INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Profesores: Leonardo López, Ximena Schultz, Richard Weber

Auxiliares: Fernanda Bravo. André Carboni, Nelson Devia, Ignacio Escobar, Rodrigo Wolf

IN34A – Optimización
Auxiliar N°7
12 de Noviembre, 2008

Problema 1

En una popular comuna el alcalde está bastante preocupado por la seguridad ciudadana, por lo que ha decidido implementar un curioso sistema de botones de pánico, a través de los cuales, la amedrentada población podrá pedir ayuda en caso de emergencia.

Después de grandes esfuerzos por conseguir presupuesto, el alcalde cuenta con un capital que le permite instalar un máximo de K botones, los cuales debe distribuir en los M barrios de su comuna (con $K > M$).

Según el experimentado equipo de asesores del edil, que ya piensan en la reelección, si en el barrio m se instalan k botones, el alcalde ganará $P_m(k)$ votos adicionales.

Suponga que es contratado para determinar la asignación que maximiza la cantidad de votos que conseguirá el alcalde en la próxima elección, producto de su campaña de seguridad ciudadana.

a) ¿Por qué este problema es susceptible a ser abordado por un enfoque de programación dinámica?

b) Modele el problema usando programación dinámica determinística, explicitando claramente las etapas, variables de decisión, variables de estado y funciones de beneficio.

Suponga ahora que si en un barrio m , se instalan más de U_m botones, la oposición al alcalde lo acusará públicamente de populista y derrochador. Esto implica una pérdida de r_m votos por cada botón por sobre U_m, instalado en esta zona. Por otra parte, si en el barrio m se asignan menos de L_m aparatos de emergencia, la junta de vecinos del sector también iniciará una campaña de desprestigio que implica la pérdida de t_m sufragios por cada botón por debajo de L_m.

c) Modele el nuevo escenario, usando programación dinámica determinística.

Problema 2

Una empresa de tele-ventas posee 4 centros de llamado ya funcionando y 4 telefonistas nuevos que quiere asignar a dichos centros. Se hizo un estudio de mercado y se determinó el número estimado de clientes adicionales por mes al asignar los telefonistas a los centros. La siguiente tabla muestra el resultado de este estudio:

	1 telefonista	2 telefonistas	3 telefonistas	4 telefonistas
Centro 1	10	15	20	25
Centro 2	5	6	7	8
Centro 3	15	16	17	18
Centro 4	18	20	22	23

Por ejemplo asignar 2 telefonistas al centro 1 genera 15 clientes adicionales por mes.

a) Trate de reducir la complejidad del problema aplicando un análisis previo. Justifique su decisión.

b) Resuelva el problema simplificado aplicando programación dinámica. Si no logra simplificar el problema resuelva el problema original aplicando programación dinámica (Identifique estados, etapas, variables de decisión, la función de transformación y la función de recursión).

c) ¿Cuál(es) es (son) la(s) política(s) óptima(s)?

Problema 3

El Gerente Comercial de una compañía está estudiando la introducción de nuevos productos para la próxima temporada, por lo que debe decidir qué productos comercializar y cuántas unidades de c/u producir.

La producción de cada uno de estos productos, según lo informado por el Gerente de Operaciones, tiene asociado un costo fijo que depende del tipo de producto, igual a C_i. Además, la producción de cada unidad de producto i requiere utilizar un porcentaje de la capacidad disponible en la planta igual a K_i. Suponga que no existen otros costos de producción.

Por otra parte, dadas las condiciones de mercado, sabe que sus ingresos por unidad vendida serán U_i y que el mercado a lo más compraría D_i unidades del producto i elaborado por la compañía.

a) Plantee el modelo de programación dinámica que apoye las decisiones de producción para el problema general descrito, si se busca maximizar las utilidades de la firma.

Supongamos ahora que los productos en evaluación son 3 y que se cuenta con la siguiente información relevante:

	P 1	P 2	P 3
Costo fijo	3	2	0
Ingreso por unidad vendida	2	3	1
% de capacidad usada por cada unidad	20	40	20

Como se ve en la primera fila de la tabla anterior, el gerente sabe que 2 de estos productos requieren un costo fijo importante. También conoce el ingreso que recibirá la empresa por cada unidad producida, una vez que la producción está en marcha.

Además, como se ve en la tercera fila de la tabla, se sabe el porcentaje de capacidad disponible que ocupa cada unidad de producto al ser fabricada. Por condiciones del mercado se sabe que se pueden vender sólo 3 unidades de producto 1, mientras que es posible vender todas las unidades que se puedan fabricar de los otros productos.

b) En esta situación resuelva, ocupando el modelo de programación dinámica planteado en la parte anterior, la estrategia de producción óptima.

IN34A – Optimización
Pauta Auxiliar N°7

Problema 1

a) En este punto se deben incluir argumentos como: Existe un conjunto de decisiones interrelacionadas, si se modelan adecuadamente las etapas se tendrá que la decisión para una de ellas es independiente de decisiones pasadas y sólo dependerá de variables de estado, etc.

b) De acuerdo al procedimiento usual para definir un modelo de programación dinámica se tendrá:

- **Etapas:**
  Cada uno de los barrios, $m : 1, ..., M$.
- **Variables de estado:**
  S_m, el número de botones restantes en la etapa m (sin asignar).
- **Variables de decisión:**
  X_m, el número de botones asignados al barrio m.
- **Recurrencia de estados:**

$$S_{m+1} = S_m - X_m$$

- **Función de beneficios:**

$$V_m(S_m, X_m) = P_m(X_m) + V^*_{m+1}(S_m - X_m)$$

Donde:

$$V^*_m(S_m) = \max_{X_m \leq S_m} \{V_m(S_m, X_m)\}$$

- **Condiciones de borde:**

$$V^*_{M+1}(\%) = 0$$
$$S_1 = K$$

c) Al igual que en el punto anterior se tendrá que:

- **Etapas:**
  Cada uno de los barrios, $m : 1, ..., M$.
- **Variables de estado:**
  S_m, el número de botones restantes en la etapa m (sin asignar).
- **Variables de decisión:**
  X_m, el número de botones asignados al barrio m.
- **Recurrencia de estados:**

$$S_{m+1} = S_m - X_m$$

- **Función de beneficios:**

$$V_m(S_m, X_m) = P_m(X_m) - r_m \cdot \max\{0, X_m - U_m\} - t_m \cdot \max\{0, L_m - X_m\} + V^*_{m+1}(S_m - X_m)$$

Donde:

$$V^*_m(S_m) = \max_{X_m \leq S_m} \{V_m(S_m, X_m)\}$$

- **Condiciones de borde:**

$$\begin{aligned} V^*_{M+1}(\%) &= 0 \\ S_1 &= K \end{aligned}$$

Problema 2

a) Reducir la simplicidad del problema se puede hacer a simple vista, por ejemplo, se ve que si se asigna las cuatro telefonistas a un solo centro, el máximo de beneficio será 25, lo que es menos que el beneficio obtenido al poner una telefonista en cada centro que es de 48, así, inmediatamente se elimina la opción de tener cuatro telefonistas en un solo centro.
Igualmente sé que el máximo que se puede obtener con tres telefonistas es 22+15 < 48 en el caso de ver tener 3 telefonistas en el centro 4 y una en el centro 3, ó 20+18 < 38 en el caso de poner 3 telefonistas en el centro 1 y 1 en el centro 4. Lo anterior se observa fácilmente mirando los máximos en cada columna.
Se hace notar que a simple vista pareciera cómo que hay que eliminar el centro 2, pero si se pone atención, se observa que con la eliminación de este centro elimina la posibilidad de tener una telefonista en cada centro, opción que da un beneficio alto observad a simple vista.
Se simplifica el problema entonces eliminado las opciones con 3 y 4 telefonistas por centro.

b) *Modelo en Programación Dinámica con el modelo simplificado:*

- Etapas: i =1,2,3,4. (Cada centro).
- Variables de Estado:

  Si= Cantidad de telefonistas disponibles para el centro i
- Variables decisión:

  Xi= Cantidad de telefonistas asignadas al centro i.
- Función Recursión:

$$S_{i+1} = S_i - X_i$$

- Condición de Borde:

$$S1=4$$
$$V^*5(S5)=0$$

- Función Beneficio:
  Si se denomina Pi(Xi) a el beneficio que da poner telefonistas en el centro i, valores que están dados en las tablas mostradas en el enunciado se tiene que:

$$Vi(Si,Xi) = Pi(Xi) + V^*(si-Xi)$$

  Donde $V^*i+1(Si-Xi) = \max Vi+1(Si+1,Xi+1)$ *s.a.* $0 \le Xi+1 \le Si+1$

Así en general se tiene:

Centro 4:

	X				
S	**0**	**1**	**2**	**X***	**V***
0	0	-	-	0	0
1	0	18	-	1	18
2	0	18	20	2	20
3	0	18	20	2	20
4	0	18	20	2	20

Centro 3:

	X				
S	**0**	**1**	**2**	**X***	**V***
0	0	-	-	0	0
1	18	15	-	0	18
2	20	33	16	1	33
3	20	35	34	1	35
4	20	35	36	2	36

Centro 2:

	X				
S	**0**	**1**	**2**	**X***	**V***
2	33	23	6	0	33
3	35	38	24	1	38
4	36	40	39	1	40

Centro 1:

	X				
S	**0**	**1**	**2**	**X***	**V***
4	40	48	48	1, 2	48

Ojo que aquí el S puede tomar sólo el valor 4, pues éste es el primer centro y por lo tanto obligatoriamente están los 4 telefonistas disponibles.

c)

	Xi	
i	**Política 1**	**Política 2**
Centro 1	1	2
Centro 2	1	0
Centro 3	1	1
Centro 4	1	1
Beneficio	**48**	**48**

Problema 3

a)

- Etapas: Productos: n=1,2,3,...,N
- Variables de Decisión:

Xn = Unidades de producto n a producir.

$$Yn = \begin{cases} 1 & \text{Si fabrico producto n} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

- Variables de Estado:

Sn = % de la capacidad total disponible para producir producto n.

- Recurrencias

$$S_{n+1} = S_n - K_n{*}X_n$$

- Beneficio Acumulado:

$$V_n(S_n, X_n, Y_n) = U_n \cdot X_n - C_n \cdot Y_n + V_{n+1}^{*}(S_{n+1})$$

- Beneficio Máximo:

$$V_n^{*}(S_n) = \max_{\substack{X_n, Y_n \\ s.a. 0 \leq X_n \leq \min(\frac{S_n}{K_n}, D_n)}} V_n(S_n, X_n, Y_n)$$

b)

<u>Producto 3:</u>

S_3/X_3	0	1	2	3	4	5	$V_3[S_3]$	X_3^*
100%	0	1	2	3	4	5	5	5
80%	0	1	2	3	4		4	4
60%	0	1	2	3			3	3
40%	0	1	2				2	2
20%	0	1					1	1
0%	0						0	0

<u>Breve explicación para los que no fueron a la auxiliar</u>: Para entender cómo se seleccionan esos valores para S_3 se debe pensar el problema en las etapas 1 y 2. ¿Qué pasaría si decidieramos producir cero unidad del producto 1 y cero del producto 2?

Mirando la tabla de datos dada, veríamos que el producto 1 ocupa un 20% de capacidad por unidad y el producto 2 40% por unidad. Entonces, 0*20% + 0*40% = 0%, Es decir, llegamos con capacidad completa a la etapa 3 (100%). Ahora bien, si decidimos fabricar una unidad del producto 1 y cero del 2, entonces 1*20% +0*40% = 20%, hemos ocupado 20% de la capacidad, y llegamos a la etapa 3 (producto 3) con un 80% de capacidad (100% - 20%). Así, los S_3 representan todos los valores posibles de capacidad que nos quedará, dependiendo de qué valores tomará nuestra variable de decisión para los otros productos. Es fácil darse cuenta que todos los escenarios posibles se cubren poniendo los S_3 como múltiplos de 20.

Arriba se ponen los valores posibles de X_3 , los que van en este caso desde cero hasta 5. ¿Por qué? Pues porque cada unidad ocupa 20% de capacidad, y en el mejor caso (en el que tenemos 100% de capacidad) podemos fabricar como máximo 100/20 = 5 unidades.

La columna X^*_3 indica el valor óptimo para la variable X en la etapa 3, en cada uno de los escenarios. ¿Cómo se rellena? simplemente miren cada una de las filas y selecciones el mayor valor, luego la cantidad óptima a producir del producto 3 (X^*_3) es la indicada arriba, en el tope de la columna donde encontraron el mayor valor (donde se muestran los valores posibles de X_3).

Por último, $V_3(S_3)$ no es más que el valor óptimo de nuestra recurrencia desde el período 3 en adelante. Simplemente seleccionan el máximo valor de la fila asociada.

Para que no se confundan, es mejor revisar la proxima tabla para ver bien que corresponde a X* y que corresponde a V(S), ya que en la tabla anterior justo ocurre que X y V(s) son siempre iguales.

Ahora sí, continuamos...

Producto 2:

S_2/X_2	0	1	2	$V_2[S_2]$	X_2^*
100 %	5	4	5	5	0-2
80 %	4	3	4	4	0-2
60 %	3	2		3	0
40 %	2	1		2	0
20 %	1			1	0
0 %	0			0	0

Explicación: Tomemos por ejemplo el caso en que llegamos con 100% de capacidad. Supongamos queremos producir una unidad del producto 2, por lo tanto ocupamos 40% de la capacidad. Por lo tanto nuestras utilidades son 3*1 - 2*1 + 3 = 4. ¿¿¿De donde sale ese ultimo 3??? Tienen que mirar la ecuación de beneficio acumulado. Primero están los ingresos por unidad menos los costos fijos (en caso de fabricar) más el beneficio acumulado de la etapa siguiente! Por lo tanto, en el ejemplo que di, teniamos 100% de capacidad, ocupamos 40% para el producto 2, por lo tanto nos sobra 60% para la etapa siguiente (producto 3). Entonces, vamos a la tabla del producto 3 y vemos cual es el beneficio máximo al tener 60% de capacidad ($V_3(S_3)$) y listo, de ahí sale el 3 :).

Producto 1:

S_1/X_1	0	1	2	3	$V_1[S_1]$	X_1^*
100%	5	3	4	5	5	0-3

Ojo que en éste último cuadro, S_1 sólo puede tomar el valor 100% ya que estamos en la primera etapa, por lo que obviamente tenemos capacidad completa.

Por lo tanto, existen 3 configuraciones óptimas:

X_1^*	X_2^*	X_3^*
0	0	5
3	0	2
0	2	1

¿Como se obtuvo esto? Miramos la tabla del producto 1 y vemos que el òptimo para 1 es producir 0 o producir 3. Si producimos 3, ocupamos 60% de la capacidad, entonces en la tabla del producto 2 vamos a ver cual es el valor optimo de x2 cuando tenemos 40%. Vemos que este valor es cero, por lo tanto no produjimos nada y nos vamos al producto 3 con 40%, miramos la cantidad optima para x3 con 40% y esto es producir 2. Entonces, X1 = 3, X2 = 0, X3 = 2. Los otros casos se obtienen de la misma forma.

Al final, estas 3 combinaciones de valores para los X son óptimos y entregan todas el mismo beneficio ($V_1(S_1)$=5, de la tabla 1, recordando que este valor representa el beneficio acumulado desde 1 hasta el final).

Dudas y/o comentarios a:
Nelson Devia
ndevia@ing.uchile.cl