a producir en el periodo k.
- Ecuaciones de Recurrencia:
  Función de transformación: La clásica conservación de flujo $y_{i+1} = y_i + x_i - d_i$
  Función de recursión:

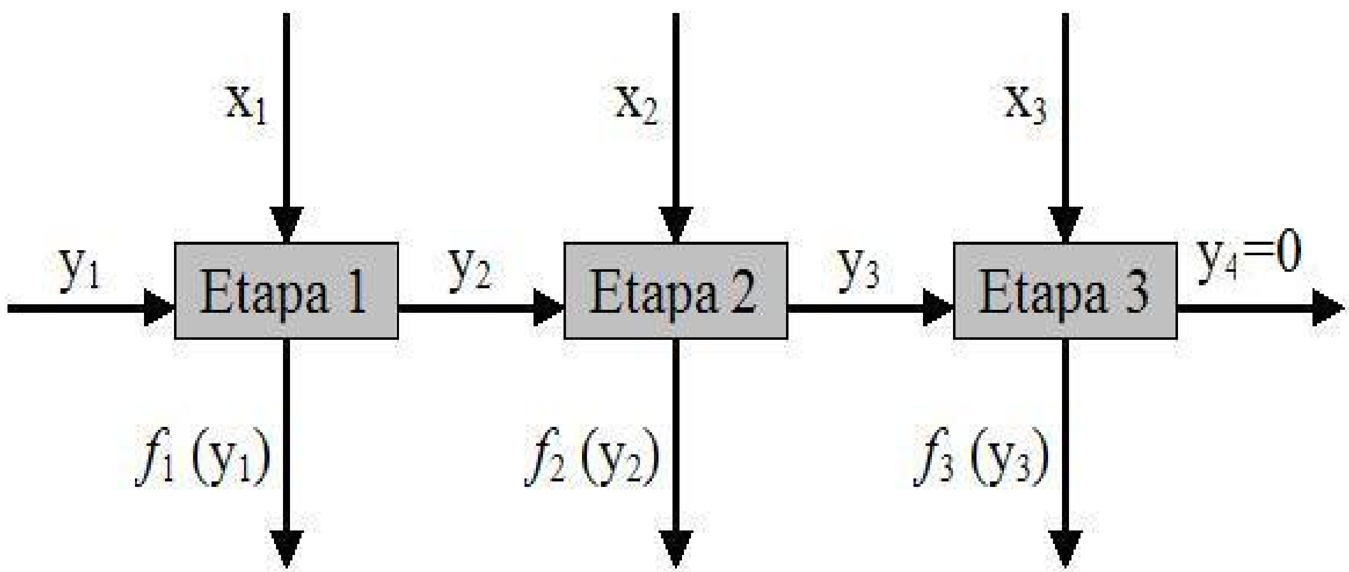
$$f_i(y_i) = \min_{x_i \geq 0,\ \text{enteros}} \{CP(x_i) + CI(y_i + x_i - d_i) + f_{i+1}(y_{i+1})\}$$

  Con $CP(x_i) = c_i x_i$ (costo de producción)
  $CI(y_{i+1}) = h_{i+1} y_{i+1}$ (costo de inventario)

Ejemplo: Planificación de Producción e Inventario

- Condiciones de Borde:
  Condición inicial: Al comienzo no hay productos almacenados $y_1 = 0$
  Condición final: Dado que se debe cumplir con los compromisos, quedar con productos no entregados en bodega no tiene beneficio, por lo que $y_4 = 0$, y asumo que no tengo costos de producción en el cuarto período, así $f_4(y_4) = 0$

Gráficamente el problema se puede ver como sigue:



Ejemplo: Planificación de Producción e Inventario

Observación: Se considerará que el número máximo de estados corresponde a la demanda que falta por satisfacer en las etapas siguientes. Así para el período 3 , la resolución debe considerar que la variable de estado y_3 puede tomar valores entre 0 y 4, puesto que la demanda para ese período es de 4 y se requiere inventario cero al final de este último período.

- Etapa 3:
  El problema a resolver es:

$$f_3(y_3) = \min_{\substack{x_3 = 4 - y_3 \\ x_3 \geq 0,\ \text{entero}}} \{20x_3 + 2(y_3 + x_3 - 4)\}$$

Ejemplo: Planificación de Producción e Inventario

Apliquemos nuestra estrategia de solución en una tabla

y_3	$x_3 = 0$	$x_3 = 1$	$x_3 = 2$	$x_3 = 3$	$x_3 = 4$	x_3^*	$f_3(y_3)$
0	-	-	-	-	80	4	80
1	-	-	-	60	-	3	60
2	-	-	40	-	-	2	40
3	-	20	-	-	-	1	20
4	0	-	-	-	-	0	0

- Etapa 2:
  El problema a resolver es:

$$f_2(y_2) = \min_{\substack{6 - y_2 \geq x_2 \geq 2 - y_2 \\ x_2 \geq 0,\ \text{entero}}} \{15x_2 + 3(y_2 + x_2 - 2) + f_3(y_2 + x_2 - 2)\}$$

Ejemplo: Planificación de Producción e Inventario

Aplicando la estrategia de solución tenemos:

y_2	$x_2 = 0$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$	$x_2 = 5$	$x_2 = 6$	x_2^*	$f_2(y_2)$
0	-	-	110	108	106	104	102	6	102
1	-	95	93	91	89	87	-	5	87
2	80	78	76	74	72	-	-	4	72
3	63	61	59	57	-	-	-	3	57
4	46	44	42	-	-	-	-	2	42
5	29	27	-	-	-	-	-	1	27
6	12	-	-	-	-	-	-	0	12

Nótese que hay valores que no es necesario evaluar. Por ejemplo, si se tienen 6 unidades al inicio del periodo 2, no es necesario producir, ya que esto trae consigo un almacenamiento innecesario de producto.

Ejemplo: Planificación de Producción e Inventario

- Etapa 1:
  El problema a resolver es:

$$f_1(y_1) = \min_{\substack{3 \leq x_1 \leq 9 \\ x_1 \geq 0,\ \text{entero}}} \{10x_1 + 1(y_1 + x_1 - 3) + f_2(y_1 + x_1 - 3)\}$$

  Aplicando la estrategia de solución tenemos:

y_1	$x_1 = 3$	$x_1 = 4$	$x_1 = 5$	$x_1 = 6$	$x_1 = 7$	$x_1 = 8$	$x_1 = 9$	x_1^*	$f_1(y_1)$
0	132	128	124	120	116	112	108	9	108

Así vemos que la estrategia óptima es:

$$x_1^* = 9 \longrightarrow y_2^* = 6 \longrightarrow x_2^* = 0 \longrightarrow y_3^* = 4 \longrightarrow x_3^* = 0$$

Con un costo de 108.