



UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Geofísica
GF711– Series de Tiempo



Tarea nº 2

<u>NOMBRE:</u>	Mauricio Fuentes
<u>PROFESOR CÁTEDRA:</u>	Denis Legrand
<u>PROFESOR AUXILIAR:</u>	Sergio Ruíz
<u>FECHA DE ENTREGA:</u>	20/08/2008

Tarea 2.1

Encontraremos la serie de Fourier en senos, de $f(x) = x$, en $[0, \pi]$
Según lo que queremos, f debería expresarse como:

$$f(x) = x = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \text{sen}(nx) \quad x \in [0, \pi]$$

Multiplicamos todo por $\text{sen}(mx)$

$$x \text{sen}(mx) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \text{sen}(nx) \text{sen}(mx)$$

Integramos en el intervalo de definición:

$$\int_0^{\pi} x \text{sen}(mx) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \int_0^{\pi} \text{sen}(nx) \text{sen}(mx) dx$$

En el lado izquierdo:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \text{sen}(mx) dx &= -\frac{x \cos(mx)}{m} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{m} \int_0^{\pi} \cos(mx) dx \\ \int_0^{\pi} x \text{sen}(mx) dx &= -\frac{\pi(-1)^m}{m} - \frac{1}{m^2} \text{sen}(mx) \Big|_0^{\pi} \\ \int_0^{\pi} x \text{sen}(mx) dx &= \frac{\pi(-1)^{m+1}}{m} \end{aligned}$$

En el lado derecho:

Podemos usar la identidad trigonométrica siguiente:

$$\text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta) = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

Luego

$$\int_0^{\pi} \text{sen}(nx) \text{sen}(mx) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)] dx$$

Si $m = n$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \text{sen}(nx) \text{sen}(mx) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [1 - \cos(2nx)] dx \\ \int_0^{\pi} \text{sen}(nx) \text{sen}(mx) dx &= \frac{1}{2} \left(\pi - \int_0^{\pi} \cos(2nx) dx \right) \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} \text{sen}(nx)\text{sen}(mx) dx = \frac{1}{2} \left(\pi - \frac{\text{sen}(2nx)}{2n} \right) \Big|_0^{\pi}$$

$$\int_0^{\pi} \text{sen}(nx)\text{sen}(mx) dx = \frac{\pi}{2}$$

Si $m \neq n$

$$\int_0^{\pi} \text{sen}(nx)\text{sen}(mx) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [(\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x))] dx$$

$$\int_0^{\pi} \text{sen}(nx)\text{sen}(mx) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{-\text{sen}((n-m)x)}{n-m} + \frac{\text{sen}((n+m)x)}{n+m} \right] \Big|_0^{\pi}$$

$$\int_0^{\pi} \text{sen}(nx)\text{sen}(mx) dx = 0$$

Por tanto, en la suma, sólo sobrevivirá el término $m = n$. Así

$$\int_0^{\pi} x \text{sen}(mx) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \int_0^{\pi} \text{sen}(nx)\text{sen}(mx) dx$$

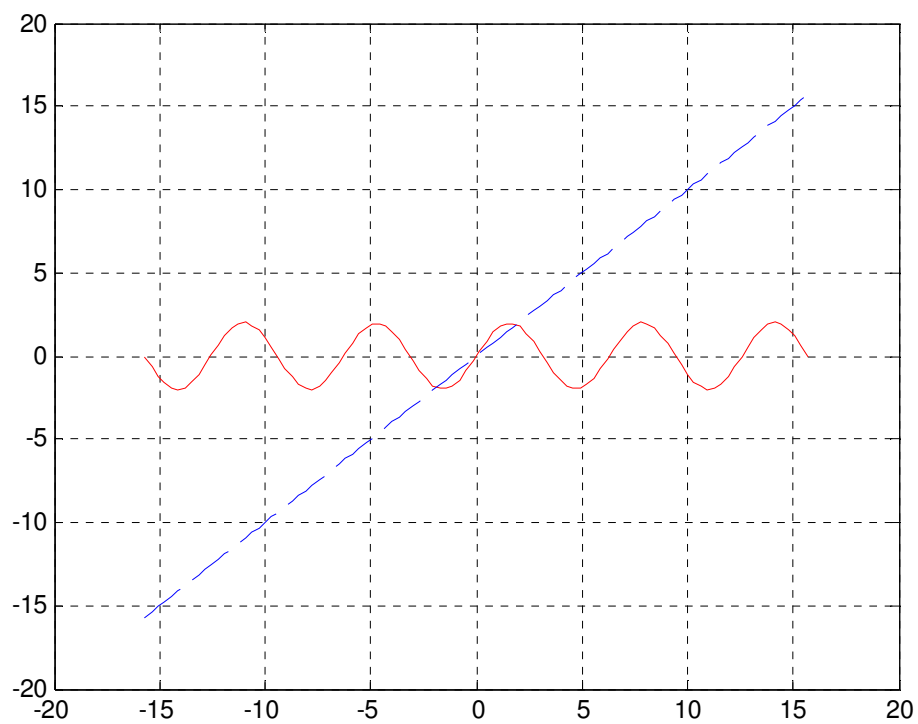
$$\frac{\pi(-1)^{m+1}}{m} = \frac{\pi}{2} B_m$$

$$\boxed{\frac{2(-1)^{m+1}}{m} = B_m}$$

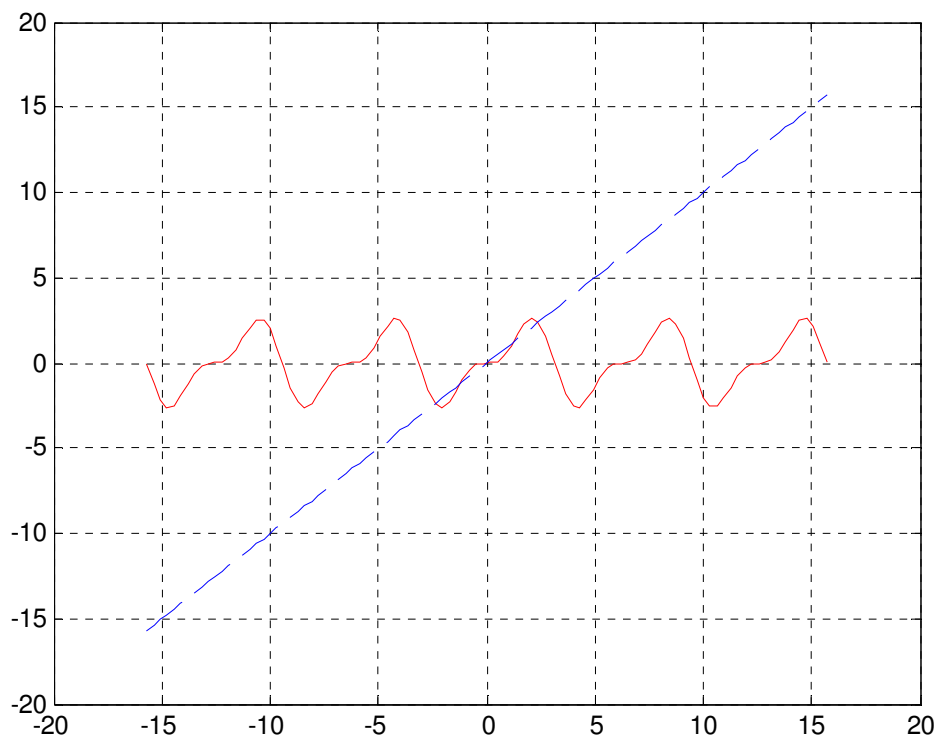
$$\boxed{f(x) = x = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{sen}(nx) \quad x \in [0, \pi]}$$

Veamos que pasa si la graficamos:

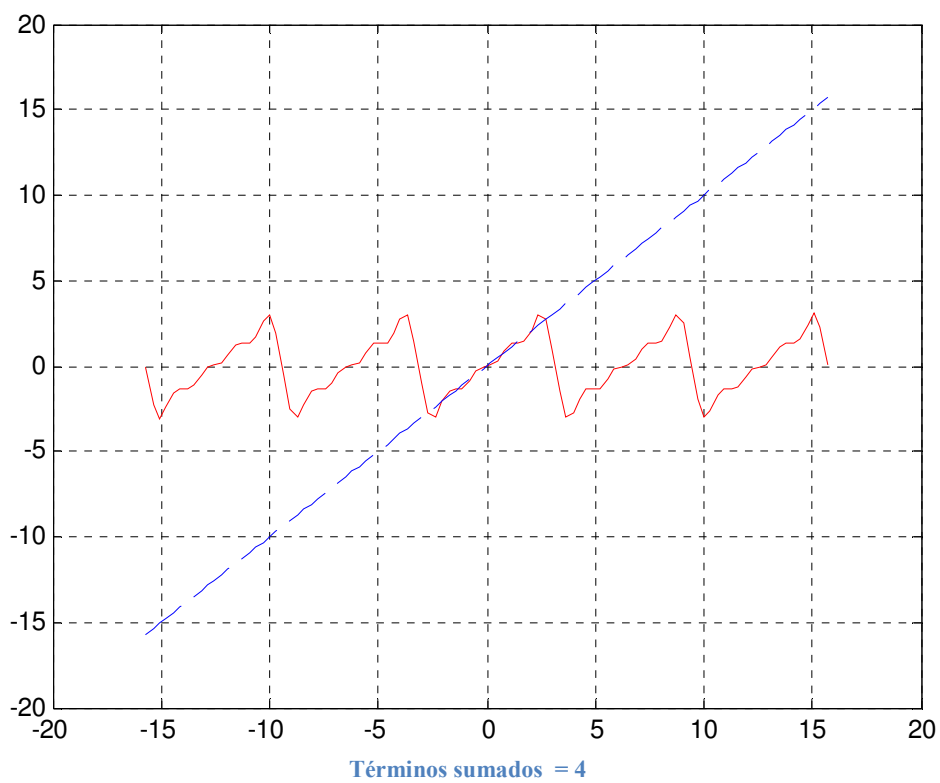
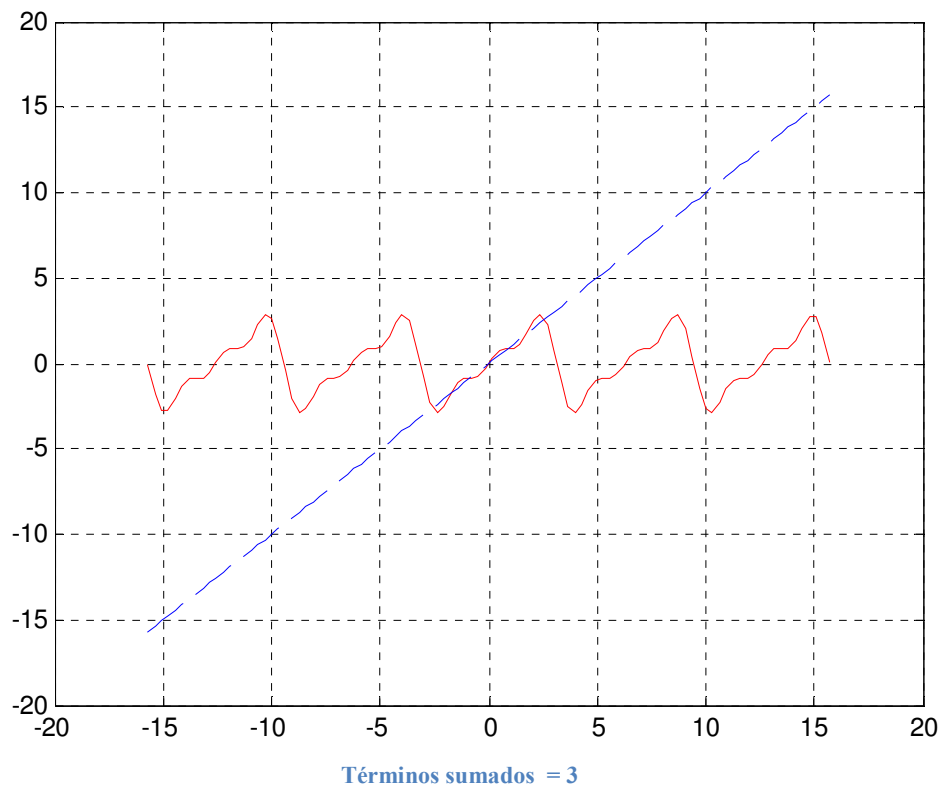
Primero en el intervalo $[-5\pi, 5\pi]$

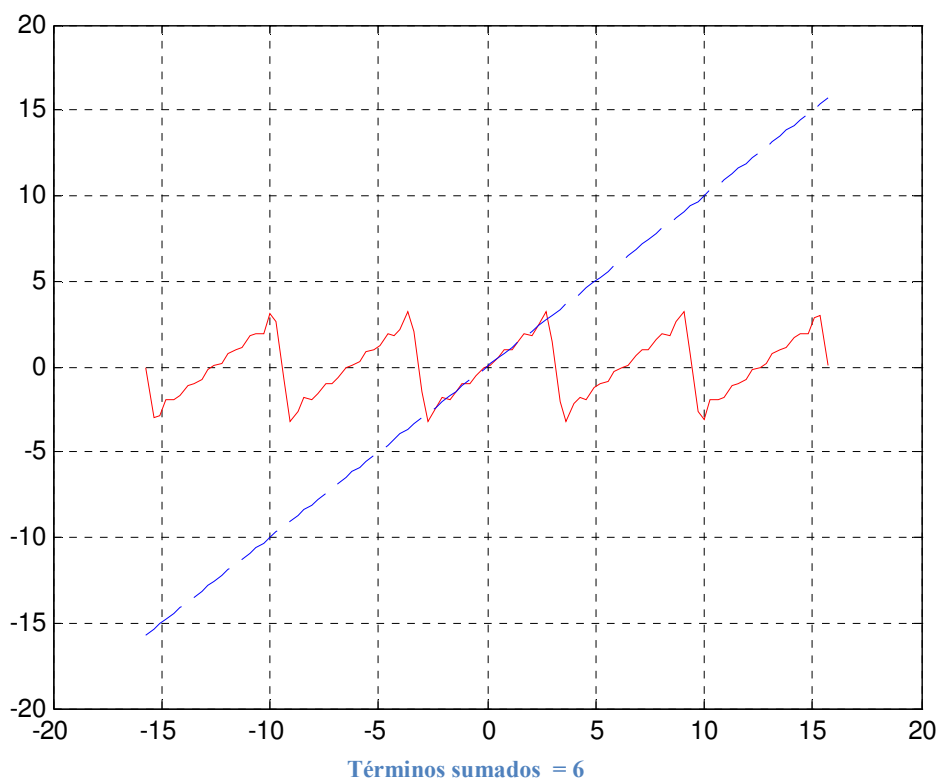
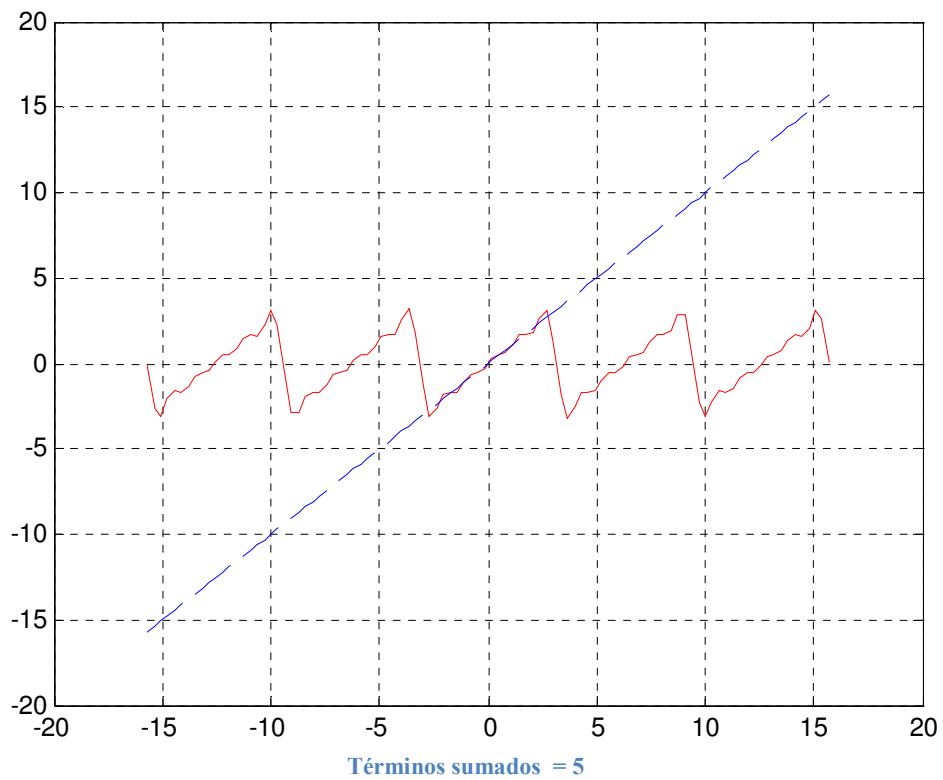


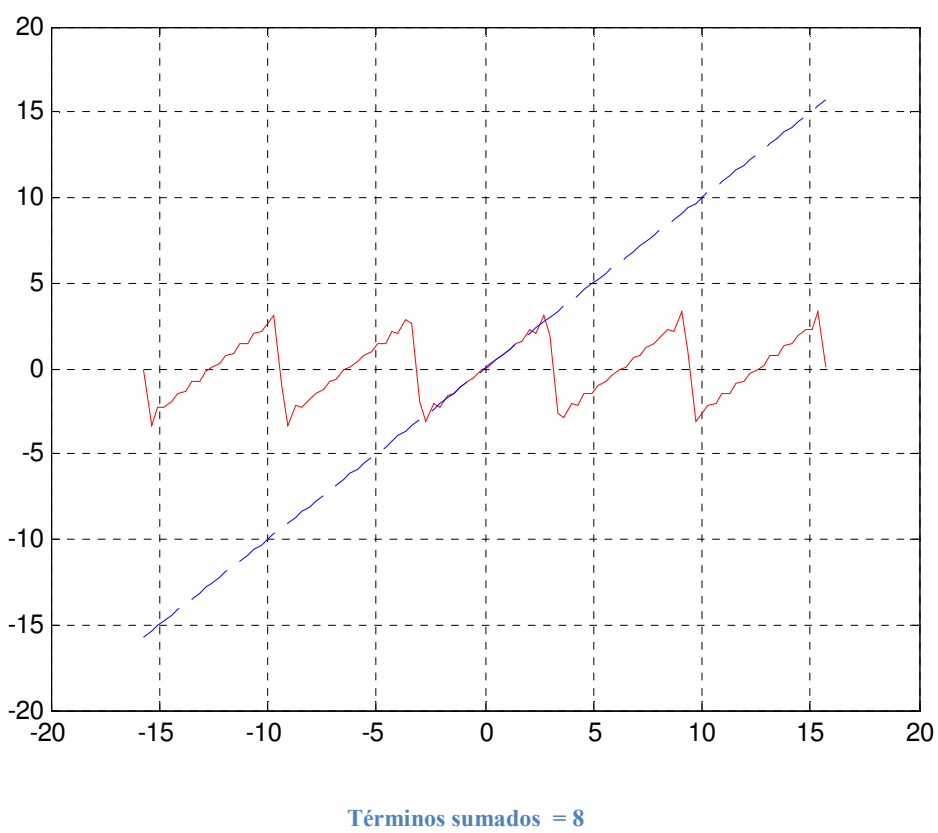
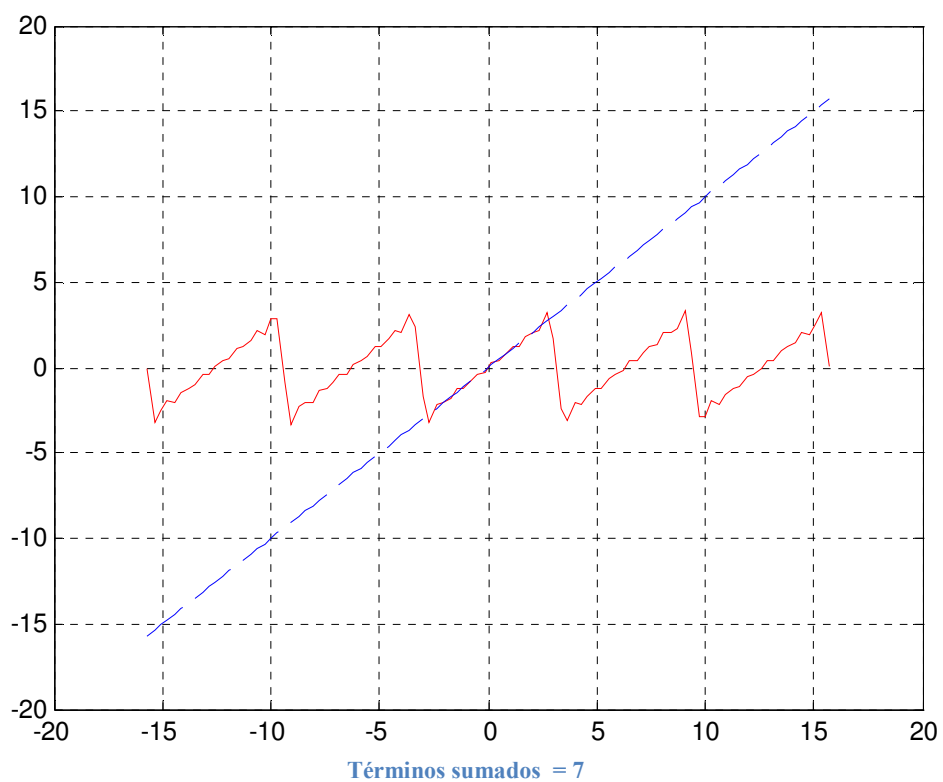
Términos sumados = 1

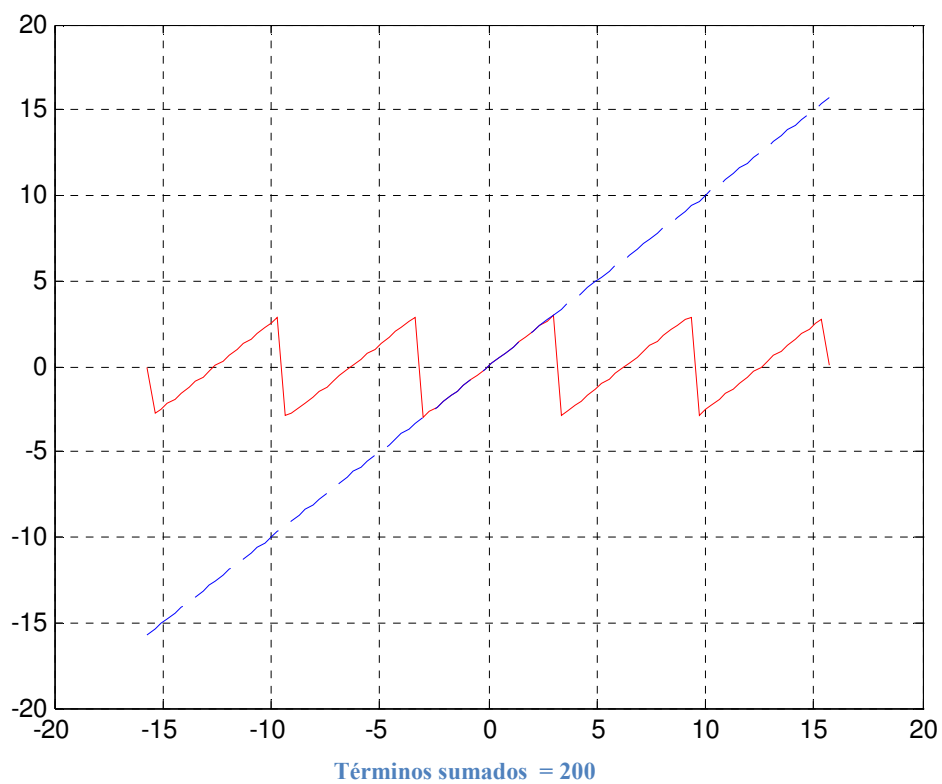
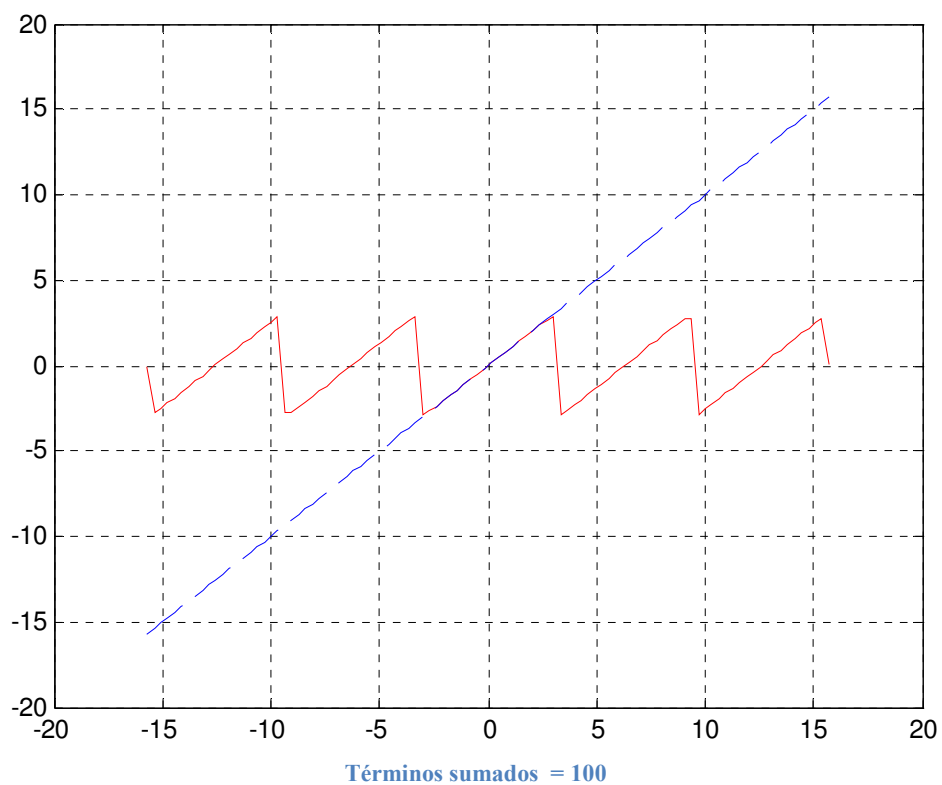


Términos sumados = 2

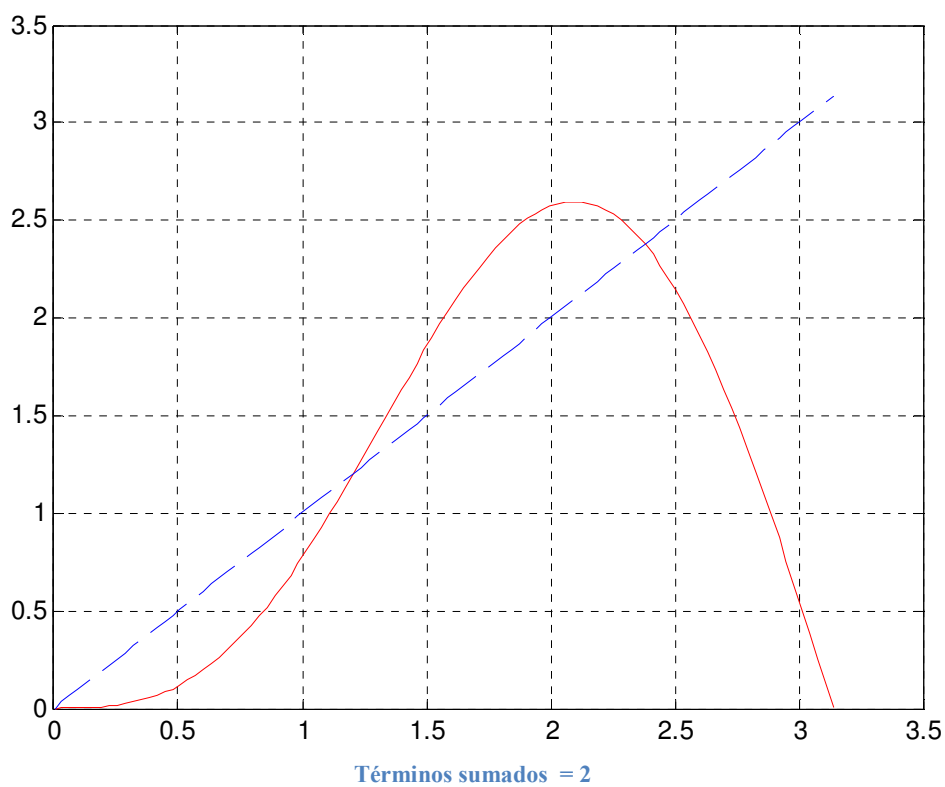
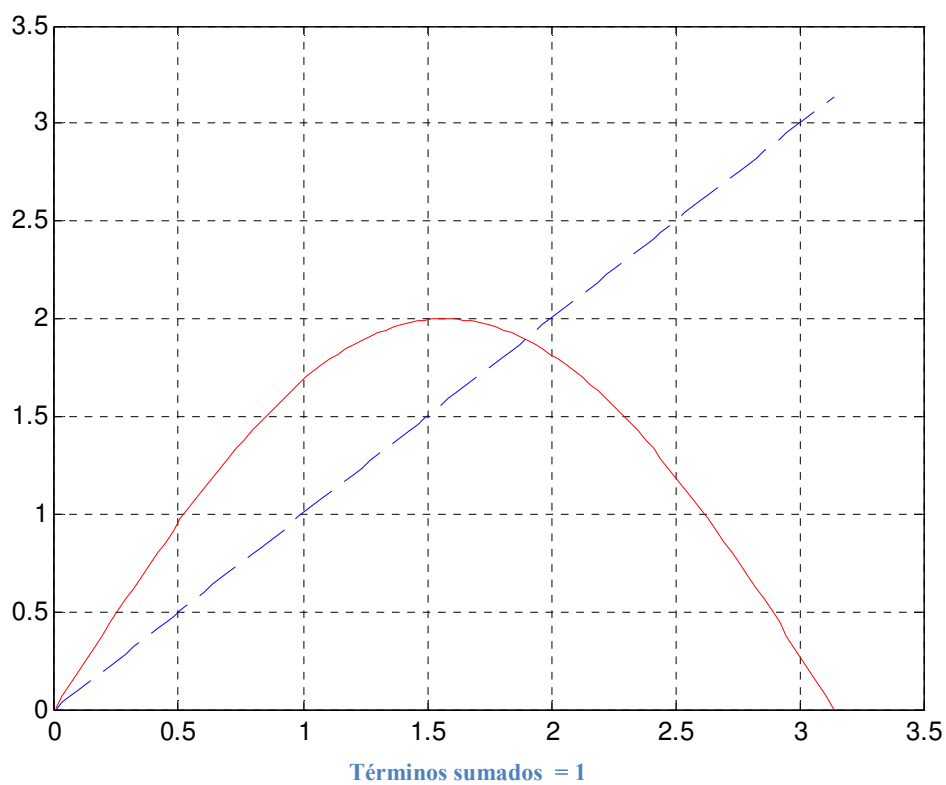


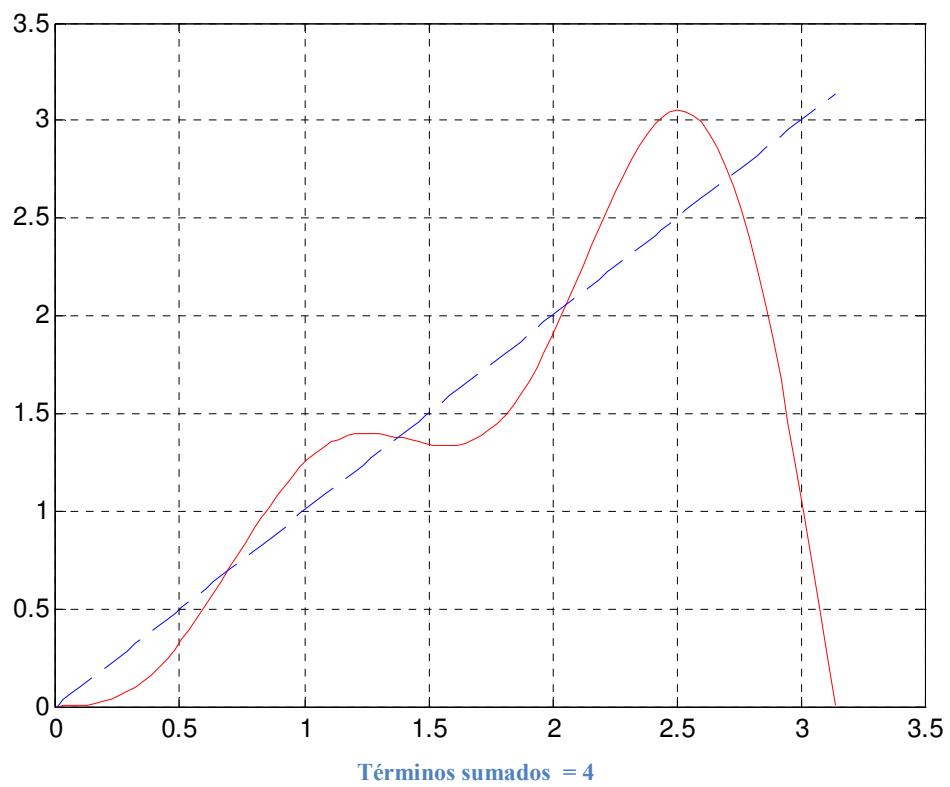
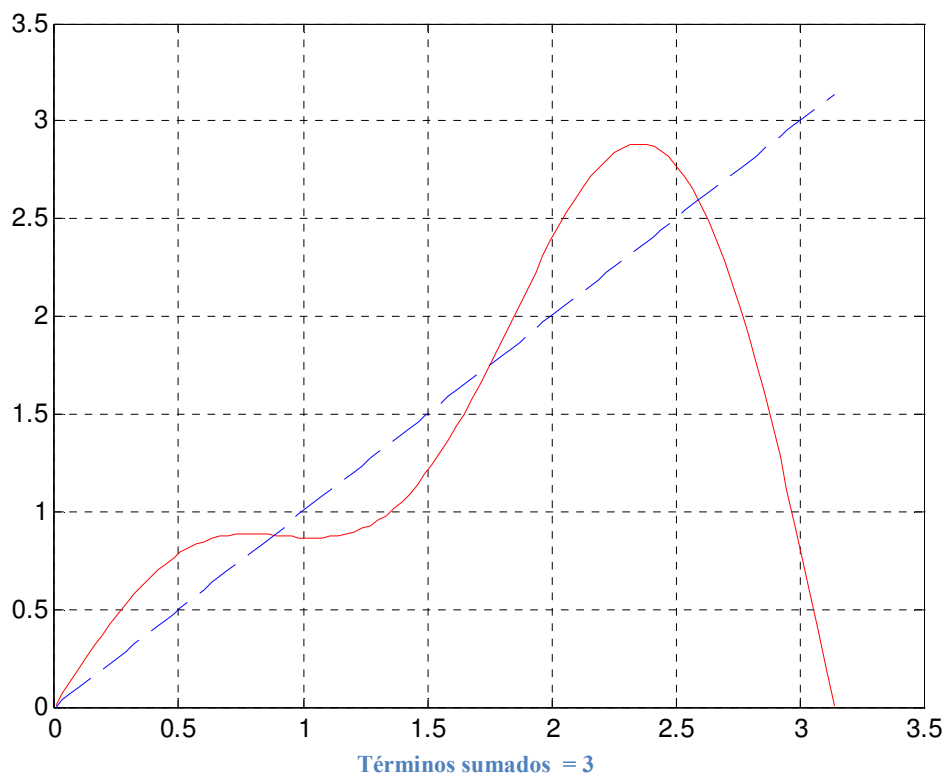


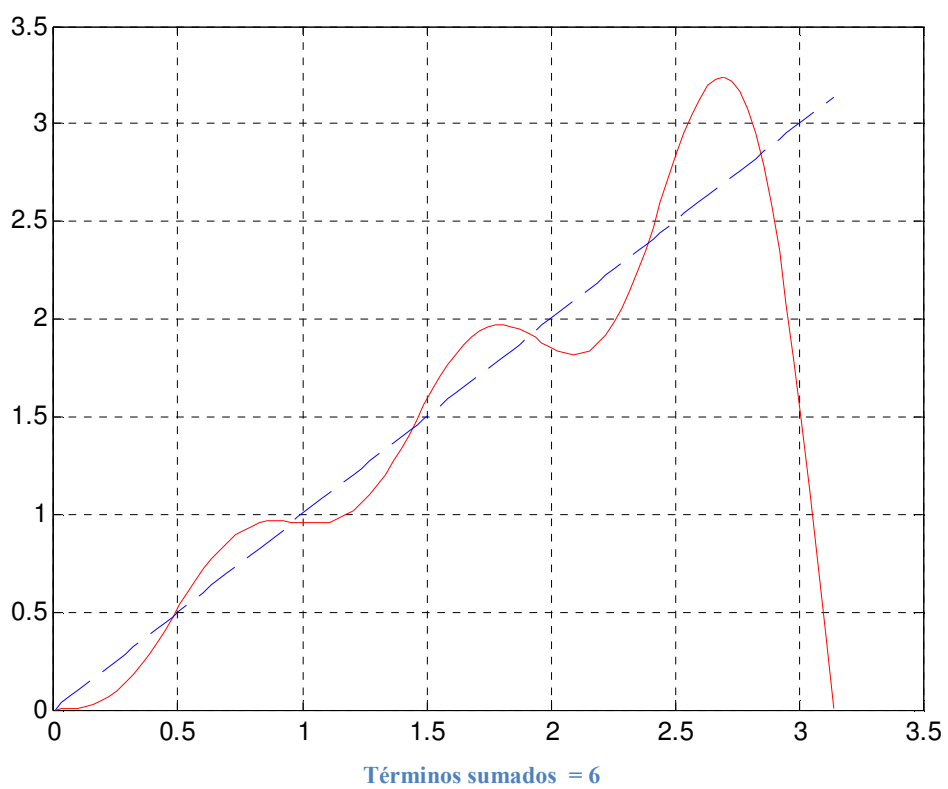
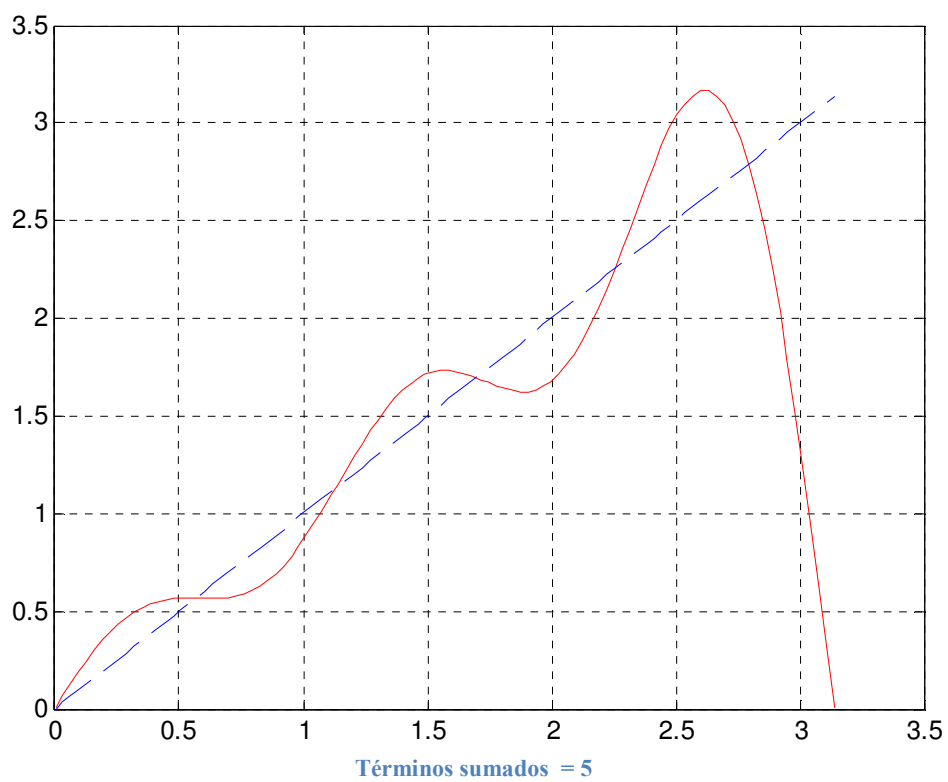


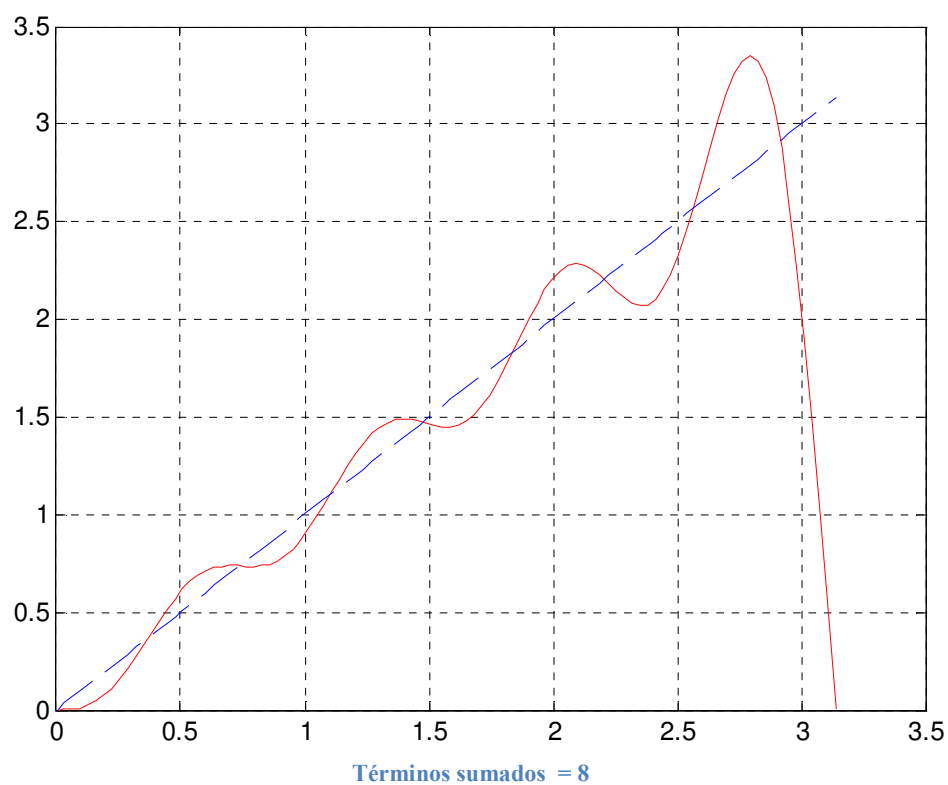
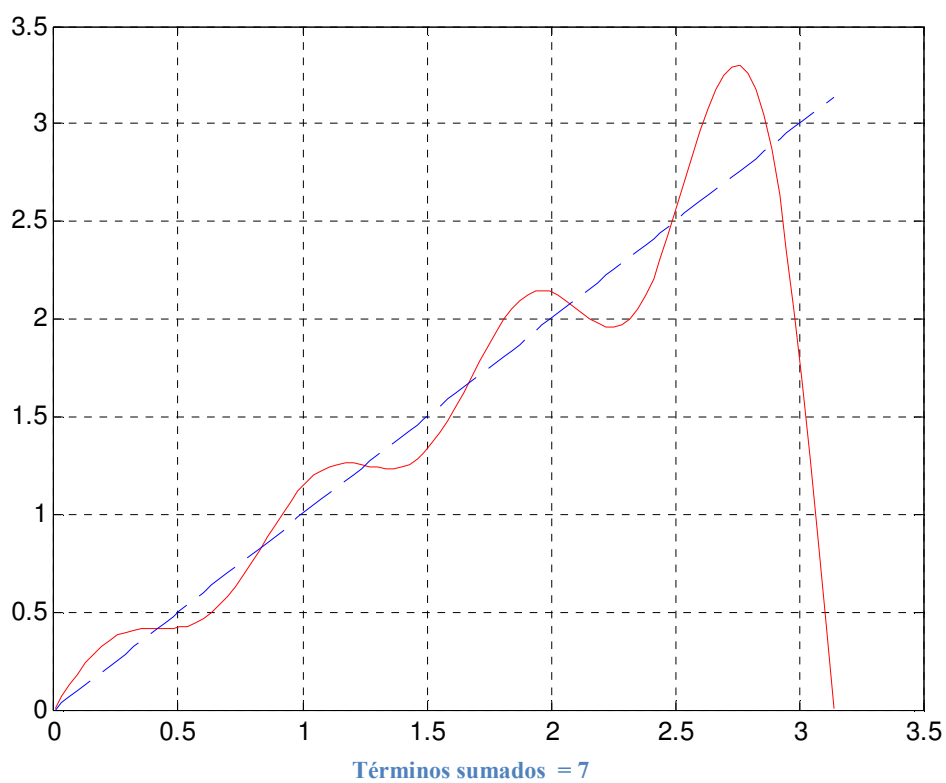


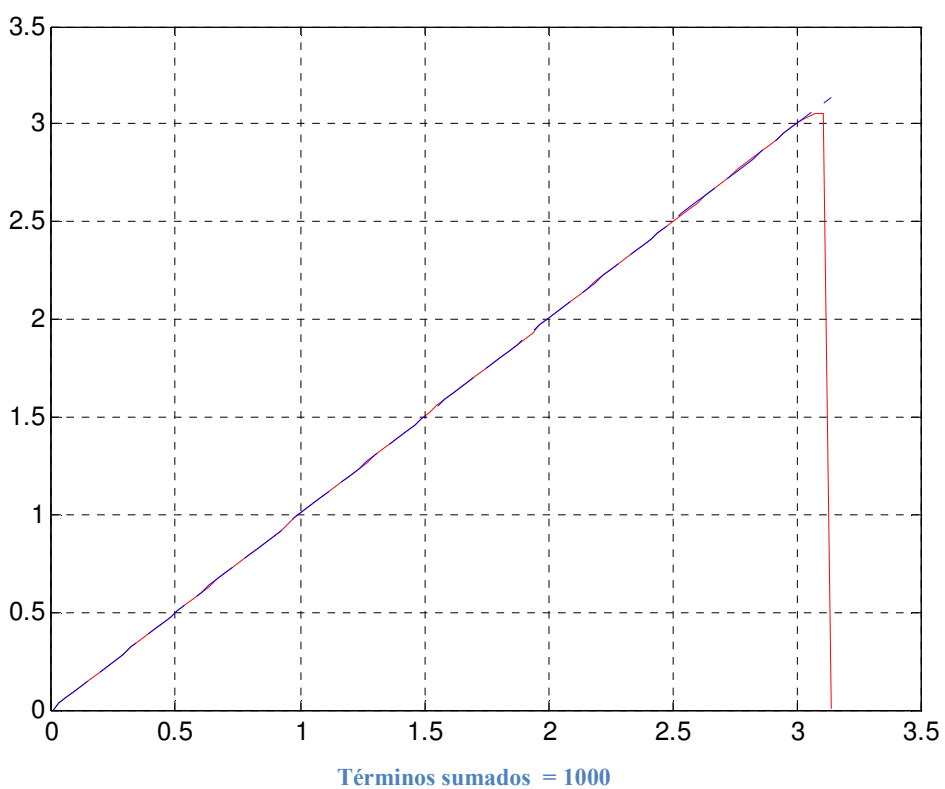
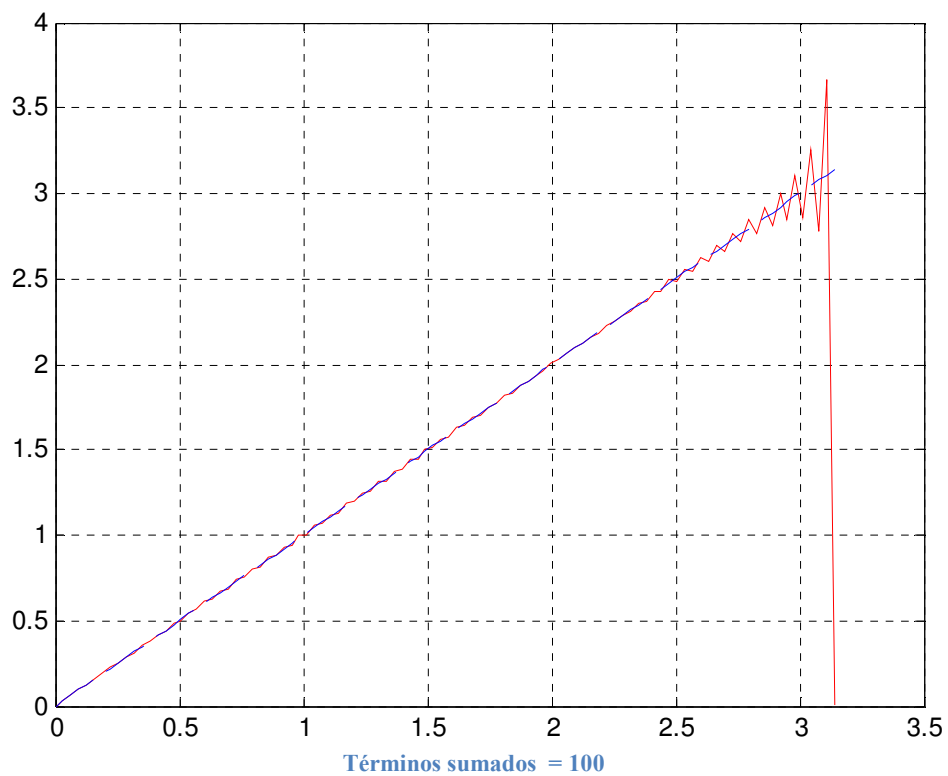
Puede verse que la aproximación es buena sólo en el intervalo de definición, lo que tiene sentido, pues ahí se hicieron los cálculos. De hecho, veamos el comportamiento en el intervalo de definición:











Ya con 1000 términos, se obtiene una muy buena aproximación de f EN su intervalo de definición, fuera de él, como se vio antes, las función y la serie de Fourier no tienen relación, debido a que la serie de Fourier es periódica y la función no.

Tarea 2.2

Encontraremos la serie de Fourier en senos, de $f(x) = x$, en $[0, \pi]$
Según lo que queremos, f debería expresarse como:

$$f(x) = x = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(nx) \quad x \in [0, \pi]$$

Observemos que si integramos directamente en todo el intervalo:

$$\int_0^{\pi} x dx = \int_0^{\pi} a_0 dx + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \int_0^{\pi} \cos(nx) \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{2} = a_0 \pi + 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{\pi}{2} = a_0}$$

Multiplicamos todo por $\cos(mx)$

$$(x - \frac{\pi}{2}) \cos(mx) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(nx) \cos(mx)$$

Integramos en el intervalo de definición:

$$\int_0^{\pi} (x - \frac{\pi}{2}) \cos(mx) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \int_0^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx$$

En el lado izquierdo:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} (x - \frac{\pi}{2}) \cos(mx) dx &= \frac{(x - \frac{\pi}{2}) \operatorname{sen}(mx)}{m} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{m} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(mx) dx \\ \int_0^{\pi} (x - \frac{\pi}{2}) \cos(mx) dx &= \frac{1}{m^2} \cos(mx) \Big|_0^{\pi} \\ \int_0^{\pi} (x - \frac{\pi}{2}) \cos(mx) dx &= \frac{((-1)^m - 1)}{m^2} \end{aligned}$$

En el lado derecho:

Podemos usar la identidad trigonométrica siguiente:

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

Luego

$$\int_0^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos((n-m)x) + \cos((n+m)x)] dx$$

Si $m = n$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \cos(nx)\cos(mx) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [1 + \cos(2nx)] dx \\ \int_0^{\pi} \cos(nx)\cos(mx) dx &= \frac{1}{2} \left(\pi + \int_0^{\pi} \cos(2nx) dx \right) \\ \int_0^{\pi} \cos(nx)\cos(mx) dx &= \frac{1}{2} \left(\pi + \frac{\sin(2nx)}{2n} \Big|_0^{\pi} \right)\end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} \cos(nx)\cos(mx) dx = \frac{\pi}{2}$$

Si $m \neq n$

$$\int_0^{\pi} \cos(nx)\cos(mx) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos((n-m)x) + \cos((n+m)x)] dx$$

$$\int_0^{\pi} \cos(nx)\cos(mx) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{-\sin((n-m)x)}{n-m} - \frac{\sin((n+m)x)}{n+m} \right] \Big|_0^{\pi}$$

$$\int_0^{\pi} \cos(nx)\cos(mx) dx = 0$$

Sólo vive el término $n = m$

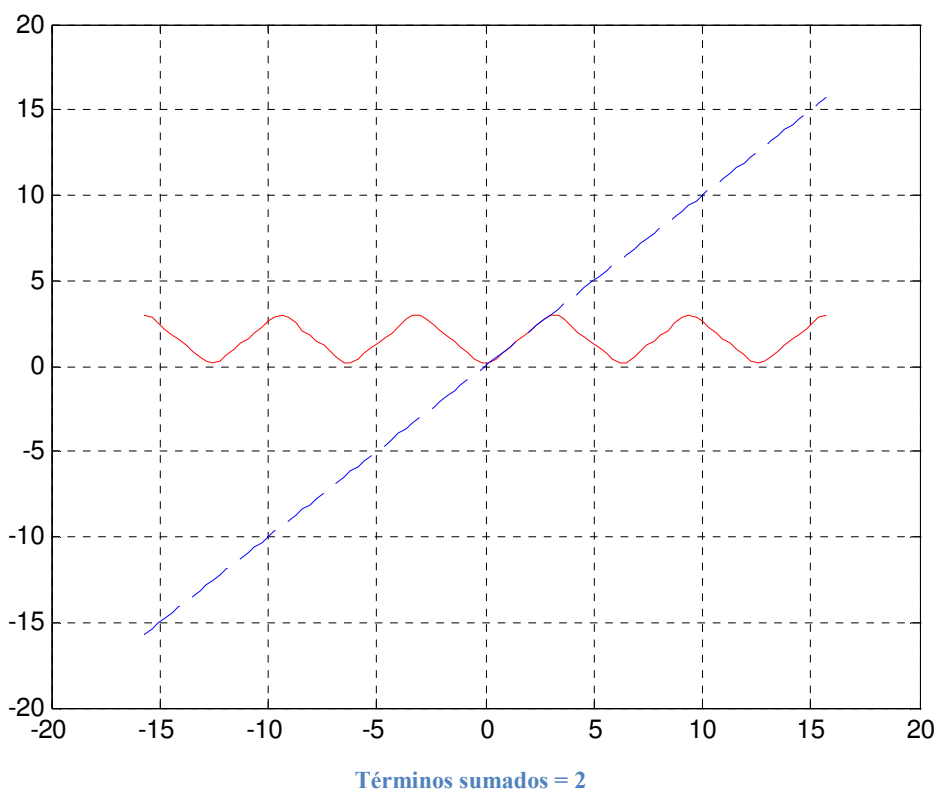
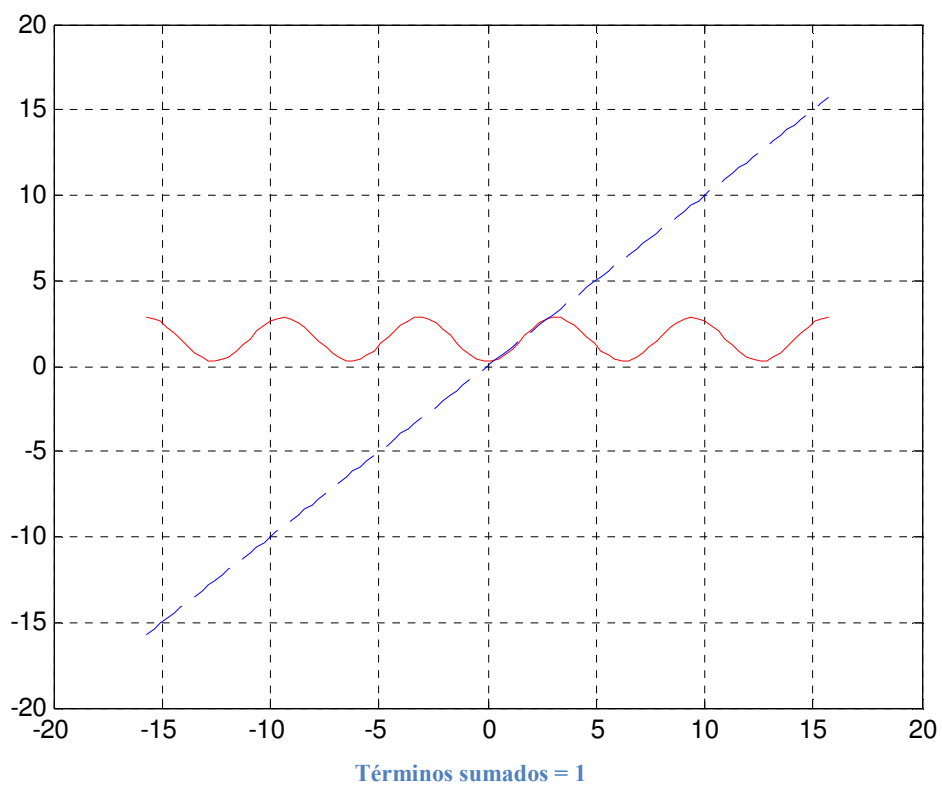
$$\frac{((-1)^m - 1)}{m^2} = \frac{\pi}{2} C_m$$

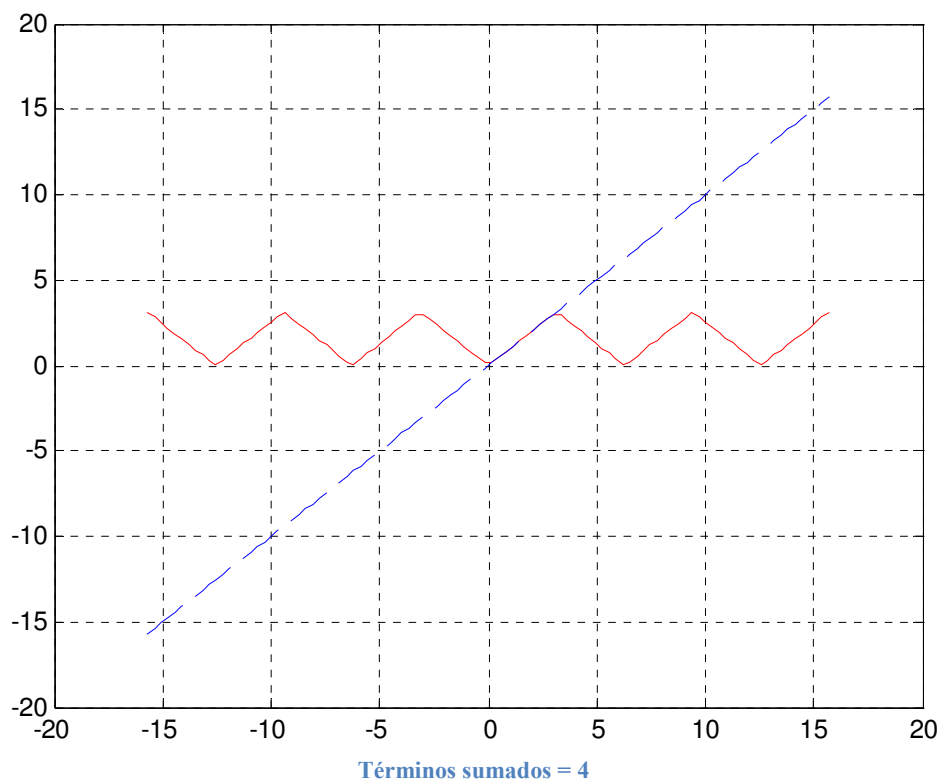
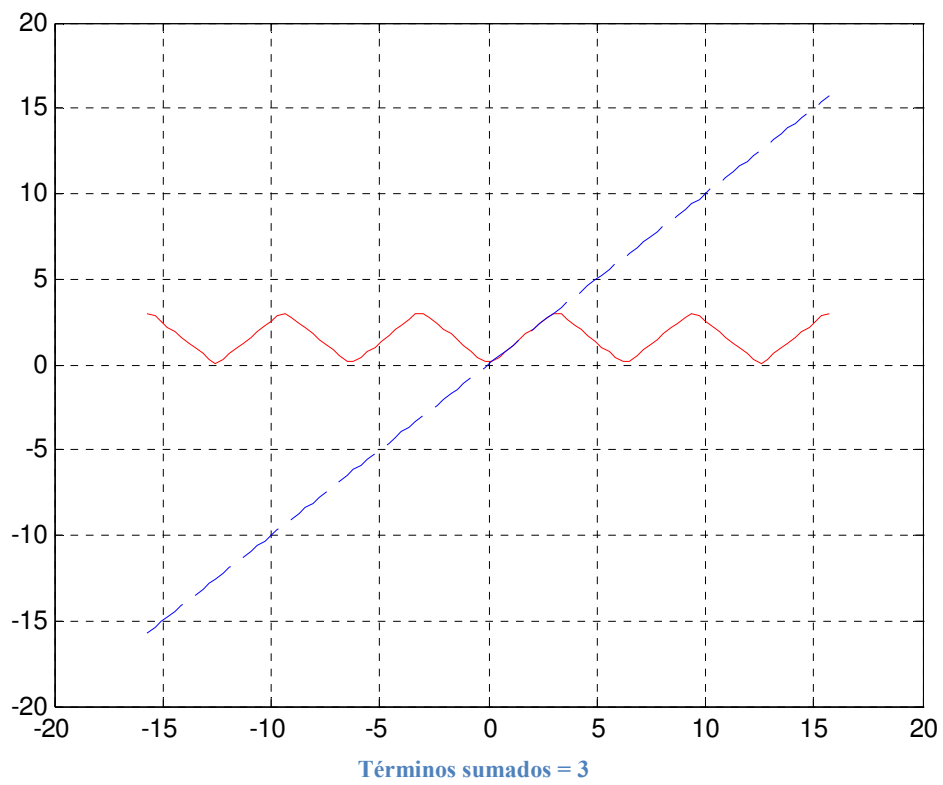
$$\boxed{\frac{2(-1)^{m+1}}{\pi m^2} = C_m}$$

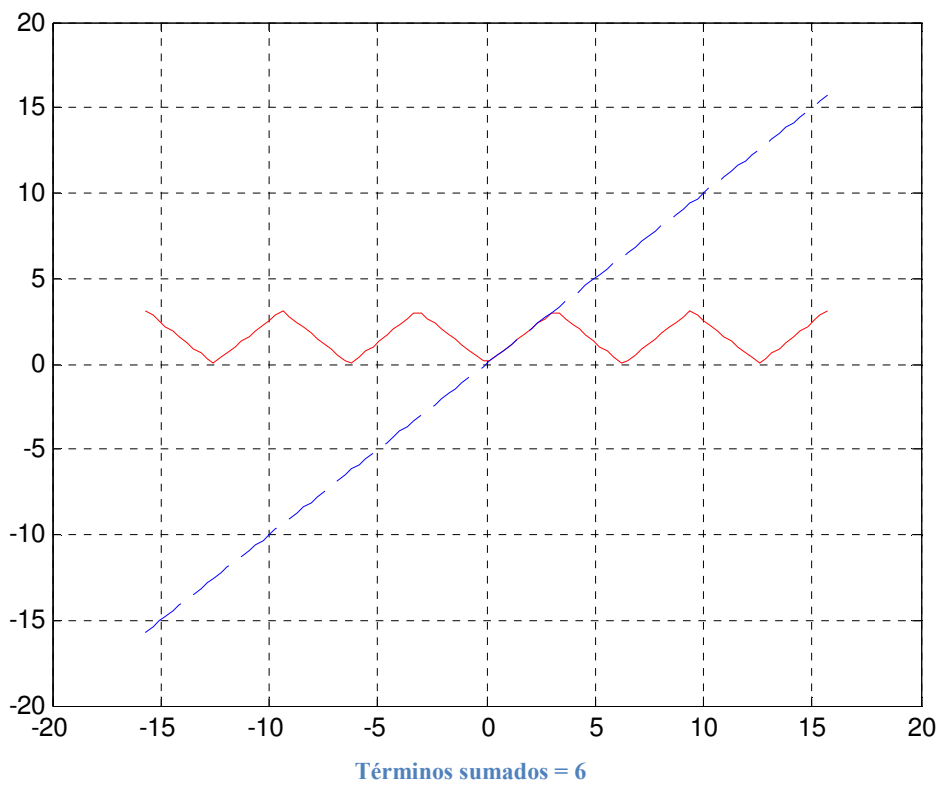
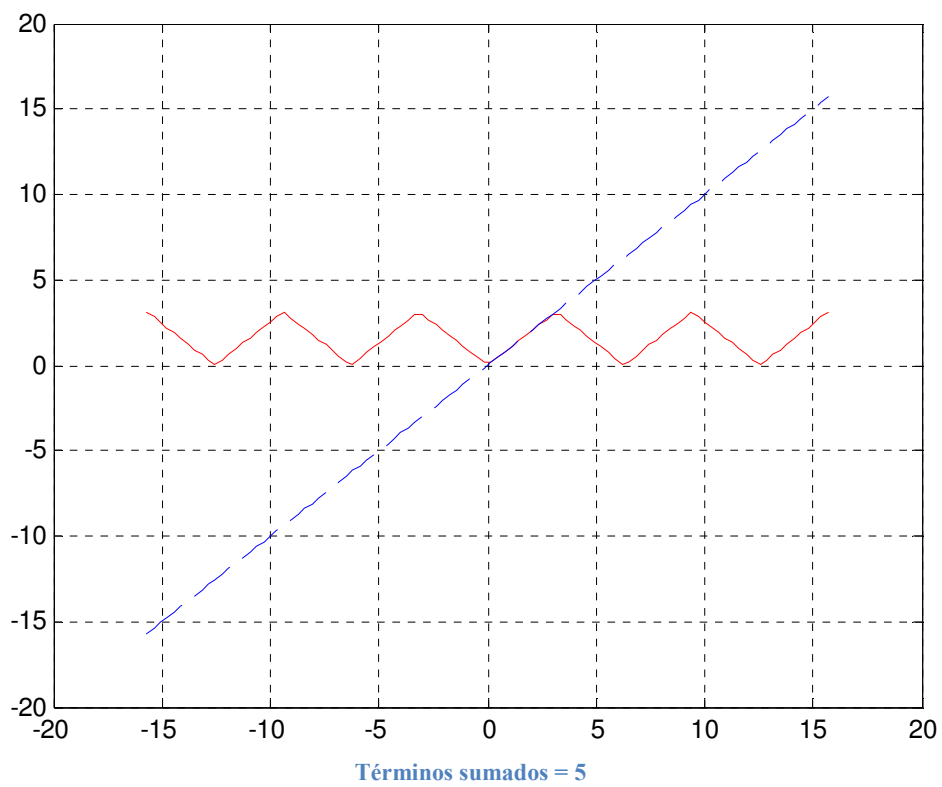
$$\boxed{f(x) = x = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((-1)^{n+1} - 1)}{n^2} \cos(nx) \quad x \in [0, \pi]}$$

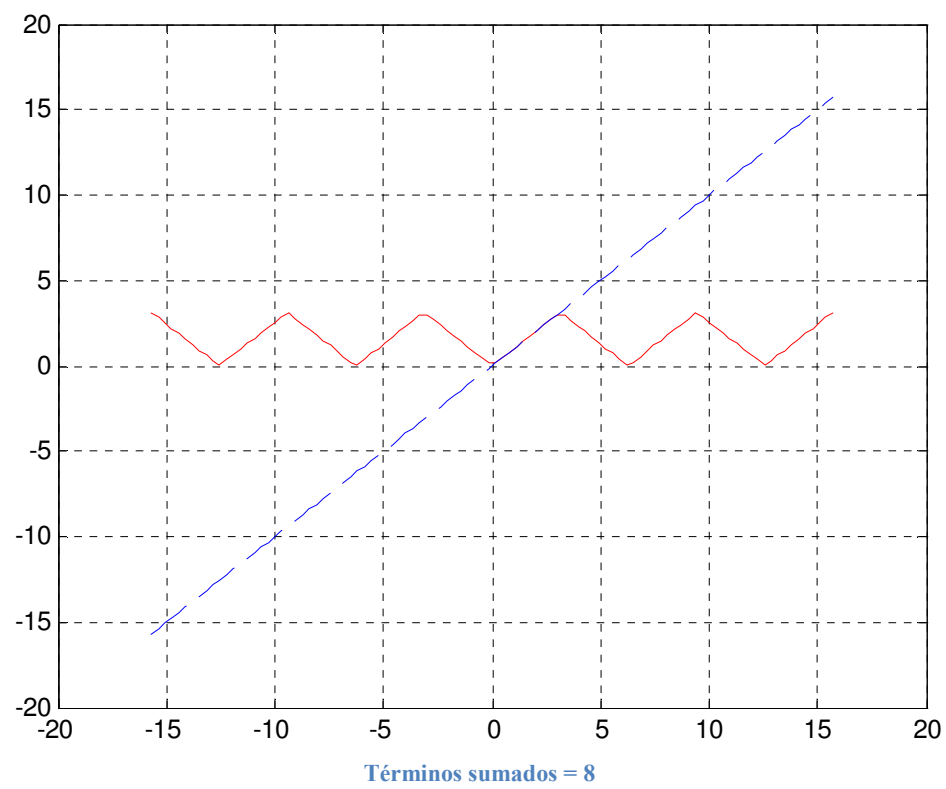
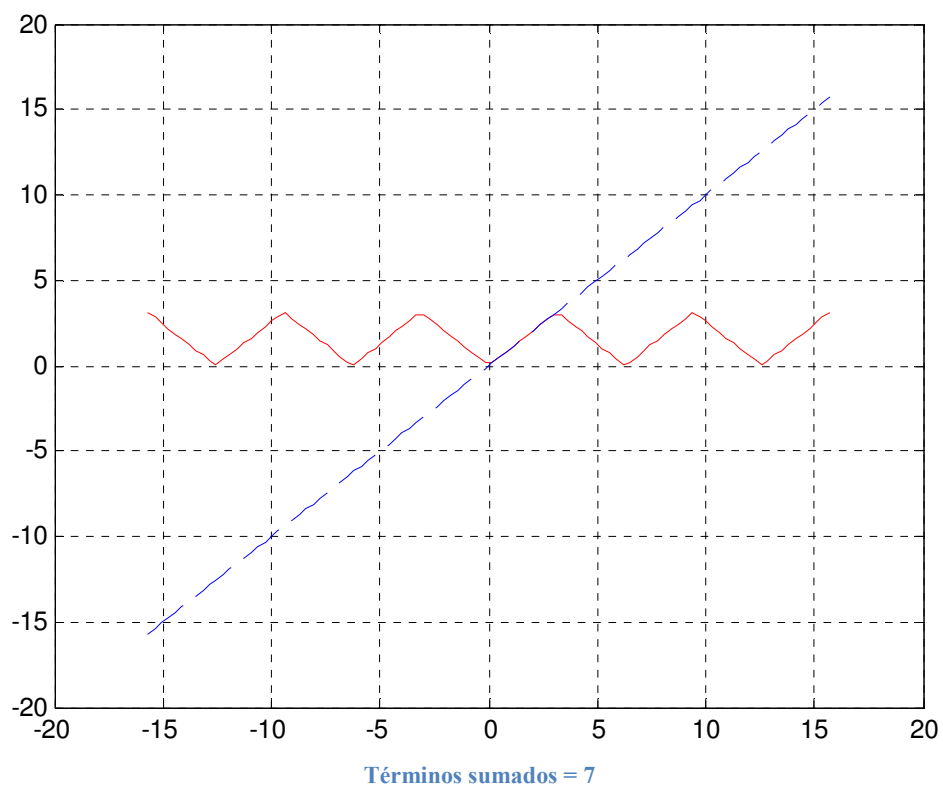
Veamos que pasa si la graficamos:

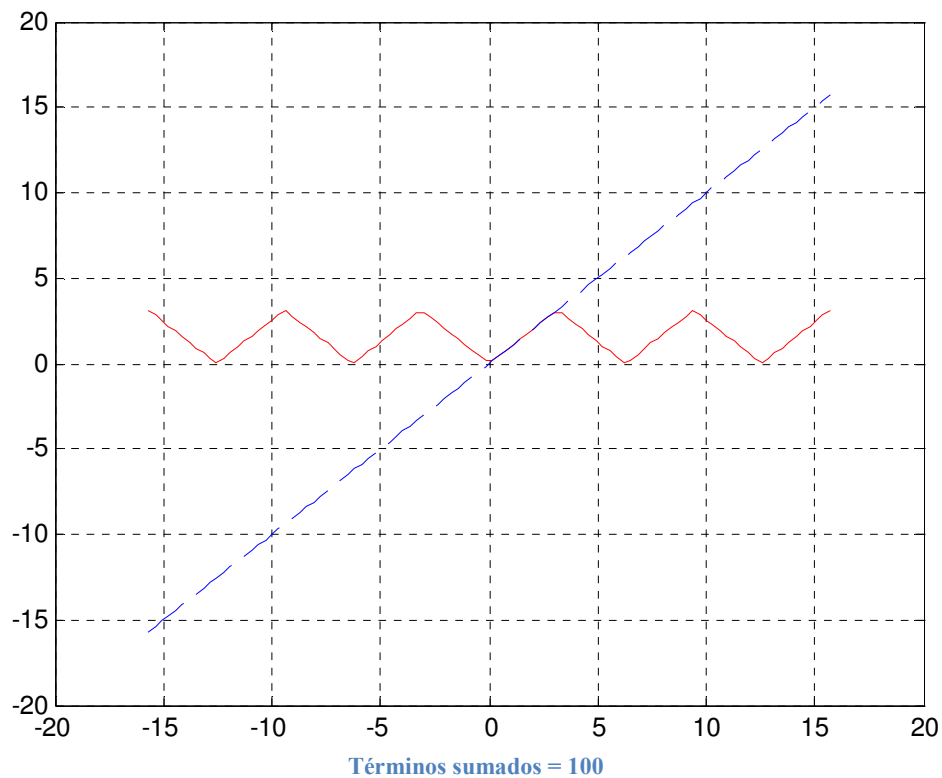
Primero en el intervalo $[-5\pi, 5\pi]$



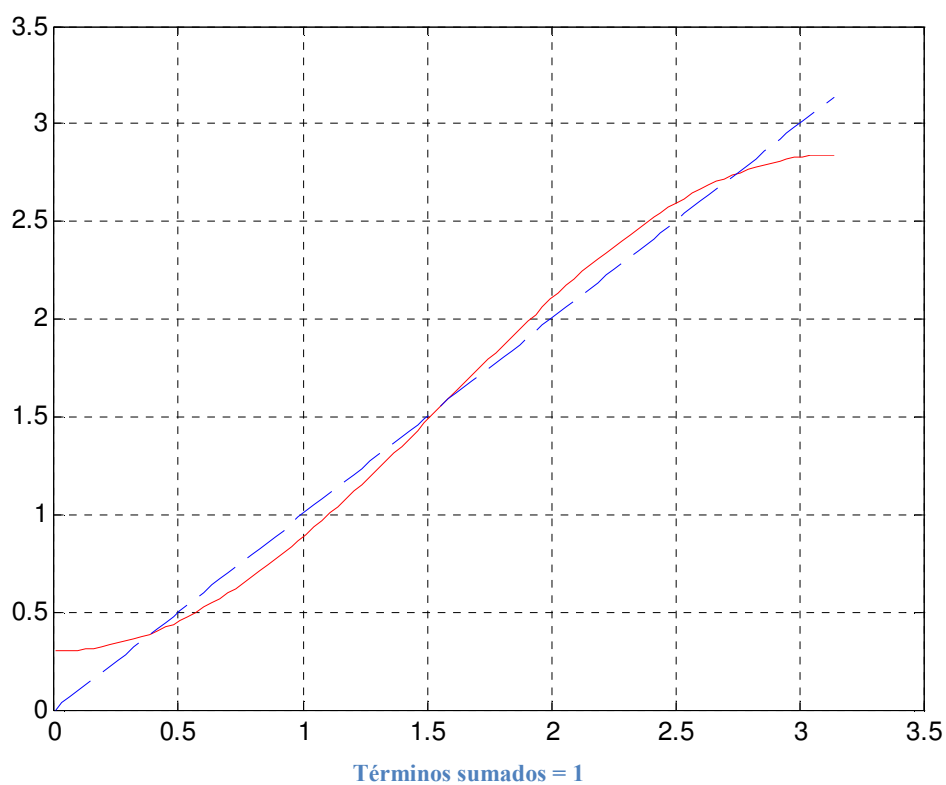


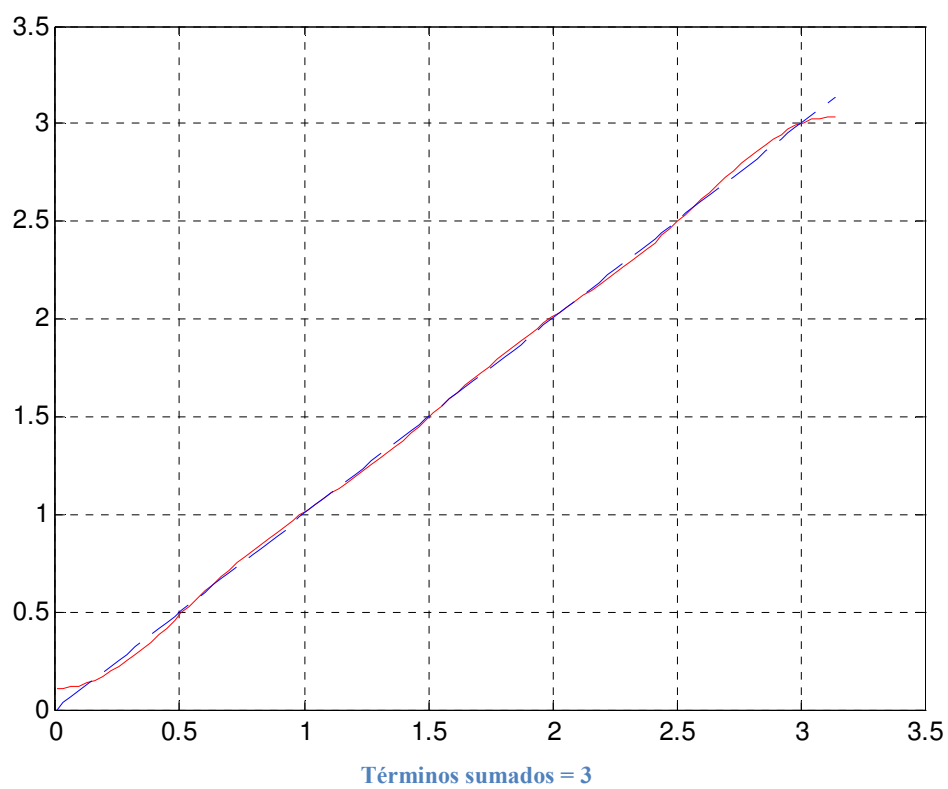
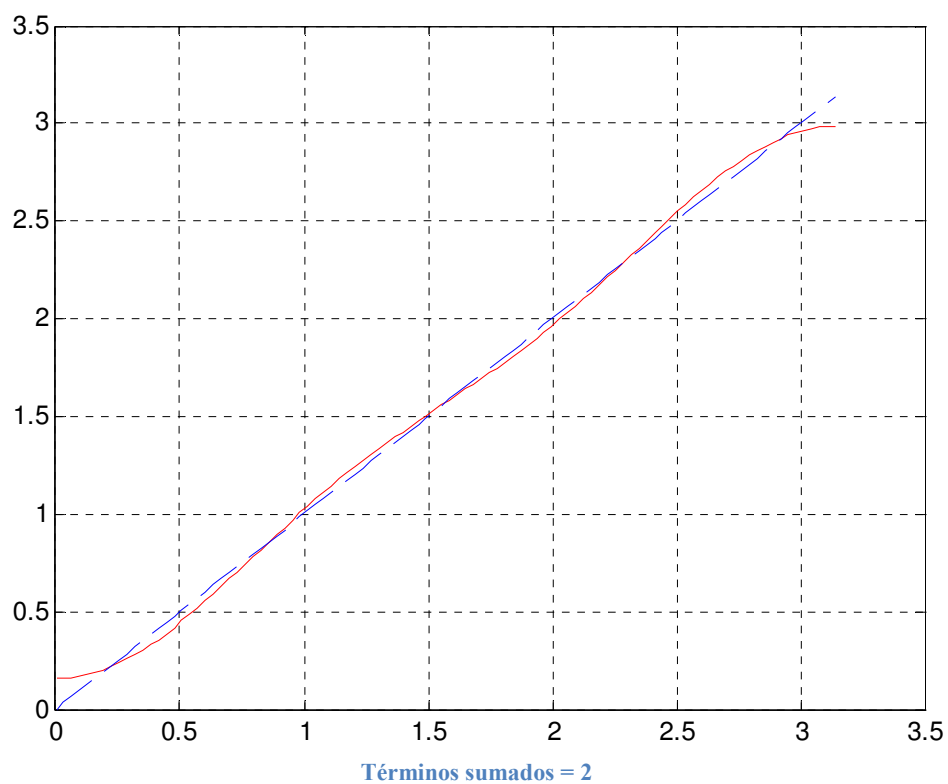


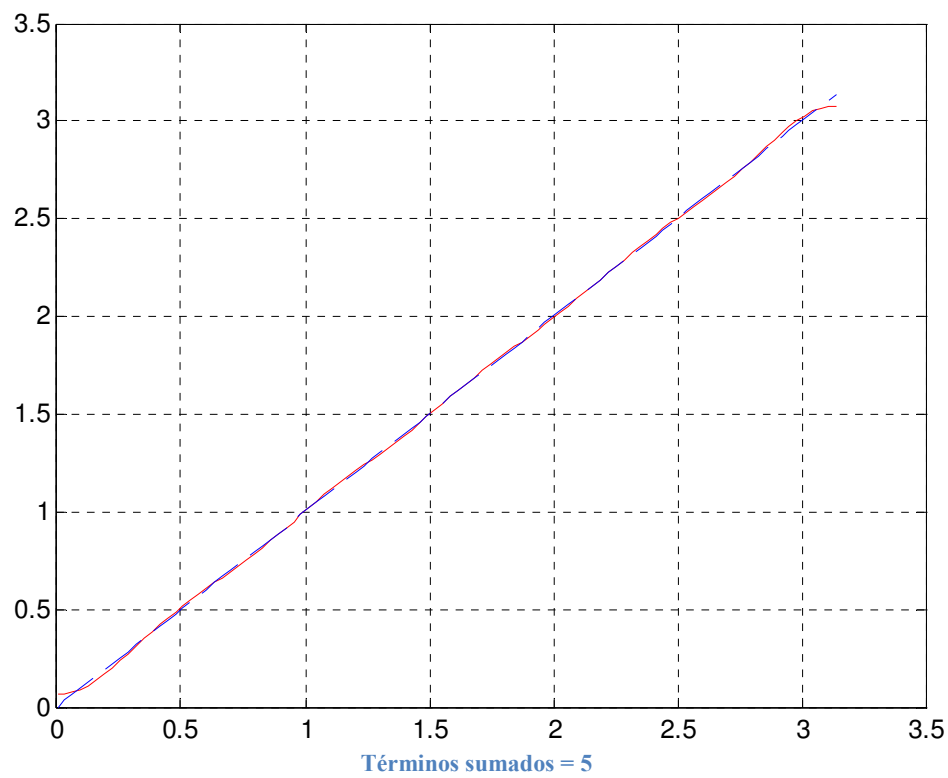
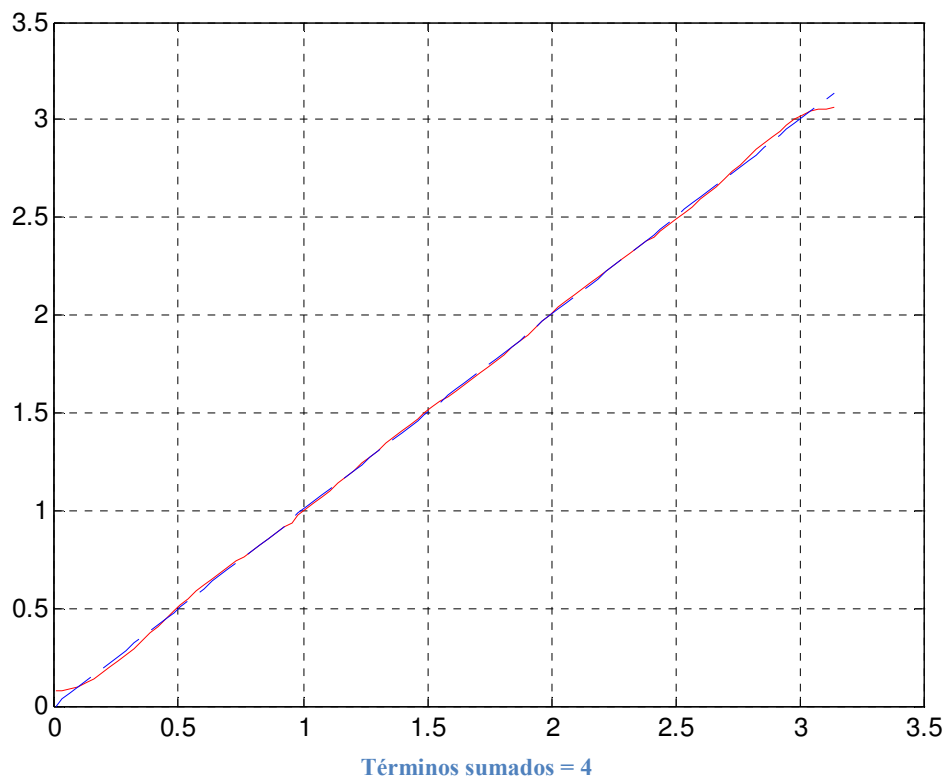


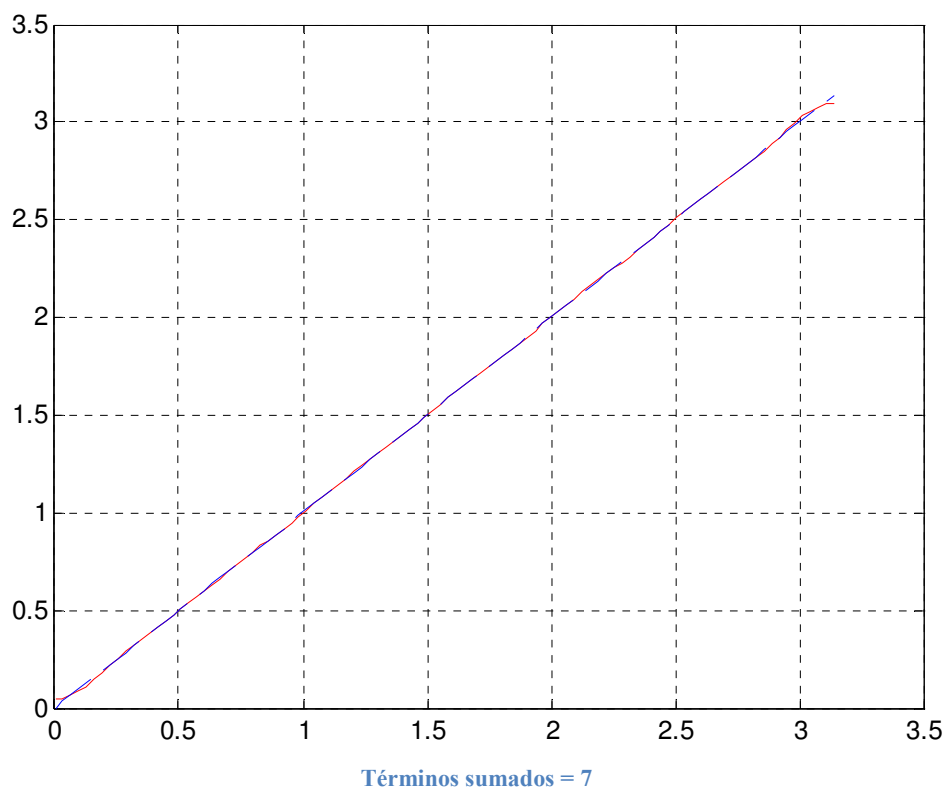
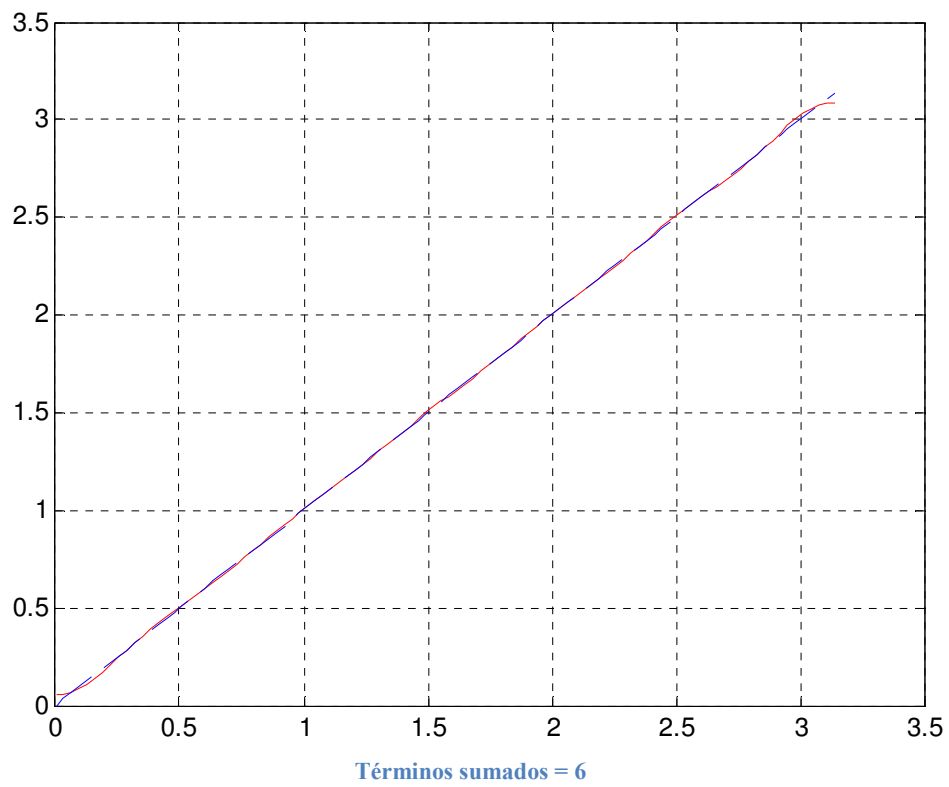


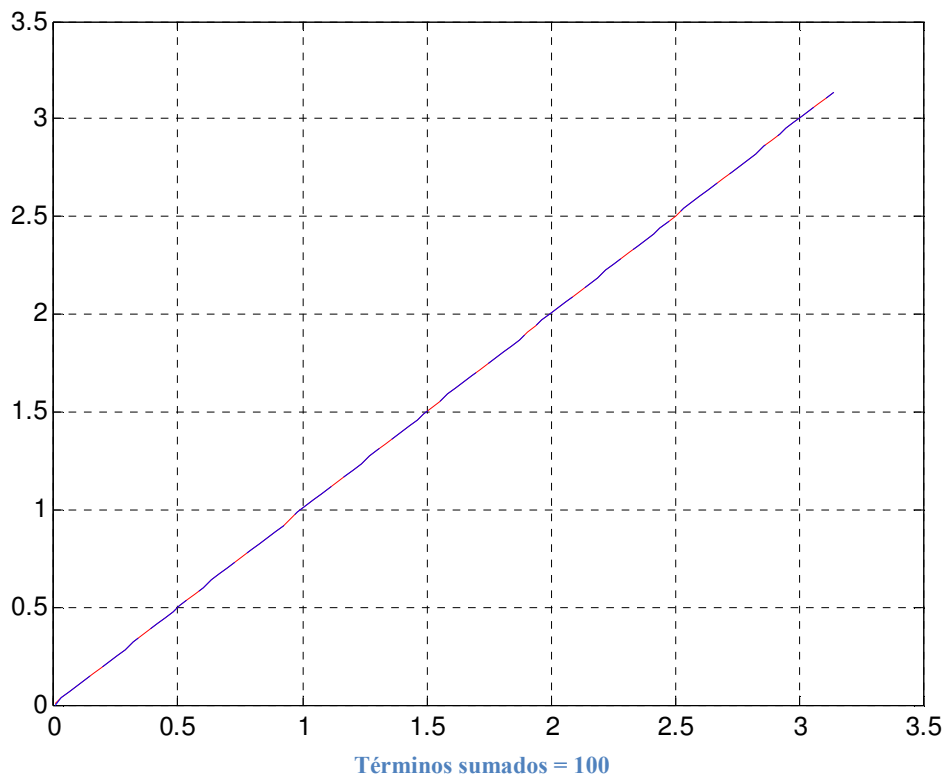
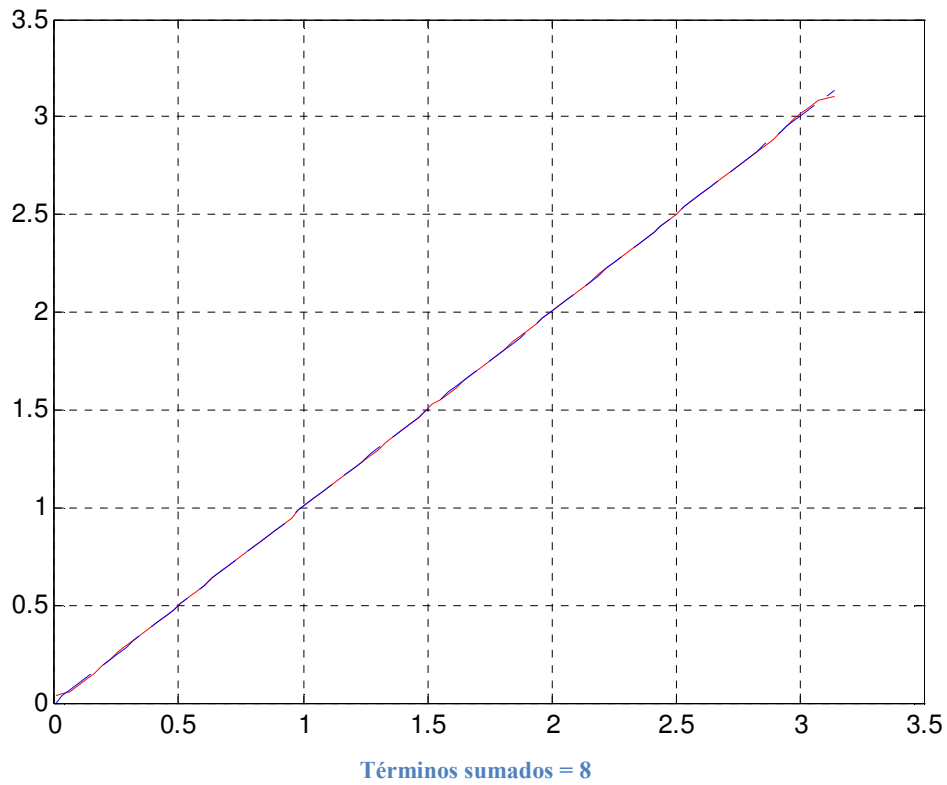
Puede verse que la serie de Fourier sólo aproxima a la función en su intervalo de definición, y en el resto, se alejan bastante. Esto se debe a que la serie de Fourier es una función periódica, mientras que la función f no lo es. Basta que observemos lo que ocurre en el intervalo de definición:











Es notoria que desde $n = 4$ la aproximación es muy buena (con $n = 100$ es más que suficiente), lo que es producto que la convergencia de la serie de Fourier en cosenos, en este caso, es más rápida que la de senos, puesto que los coeficientes en coseno, decrecen como $1/n^2$ mientras que en seno lo hacen como $1/n$

Tarea 2.3

Encontraremos la serie de Fourier en senos, de $f(x) = 1$, en $[0, \pi]$
Según lo que queremos, f debería expresarse como:

$$f(x) = 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \operatorname{sen}(nx) \quad x \in [0, \pi]$$

Repitiendo los argumentos anteriores, se obtiene que

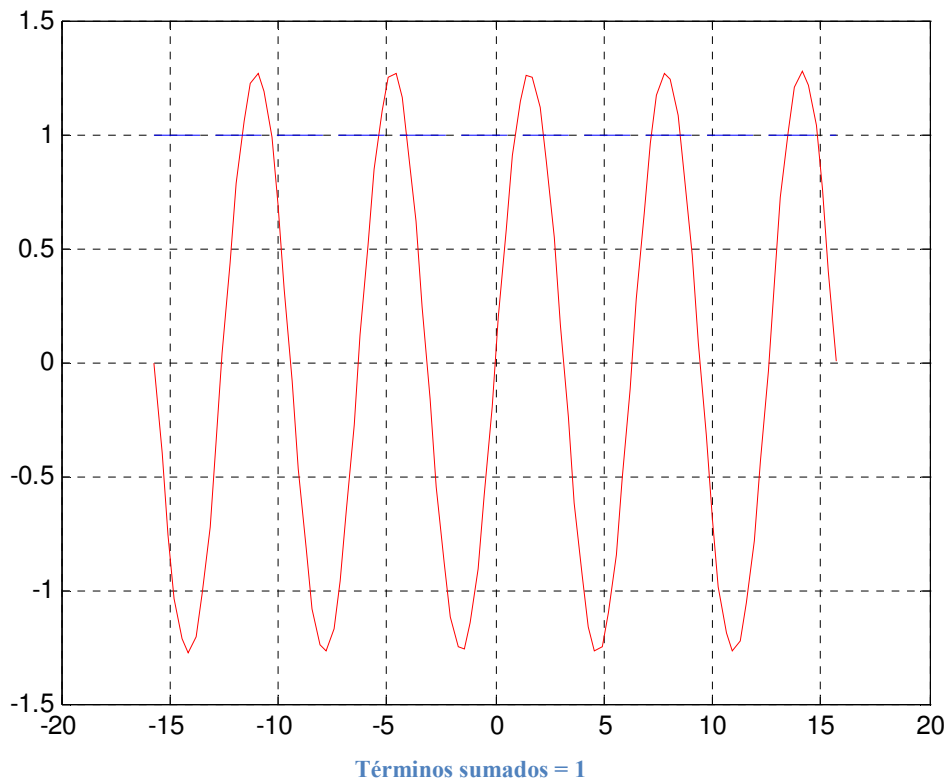
$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \operatorname{sen}(nx) dx \Leftrightarrow B_n = \frac{2}{\pi} \frac{\cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi}$$

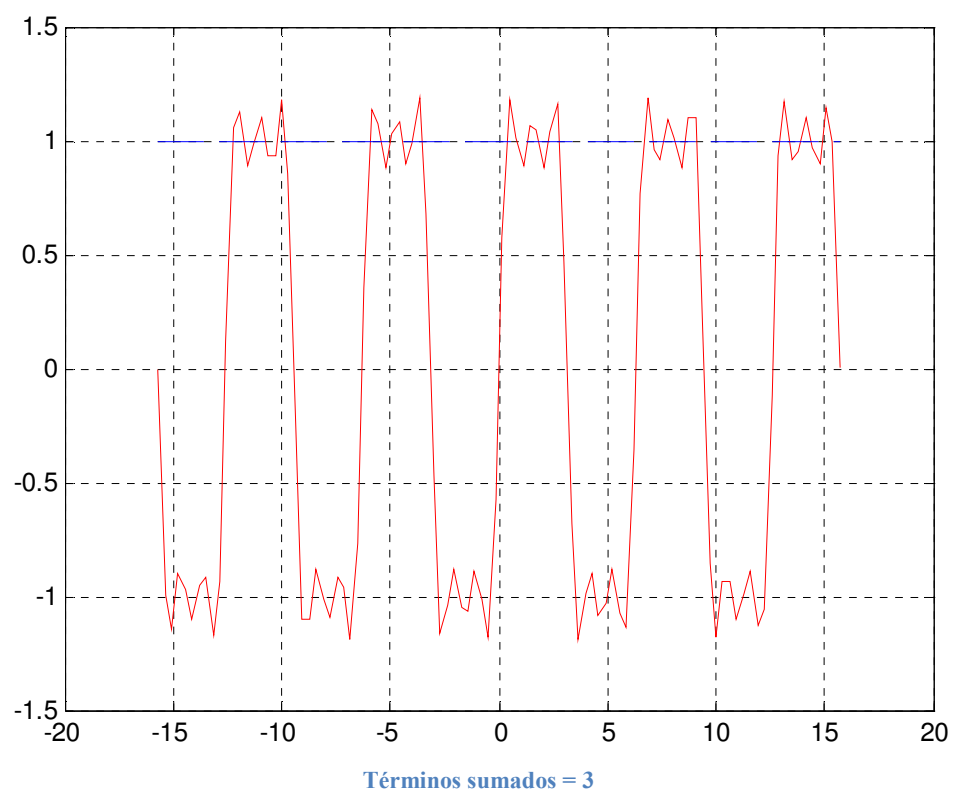
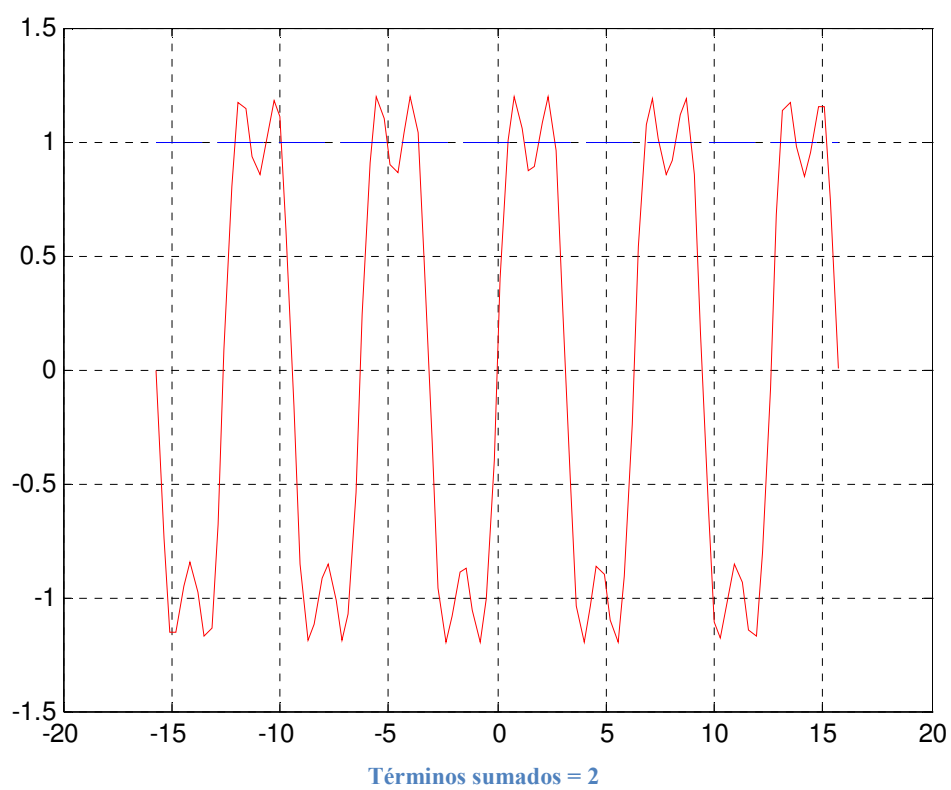
$$B_n = \frac{2(1 - (-1)^n)}{\pi n}$$

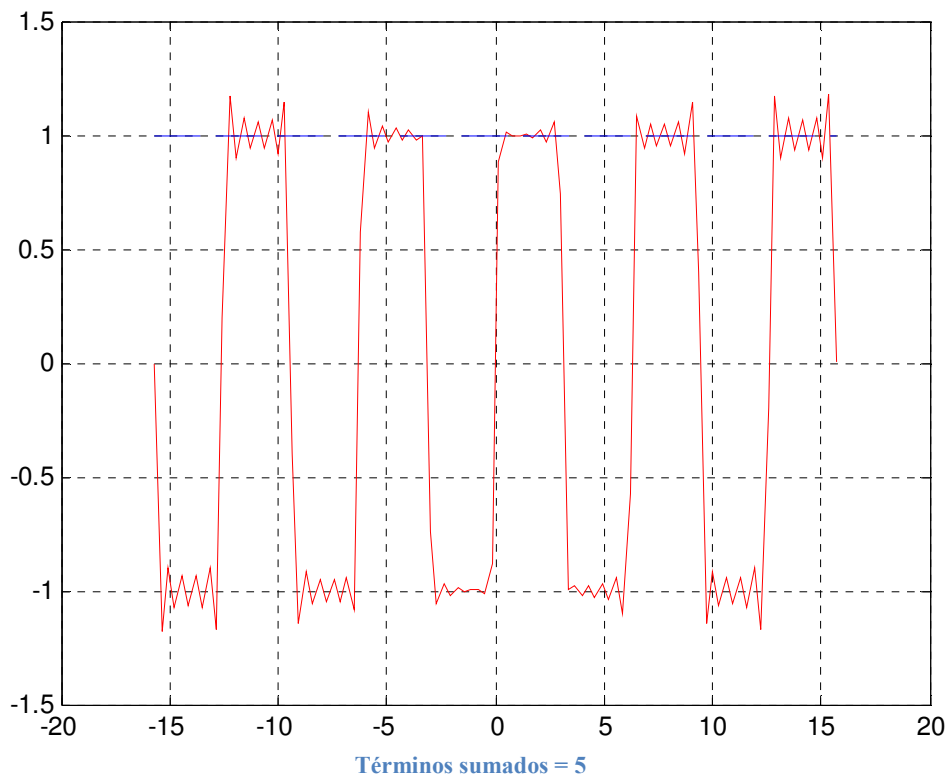
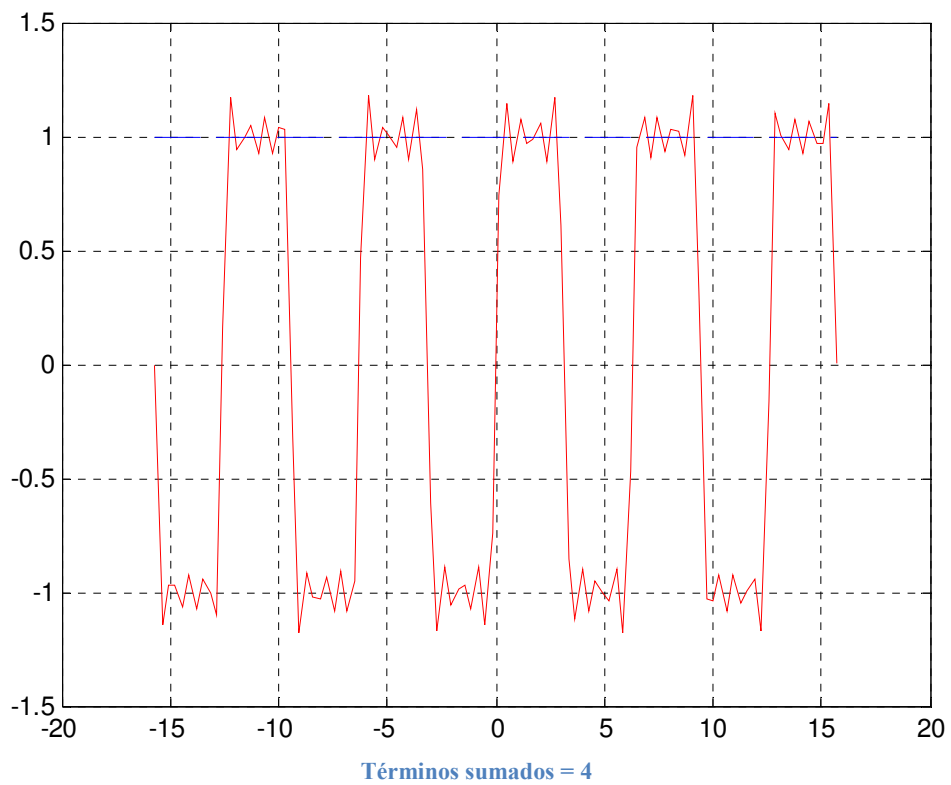
Luego,

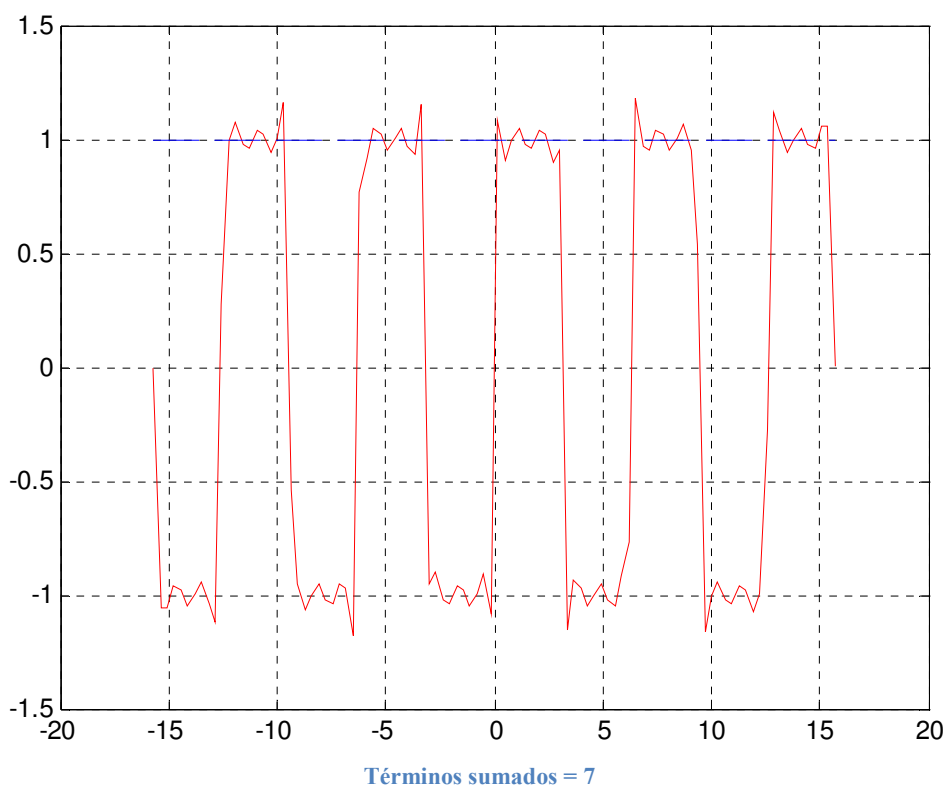
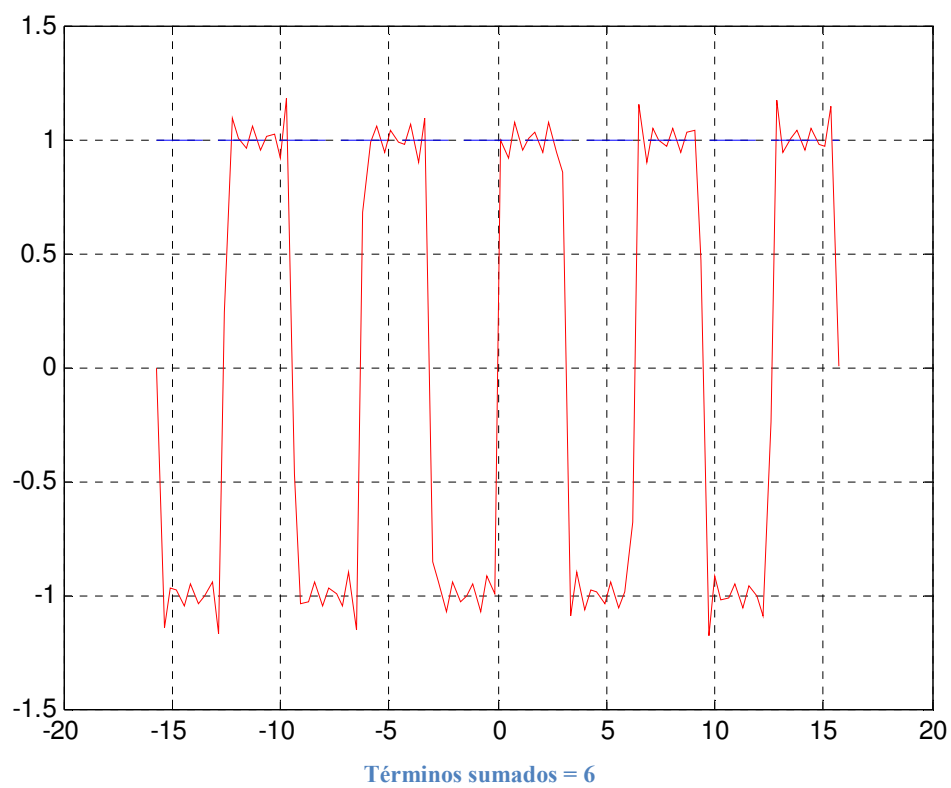
$$f(x) = 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(1 - (-1)^n)}{\pi n} \operatorname{sen}(nx) \quad x \in [0, \pi]$$

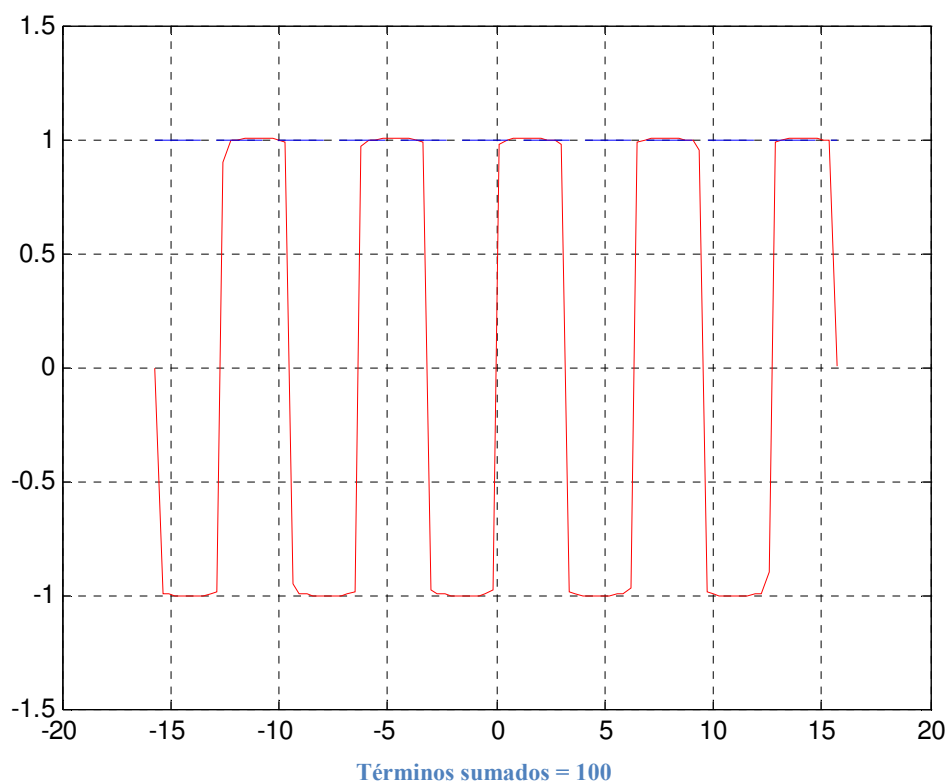
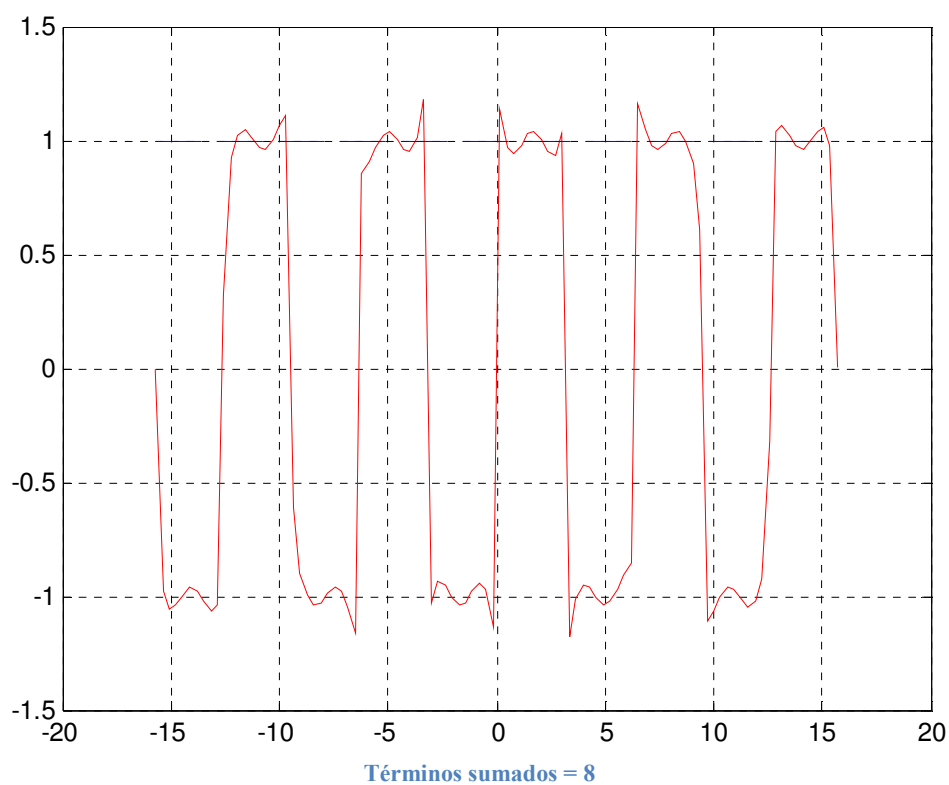
Mirémosla primero en el intervalo $[-5\pi, 5\pi]$





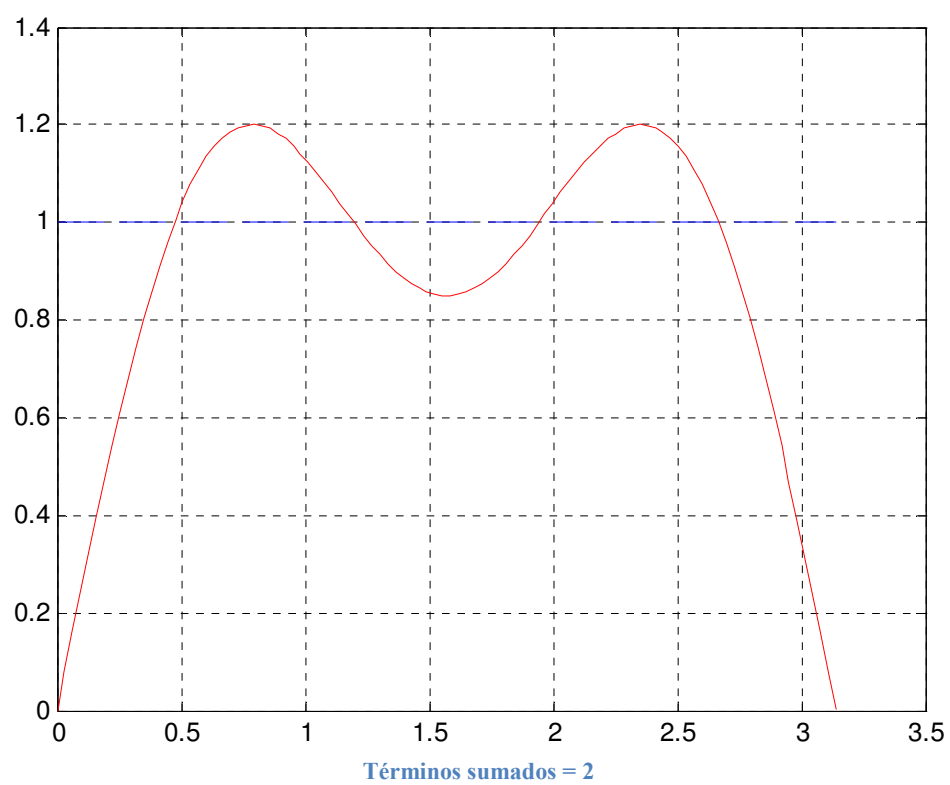
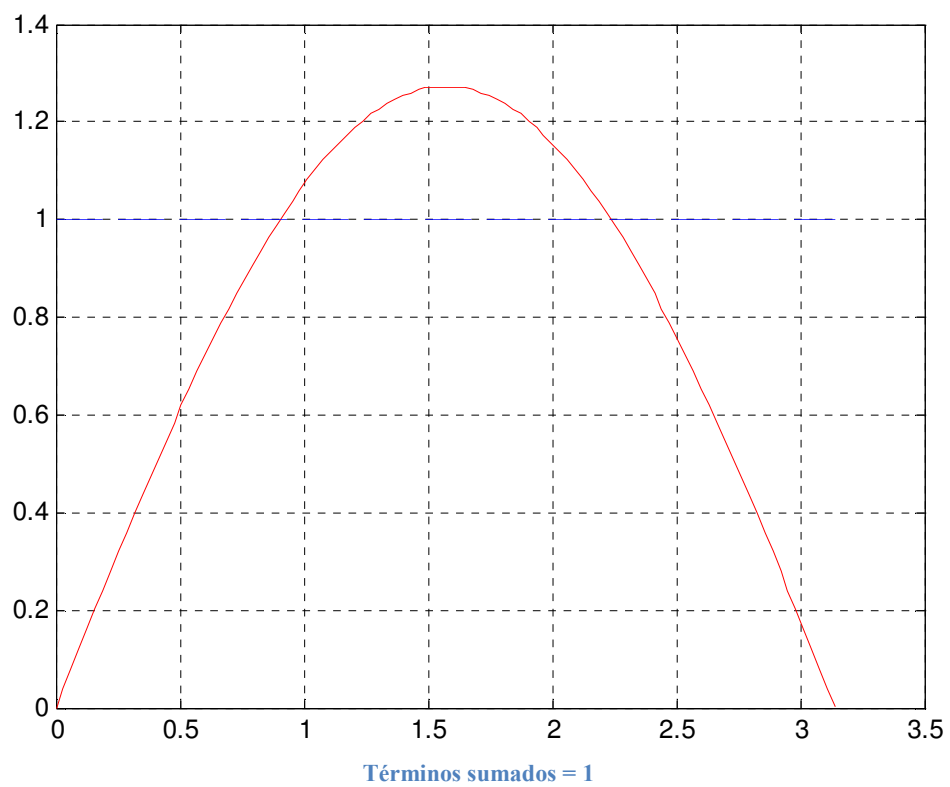


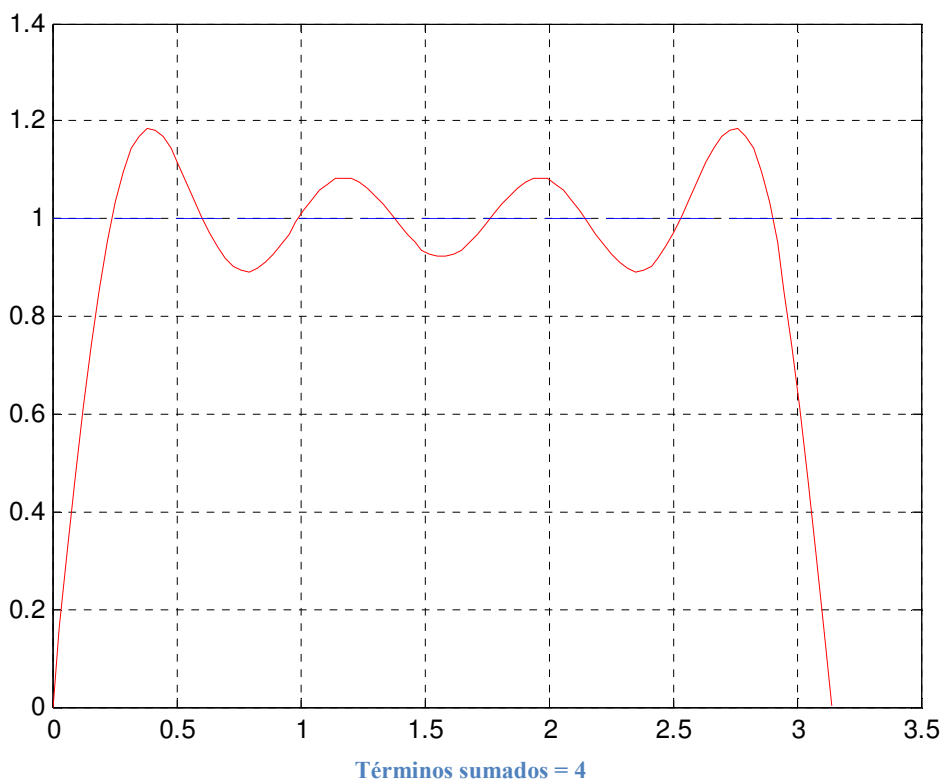
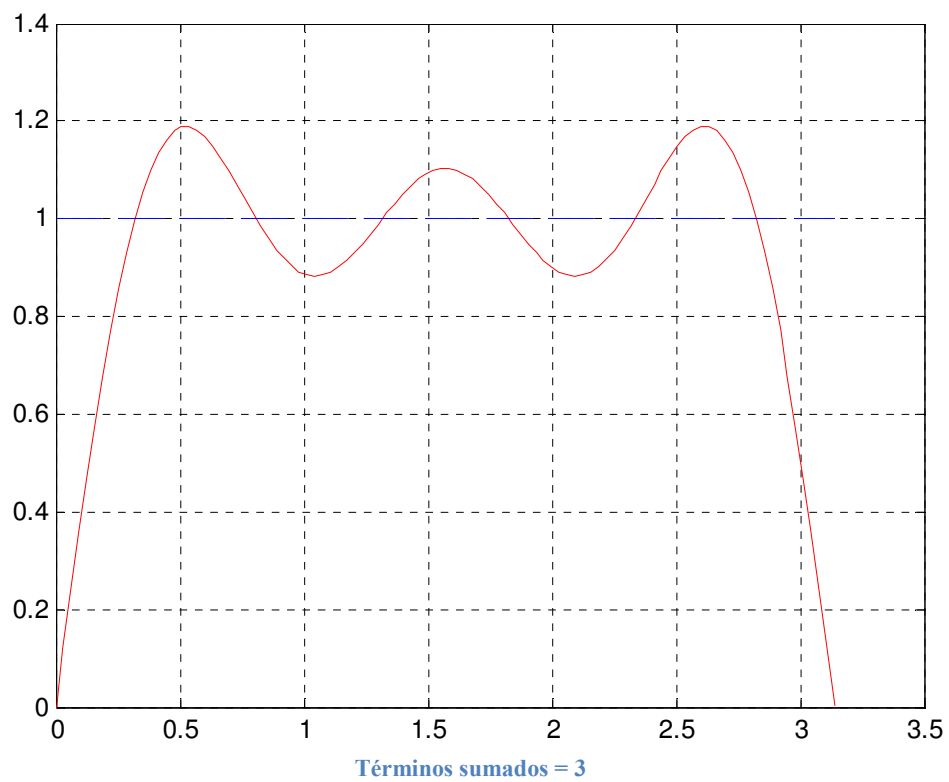


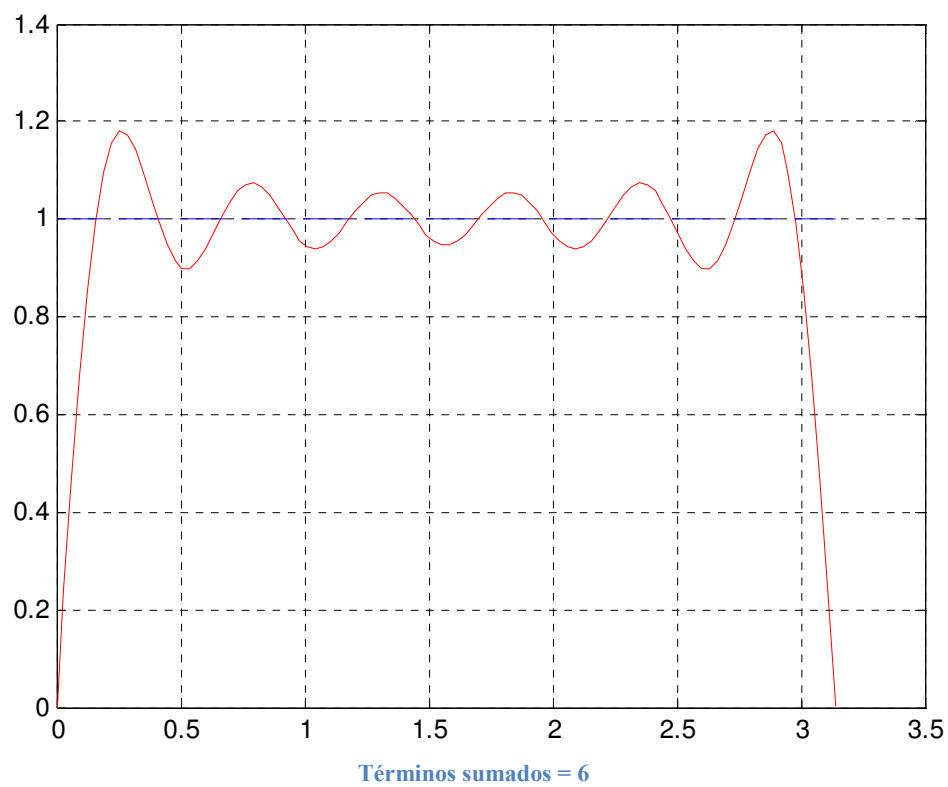
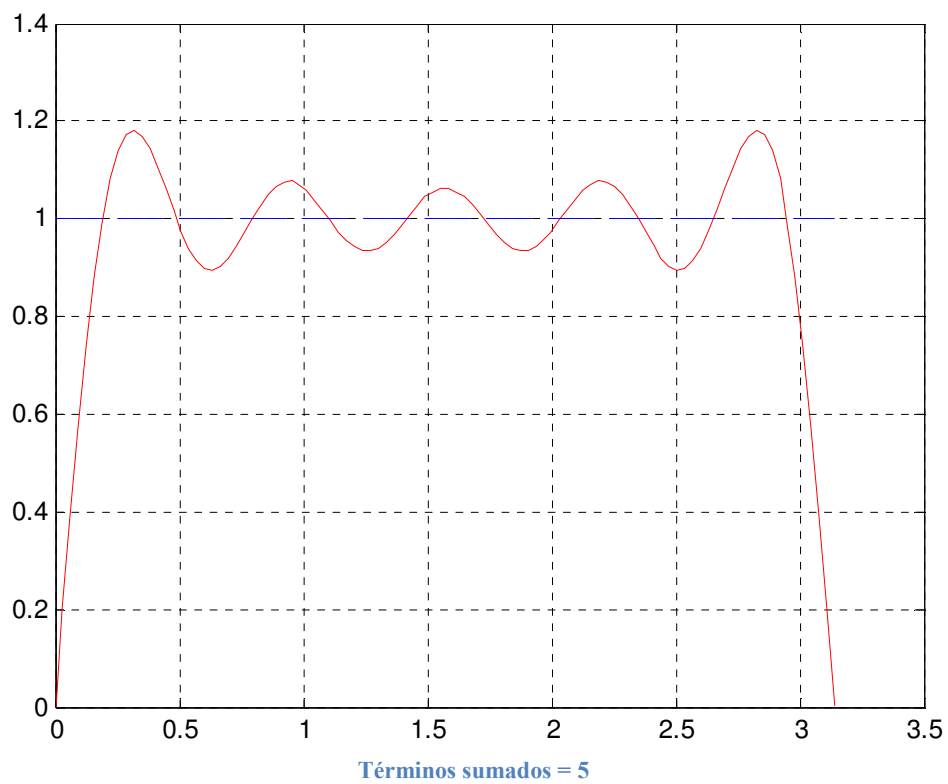


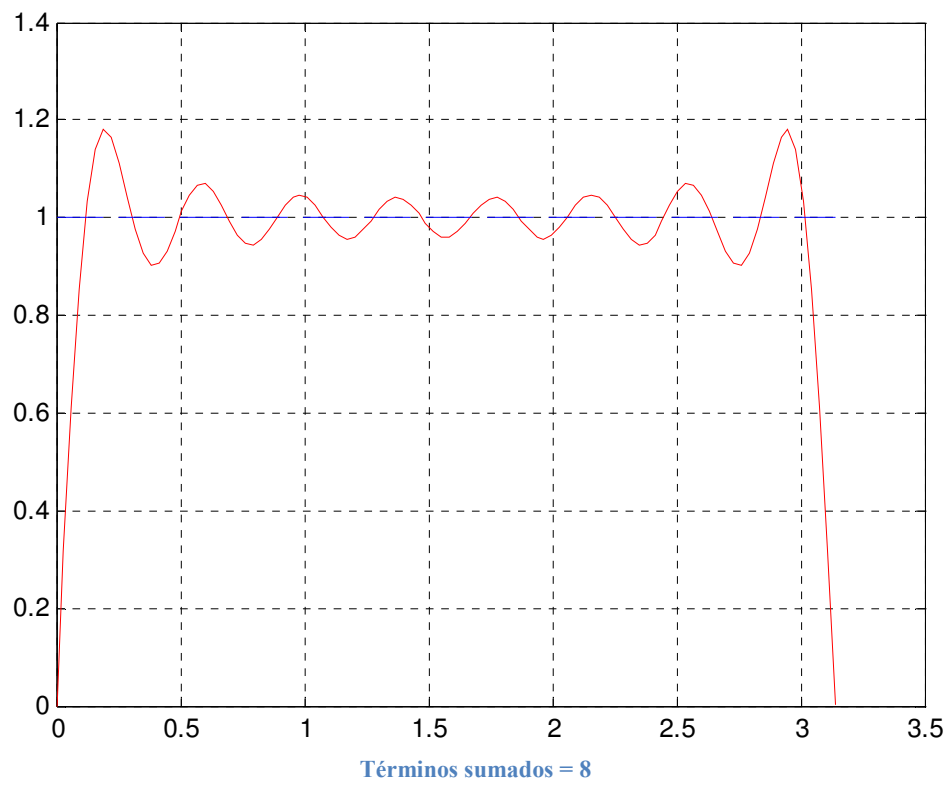
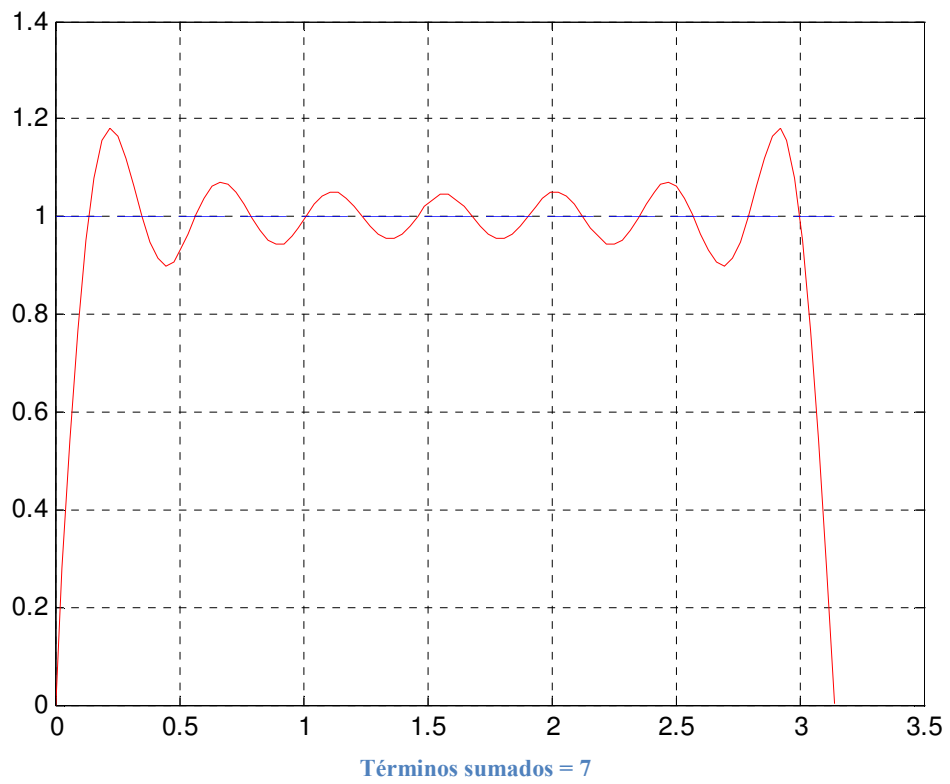
Es muy claro que la serie de Fourier no es válida fuera de su intervalo de definición, pero en este caso aproxima a la función periódicamente porque la función f es periódica (Una función constante es periódica).

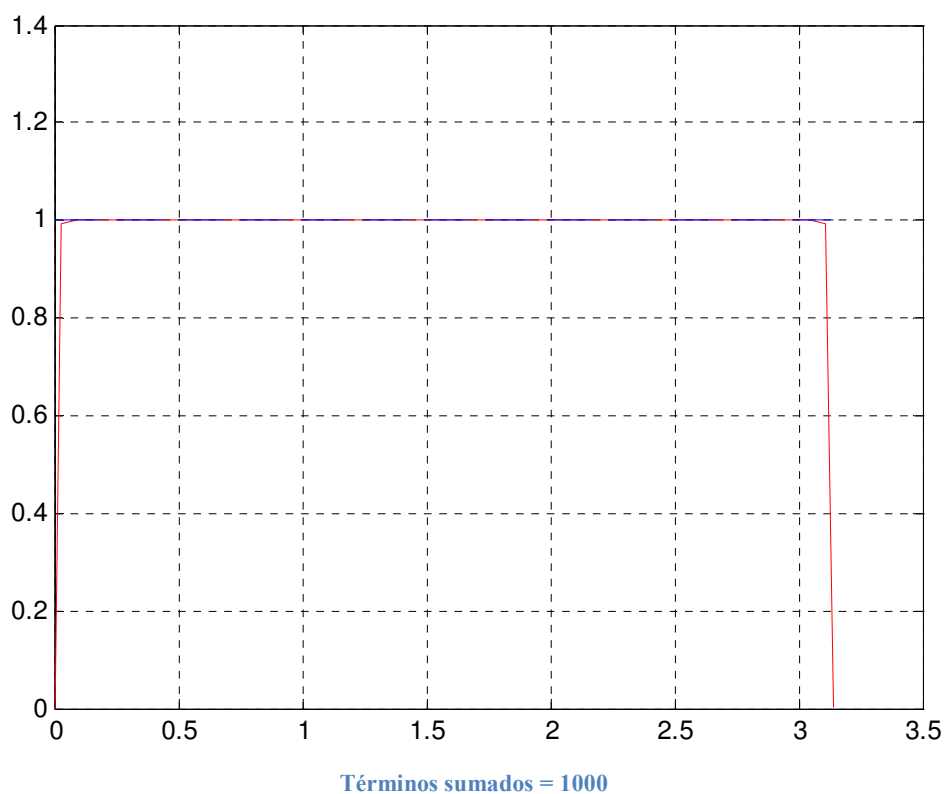
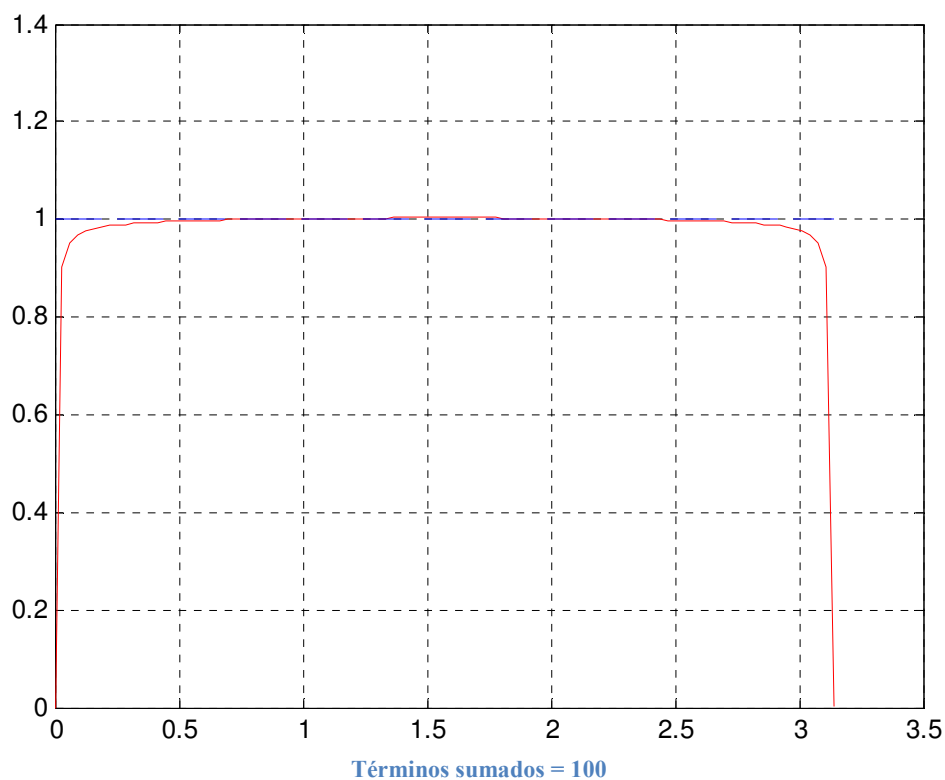
En cambio si miramos la serie en su intervalo de definición: ($[0, \pi]$)











Aquí puede verse como la serie se aproxima lentamente a la función f , dado que la serie se definió para este intervalo. Con $n = 1000$, se ve una aproximación buena, pero en los bordes, la serie y la función se separan bruscamente, lo que se debe a la adición de frecuencias parásitas producto de grandes errores numéricos arrastrados por causa de iterar muchas veces, este fenómeno se le llama efecto de Gibbs.

Tarea 2.4

Encontraremos la serie de Fourier en cosenos, de $f(x) = 1$, en $[0, \pi]$
Según lo que queremos, f debería expresarse como:

$$f(x) = 1 = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(nx) \quad x \in [0, \pi]$$

Si integramos en todo el intervalo:

$$\int_0^\pi 1 \cdot dx = \int_0^\pi a_0 dx + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \int_0^\pi \cos(nx) \Leftrightarrow \pi = a_0 \pi + 0 \Leftrightarrow \boxed{1 = a_0}$$

Obsérvese que:

$$1 = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(nx) \Leftrightarrow 0 = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(nx) \Leftrightarrow C_n = 0 \quad \forall n \geq 1$$

Luego, no es posible hallar una serie en cosenos sin desfase para una función constante.

Tarea 2.5

Encontraremos la serie de Fourier en senos, de $f(x) = \cos(x)$, en $[0, \pi]$
Según lo que queremos, f debería expresarse como:

$$f(x) = \cos(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin(nx) \quad x \in [0, \pi]$$

Multiplicamos todo por $\sin(mx)$

$$\cos(x) \sin(mx) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin(nx) \sin(mx)$$

Integramos en el intervalo de definición, y haciendo lo mismo que antes se tiene que:

$$\int_0^\pi \sin(mx) \cos(x) dx = \frac{\pi}{2} B_n$$

En el lado izquierdo:

Podemos usar la identidad trigonométrica siguiente:

$$\sin(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta))$$

Así

$$\int_0^{\pi} \text{sen}(mx) \cos(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\text{sen}(mx+x) + \text{sen}(mx-m)] dx$$

$$\int_0^{\pi} \text{sen}(mx) \cos(x) dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi} [-\text{sen}((m+1)x) - \text{sen}((m-1)x)] dx$$

$$\int_0^{\pi} \text{sen}(mx) \cos(x) dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{\cos((m+1)x)}{m+1} + \frac{\cos((m-1)x)}{m-1} \right]_0^{\pi}$$

$$\int_0^{\pi} \text{sen}(mx) \cos(x) dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{(-1)^{m+1} - 1}{m+1} + \frac{(-1)^{m-1} - 1}{m-1} \right]$$

$$\int_0^{\pi} \text{sen}(mx) \cos(x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{(-1)^{m+2} + 1}{m+1} + \frac{(-1)^m + 1}{m-1} \right]$$

$$\int_0^{\pi} \text{sen}(mx) \cos(x) dx = \frac{(-1)^m + 1}{2} \left[\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m-1} \right]$$

$$\int_0^{\pi} \text{sen}(mx) \cos(x) dx = \frac{(-1)^m + 1}{2} \left[\frac{(m+1) + (m-1)}{(m+1)(m-1)} \right]$$

$$\int_0^{\pi} \text{sen}(mx) \cos(x) dx = m \left[\frac{(-1)^m + 1}{m^2 - 1} \right]$$

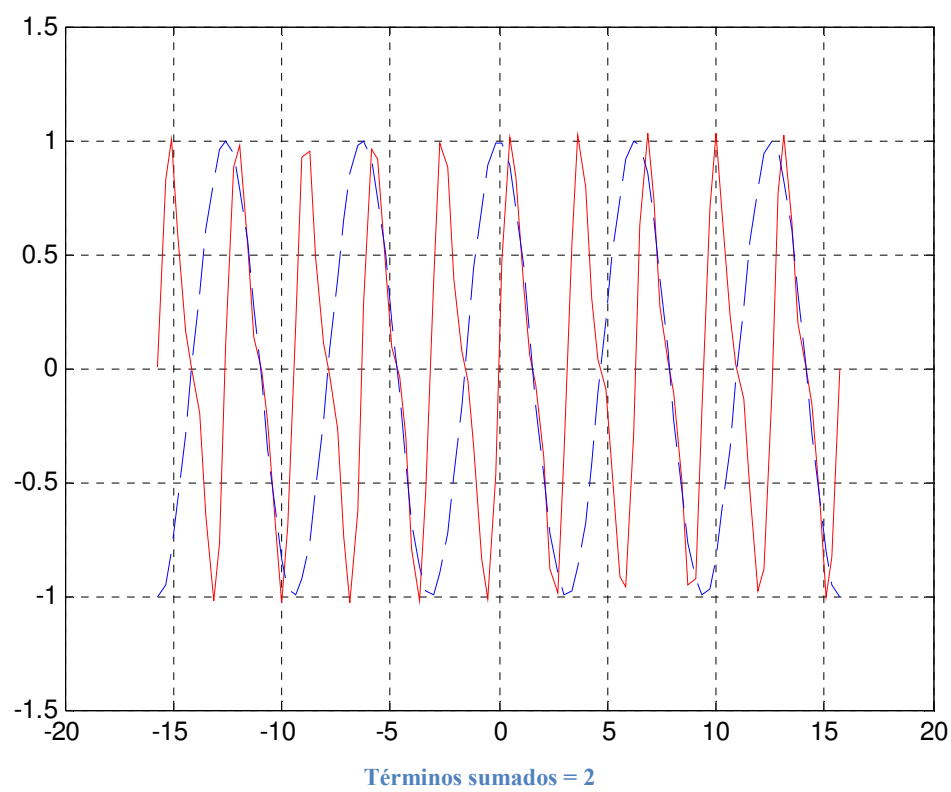
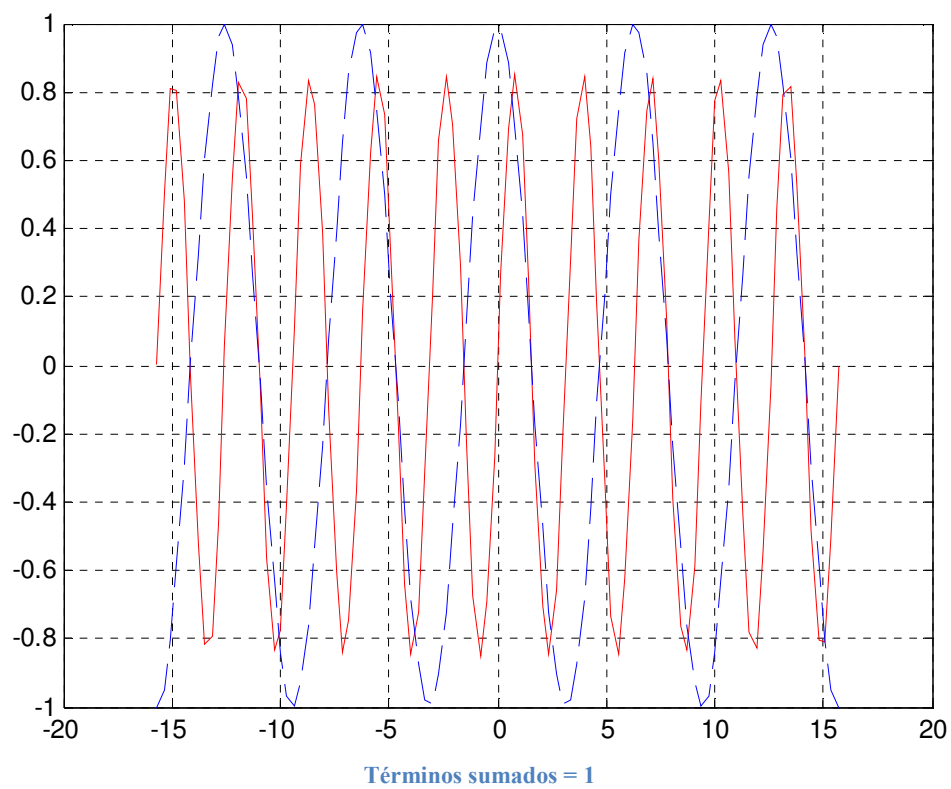
Por tanto

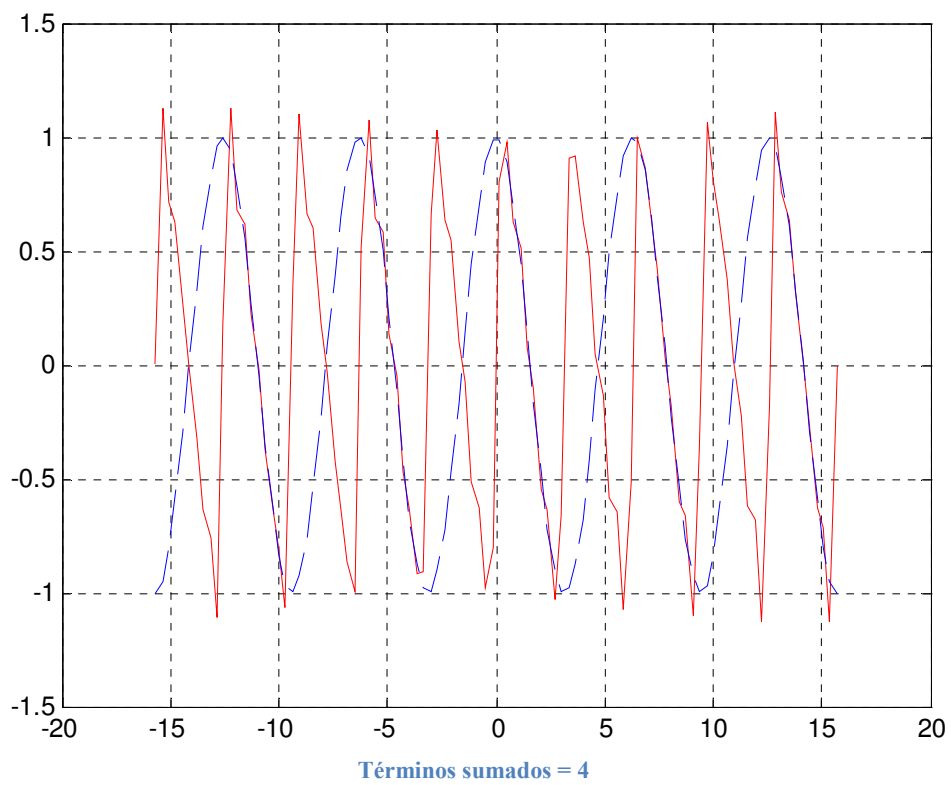
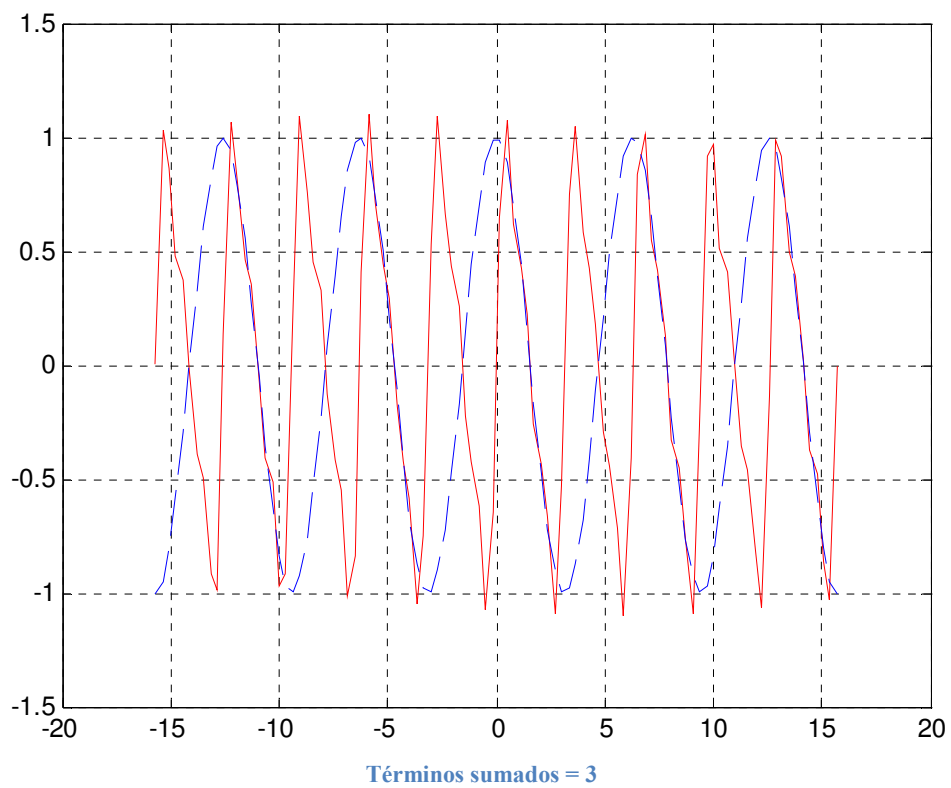
$$B_m = \frac{2m}{\pi} \left[\frac{(-1)^m + 1}{m^2 - 1} \right]$$

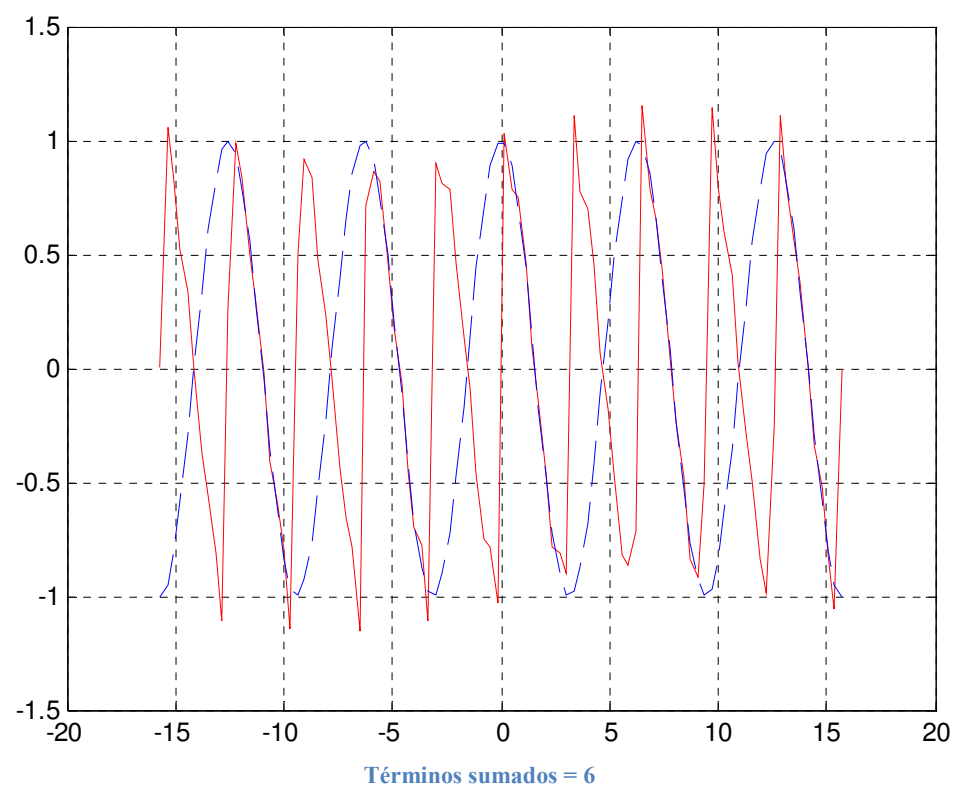
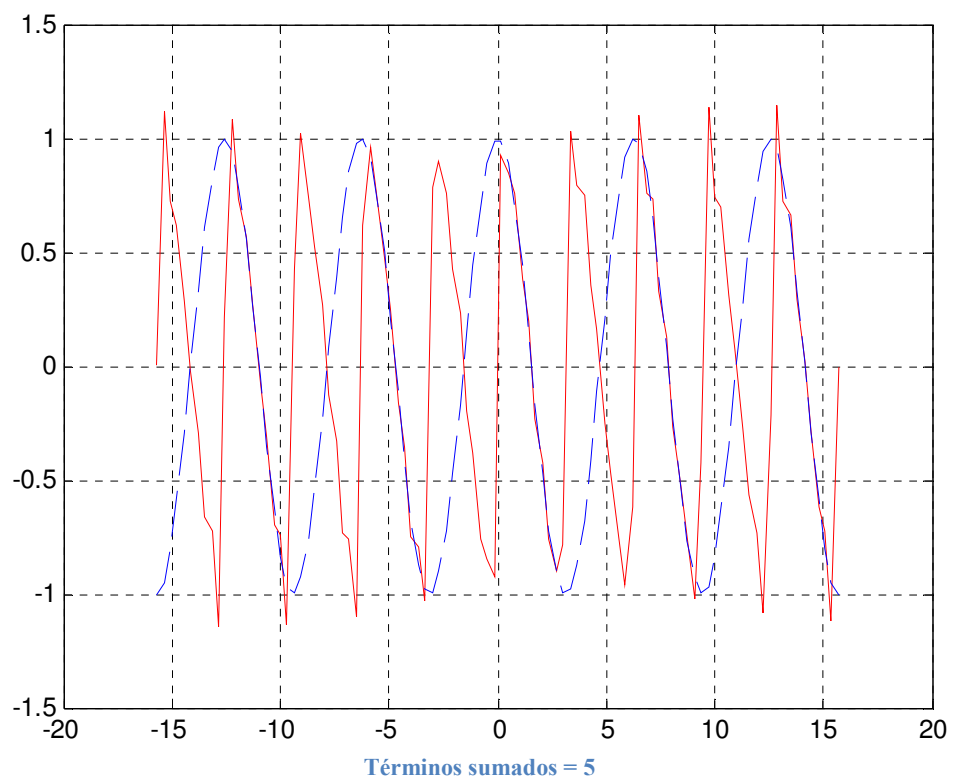
y entonces

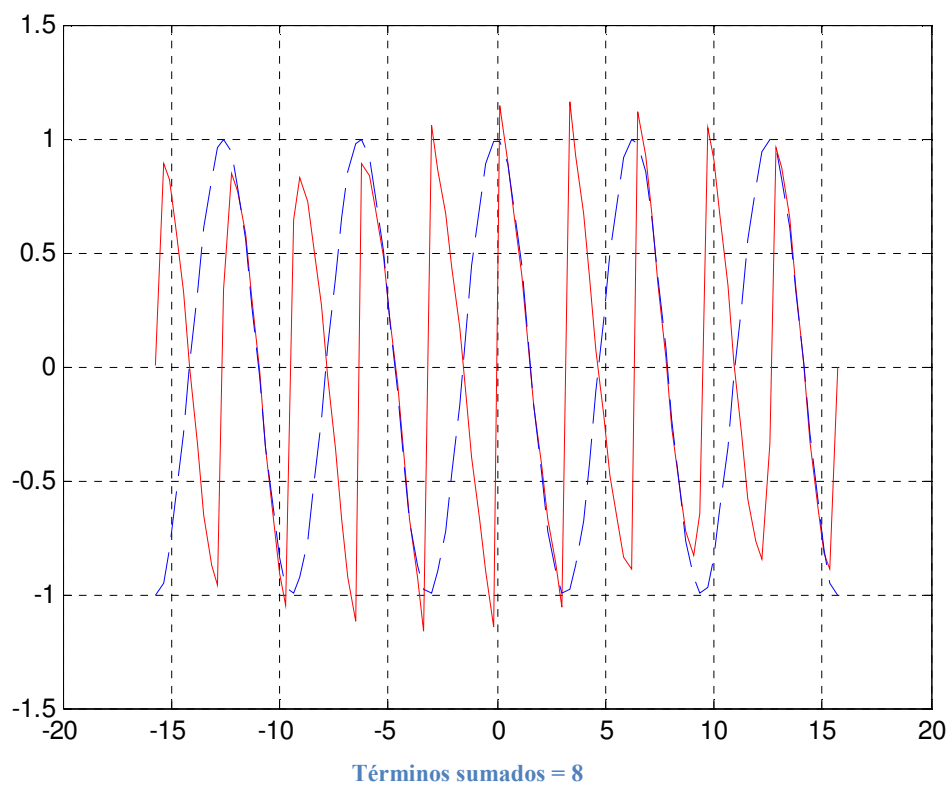
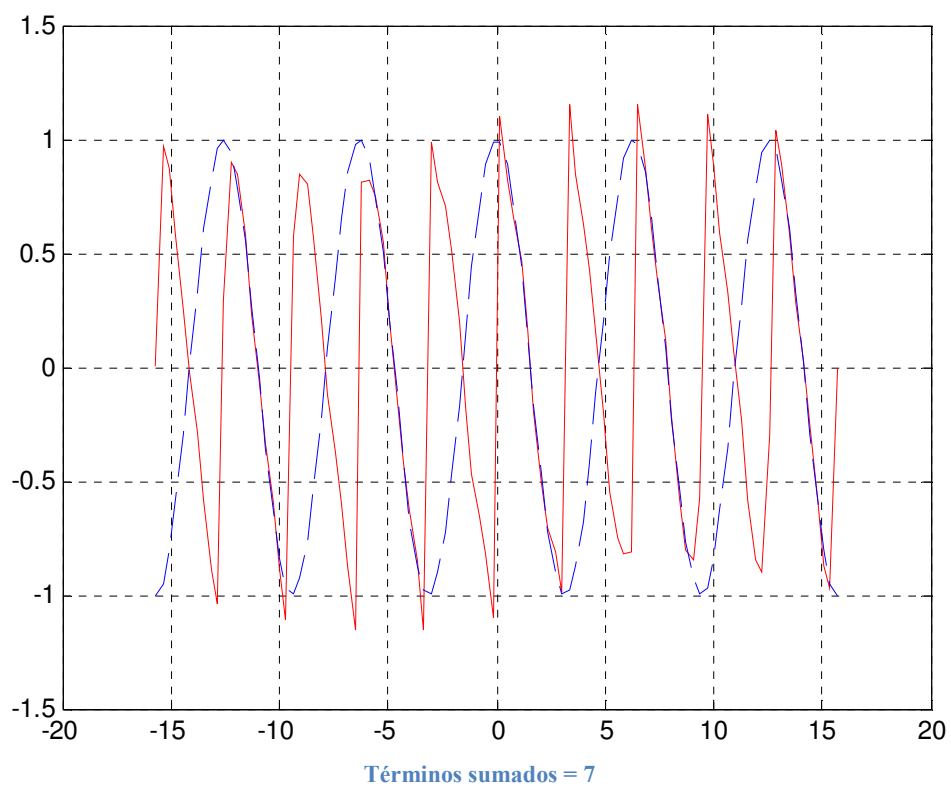
$$f(x) = \cos(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{\pi} \left[\frac{(-1)^n + 1}{n^2 - 1} \right] \text{sen}(nx) \quad x \in [0, \pi]$$

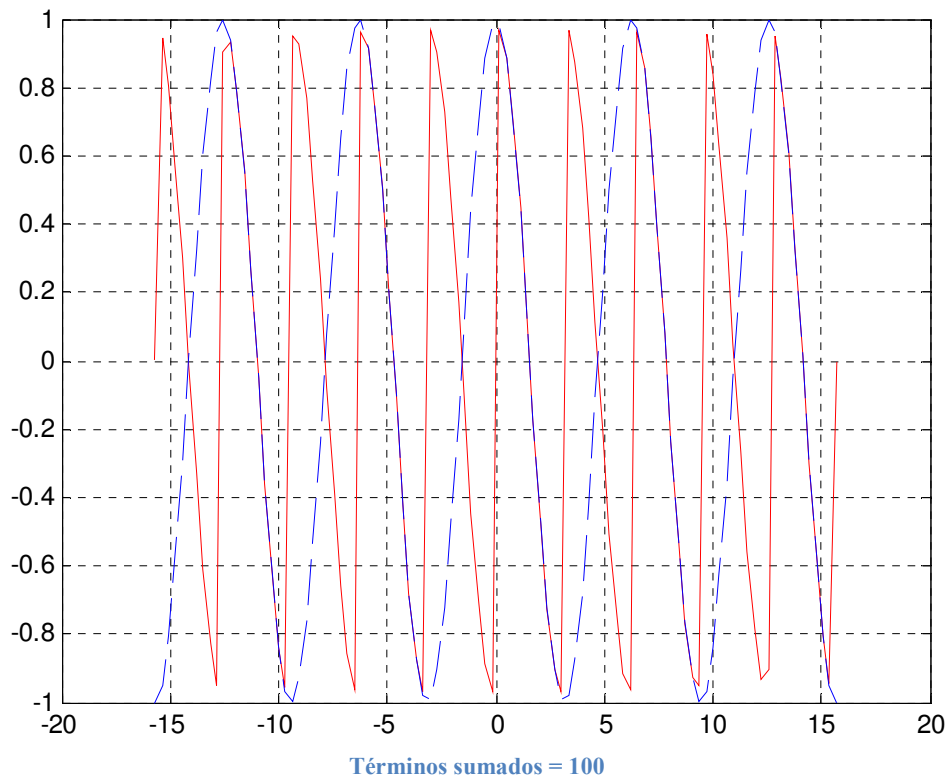
Dibujémosla en el intervalo $[-5\pi, 5\pi]$



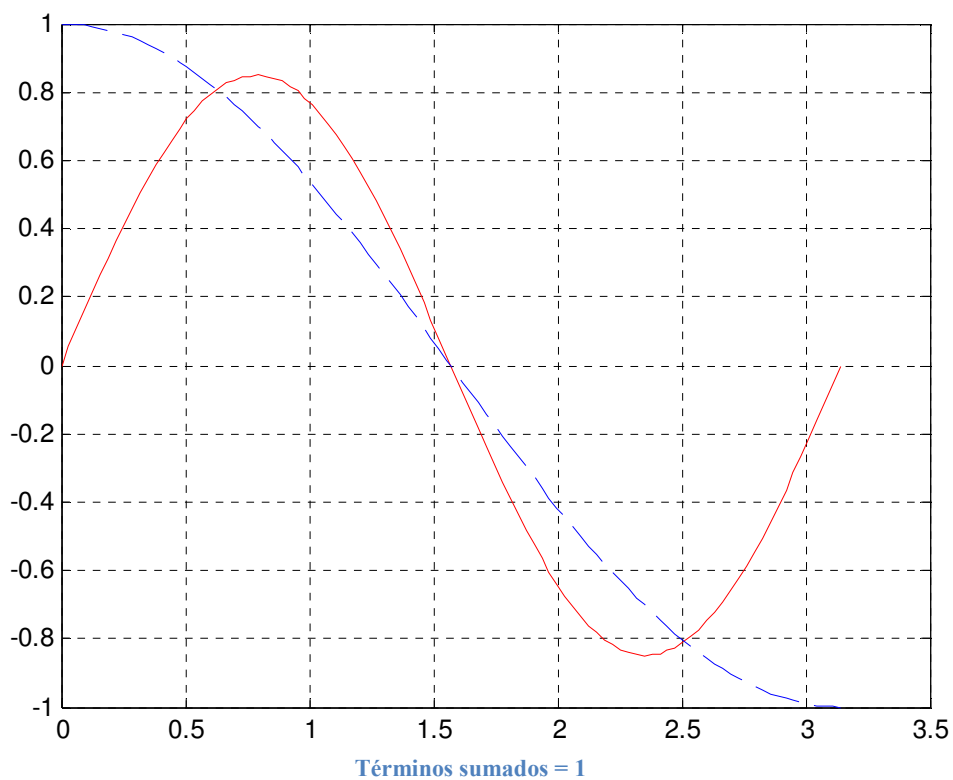


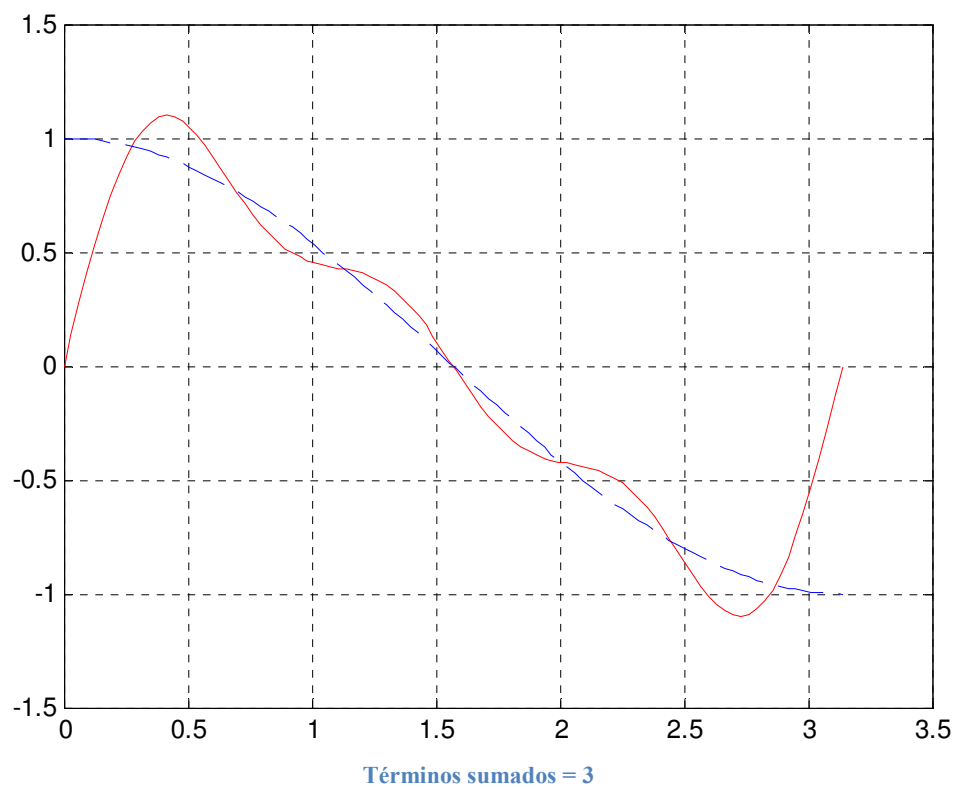
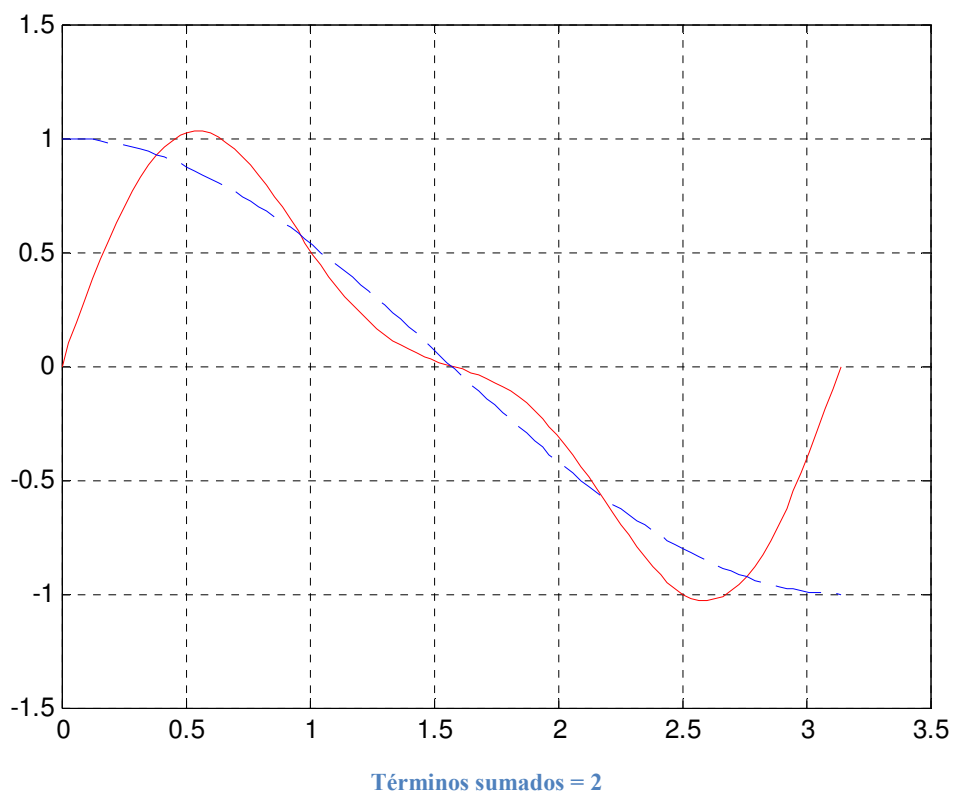


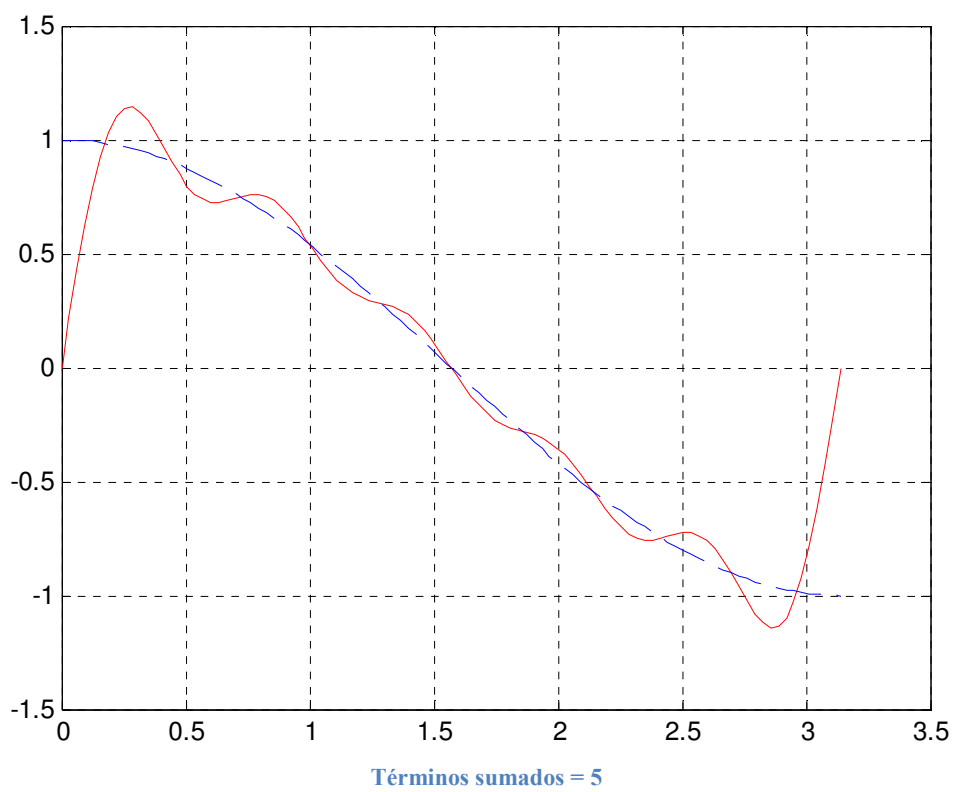
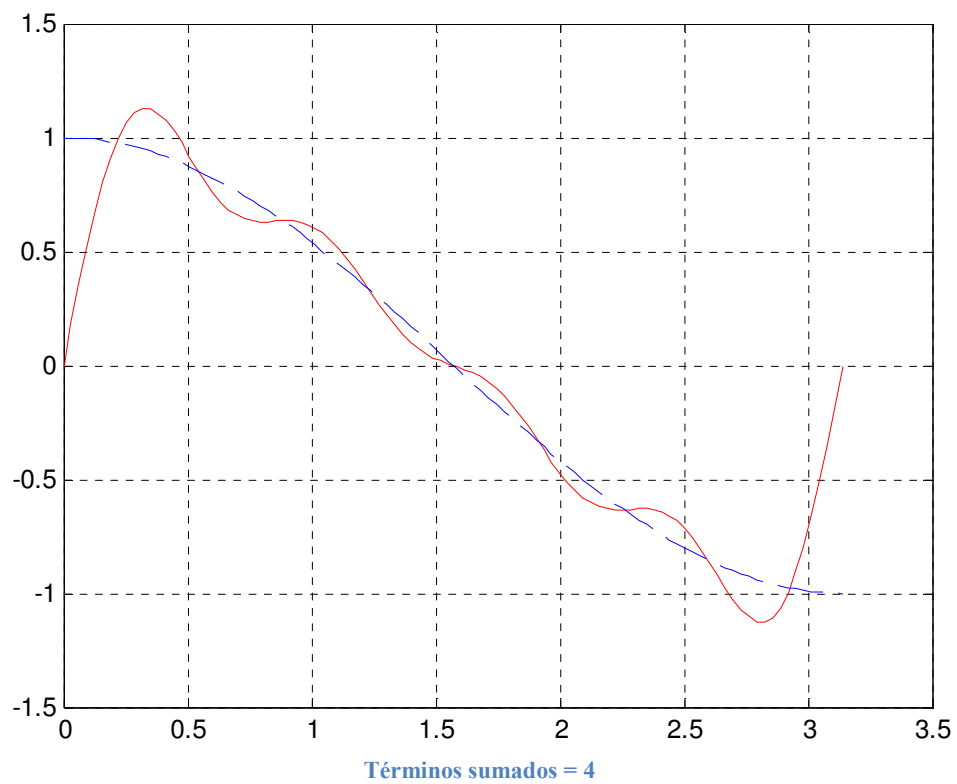


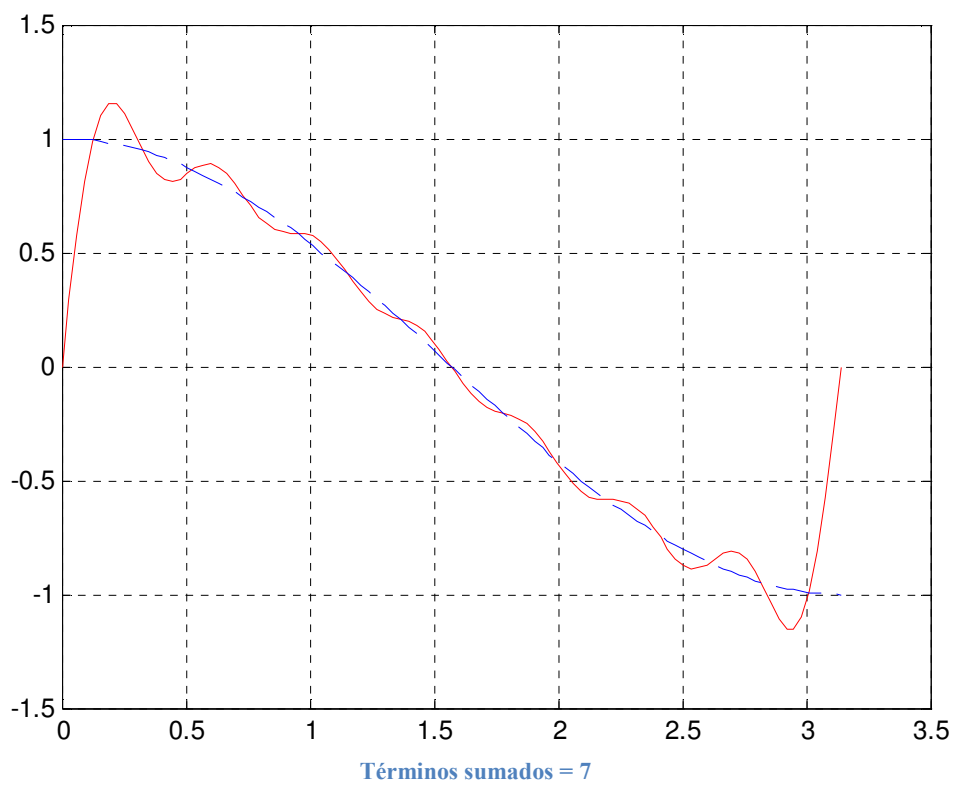
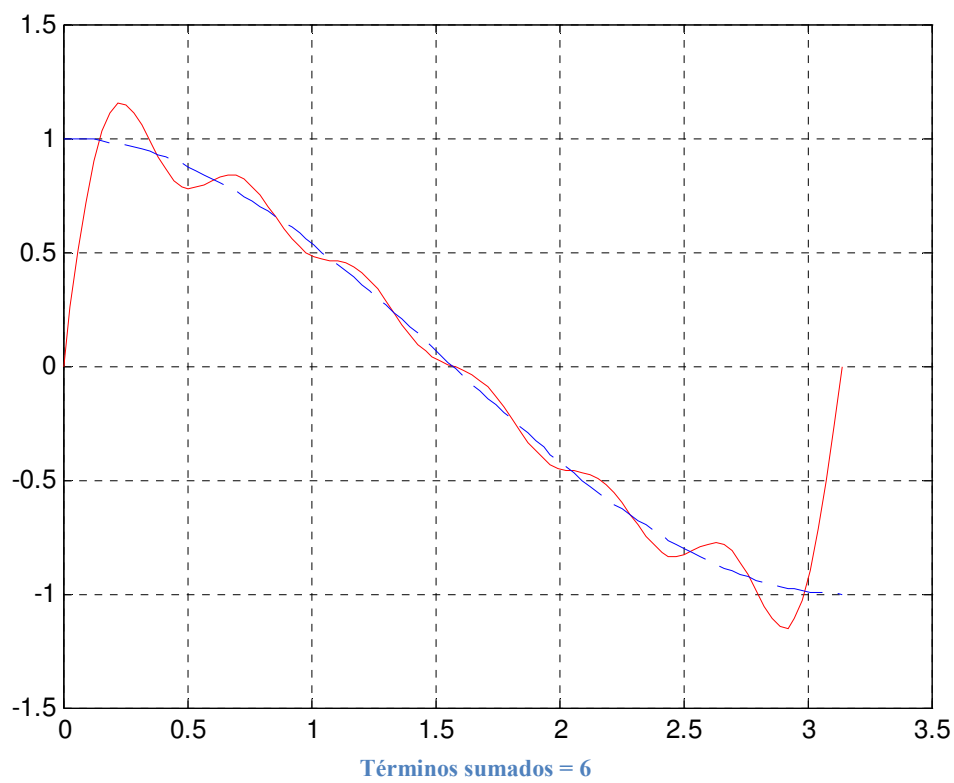


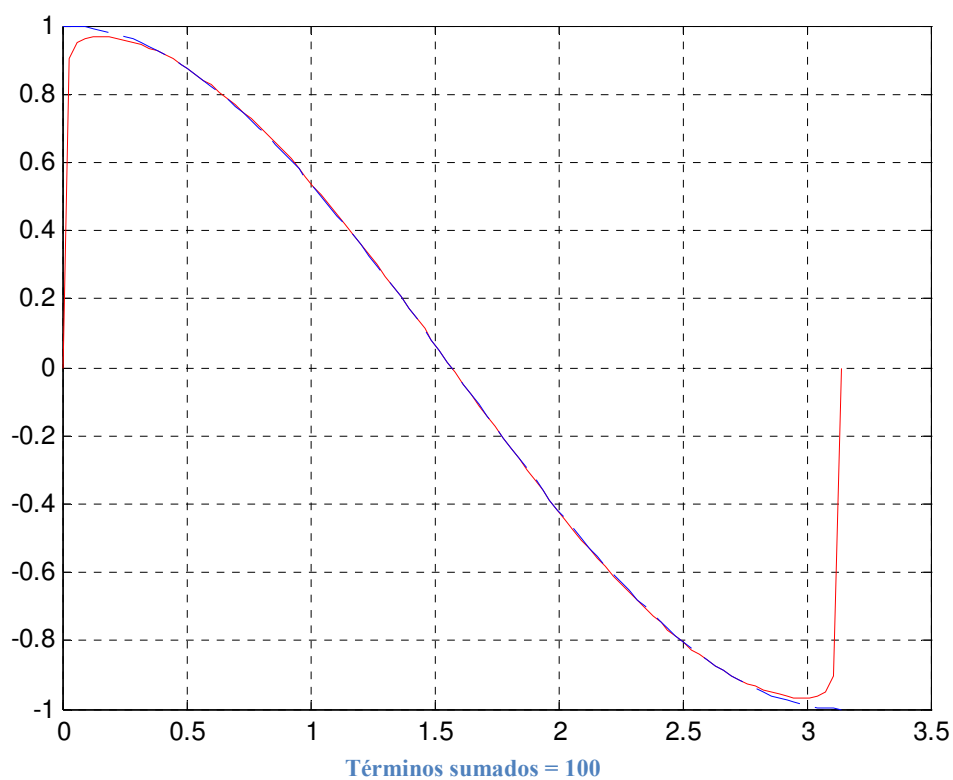
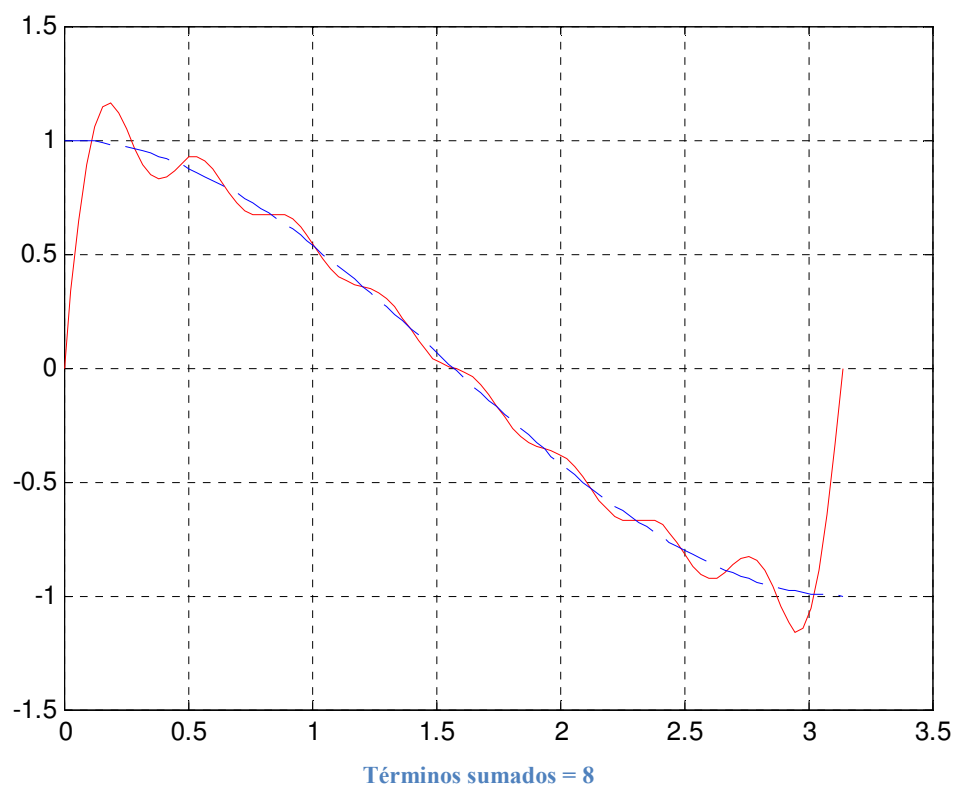
Puede observarse que la serie de Fourier sólo aproxima bien la mitad derecha de las sinusoides, esto es porque la serie de Fourier es válida en el intervalo $[0, \pi]$ y como es la función f es periódica, la serie aproxima bien la parte derechas de las sinusoides en cada periodo. Sin embargo, con $n = 100$, se obtiene una aproximación muy buena, para ello veámoslo en el intervalo $[0, \pi]$:











En el intervalo la serie de Fourier aproxima a la función relativamente lento, aunque lo hace muy bien en el interior del intervalo, en sus extremos dista de una buena aproximación, debido al fenómeno de Gibbs.

Tarea 2.6

Encontraremos la serie de Fourier en cosenos, de $f(x) = \cos(x)$, en $[0, \pi]$
Según lo que queremos, f debería expresarse como:

$$f(x) = \cos(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(nx) \quad x \in [0, \pi]$$

Si integramos en todo el intervalo:

$$\int_0^{\pi} \cos(x) \cdot dx = \int_0^{\pi} a_0 dx + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \int_0^{\pi} \cos(nx) \Leftrightarrow 0 = a_0 \pi + 0 \Leftrightarrow \boxed{0 = a_0}$$

Multiplicamos todo por $\cos(mx)$

$$\cos(mx)\cos(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(nx)\cos(mx)$$

Integramos en el intervalo de definición:

$$\int_0^{\pi} \cos(mx)\cos(x) dx = \frac{\pi}{2} C_n$$

Podemos usar la identidad trigonométrica siguiente:

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

Luego

$$\int_0^{\pi} \cos(mx)\cos(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos((m-1)x) - \cos((m+1)x)] dx$$

Si $m = 1$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos(mx)\cos(x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [1 - \cos(2x)] dx \\ \int_0^{\pi} \cos(mx)\cos(x) dx &= \frac{1}{2} \left[\pi - \frac{\sin(2x)}{2} \right]_0^{\pi} \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} \cos(mx)\cos(x) dx = \frac{\pi}{2}$$

Por tanto

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} C_1 \Leftrightarrow \boxed{1 = C_1}$$

Si $m > 1$

$$\int_0^{\pi} \cos(mx) \cos(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos((m-1)x) - \cos((m+1)x)] dx$$

$$\int_0^{\pi} \cos(mx) \cos(x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((m-1)x)}{m-1} - \frac{\sin((m+1)x)}{m+1} \right]_0^{\pi}$$

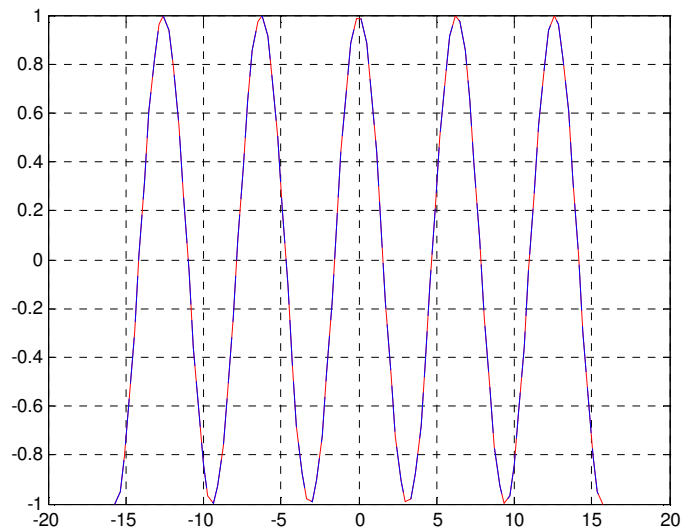
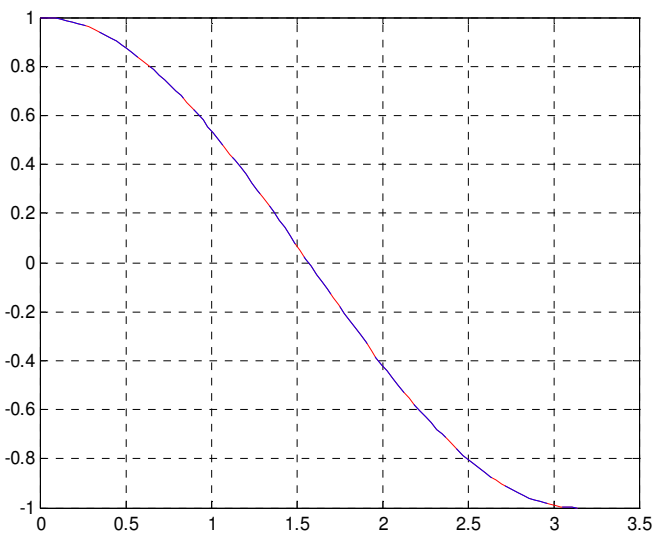
$$\int_0^{\pi} \cos(mx) \cos(x) dx = 0$$

y entonces

$$0 = \frac{\pi}{2} C_n \Leftrightarrow \boxed{0 = C_n \quad \forall n \geq 2}$$

$$f(x) = \cos(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(nx) = \cos(x) \quad x \in [0, \pi]$$

La serie de Fourier en cosenos de la función coseno, es un problema trivial, la serie es exactamente igual a la función.



En los gráficos puede verse que la serie de Fourier y la función f coinciden en todos los puntos, no sólo en su intervalo de definición.

Tarea 2.7

La peineta de Dirac (o Shah) se define como:

$$\delta_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nT) \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}, \text{ y periodo } T$$

recordemos que la serie de Fourier de una función f , periódica, de periodo T , es:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_n e^{\frac{2\pi i n x}{T}}$$

donde los coeficientes están dados por:

$$F_n = \frac{1}{T} \int_T f(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{T}} dx$$

Si calculamos directamente los coeficientes de la peineta obtenemos que:

$$F_n = \frac{1}{T} \int_T \delta_T(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{T}} dx$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_u^{u+T} \delta_T(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{T}} dx$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{T}} dx$$

$$F_n = \frac{1}{T} e^{-\frac{2\pi i n \cdot 0}{T}}$$

$$\boxed{F_n = \frac{1}{T}}$$

donde hemos usado la propiedad siguiente de la delta de dirac:

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x) h(x) dx = h(0)$$

Luego

$$\delta_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} e^{\frac{2\pi i n x}{T}}$$

la cual podemos escribir como:

$$\delta_T(x) = \frac{1}{T} e^{\frac{2\pi i 0 x}{T}} + \frac{1}{T} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} e^{\frac{2\pi i n x}{T}}$$

$$\delta_T(x) = \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\frac{2\pi i n x}{T}} + \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{\frac{2\pi i n x}{T}}$$

$$\delta_T(x) = \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \right] + \frac{1}{T} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} \left[\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \right]}_{\text{cambiamos índice: } -n \text{ por } n}$$

$$\delta_T(x) = \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \right] + \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\cos\left(-\frac{2\pi n x}{T}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi n x}{T}\right) \right]$$

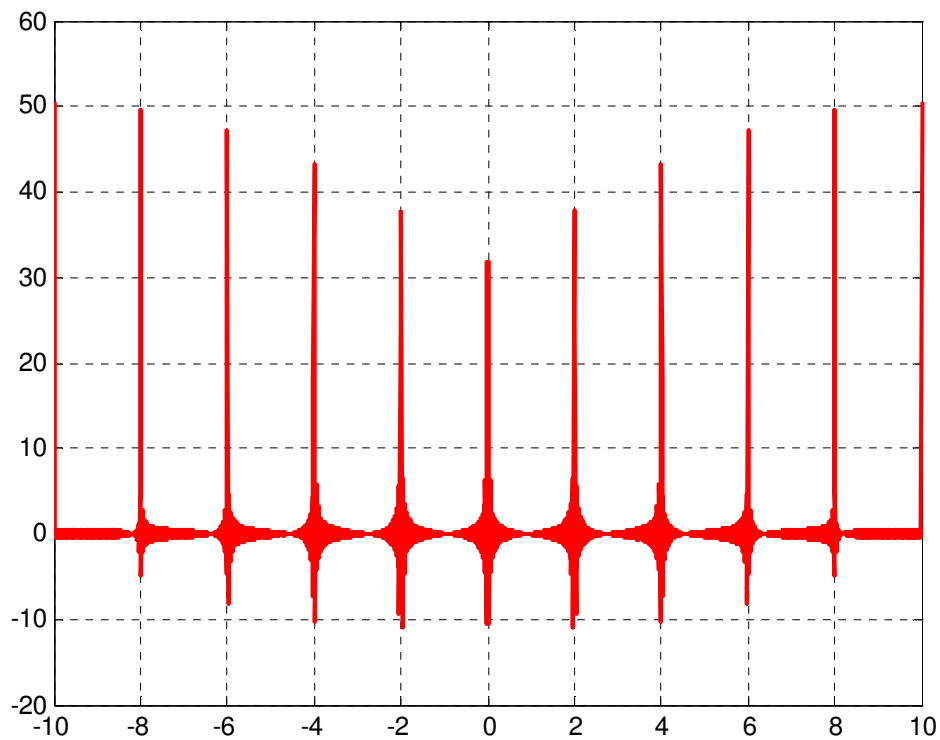
usando la paridad de las funciones trigonométricas:

$$\delta_T(x) = \frac{1}{T} + \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \right] + \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) - i \operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi n x}{T}\right) \right]$$

con lo cual

$$\delta_T(x) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)$$

Notemos que la serie de Fourier obtenida, es en cosenos. Veamos su gráfica:



Aproximación de la distribución de Dirac, de Periodo 2, con 50 términos sumados

Tarea 2.8

Si la peineta de Dirac tiene representación en serie de Fourier en senos, debería poder expresarse como:

$$\delta_T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

Utilizando el procedimiento hecho en todos los problemas anteriores, se obtiene que:

$$B_n = \frac{2}{T} \int_T \delta_T(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_u^{u+T} \delta_T(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx$$

$$B_n = \frac{2}{T} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi \cdot 0}{T}\right)$$

$$B_n = 0$$

Luego, la peineta de Dirac no admite serie de Fourier en senos (sin desfase).

Tarea 2.9

La serie en cosenos ya fue encontrada en la tarea 2.7, y su expresión es

$$\delta_T(x) = \frac{1}{T} + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right)$$

La serie de Fourier en un intervalo fijo, admite una única descomposición ya sea en senos o cosenos.

Tarea 2.10

Consideremos una puerta continua y periódica, de la siguiente forma:

$$P(x) = \begin{cases} A, & x \in \left[-\frac{\tau}{2} + kT, \frac{\tau}{2} + kT\right] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Con:

$A > 0$: La amplitud de la puerta

$\tau > 0$: Es el ancho de la puerta

$T > 0$: Es el periodo

Luego los coeficientes de la serie de Fourier son:

$$F_n = \frac{1}{T} \int_T P(x) e^{-\frac{2\pi i n x}{T}} dx$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2} + kT}^{\frac{\tau}{2} + kT} A e^{-\frac{2\pi i n x}{T}} dx$$

$$F_n = \frac{A}{T} \int_{-\frac{\tau}{2} + kT}^{\frac{\tau}{2} + kT} e^{-\frac{2\pi i n x}{T}} dx$$

$$F_n = -\frac{A}{T} \frac{T}{2\pi i n} e^{-\frac{2\pi i n x}{T}} \Big|_{-\frac{\tau}{2} + kT}^{\frac{\tau}{2} + kT}$$

$$F_n = -\frac{A}{2\pi i n} \left(e^{\frac{-2\pi i n (\frac{\tau}{2} + kT)}{T}} - e^{\frac{-2\pi i n (-\frac{\tau}{2} + kT)}{T}} \right)$$

$$F_n = -\frac{A}{2\pi i n} \left(e^{-\frac{\pi i n \tau}{T} - 2\pi i n k} - e^{\frac{\pi i n \tau}{T} - 2\pi i n k} \right)$$

$$F_n = -\frac{A}{2\pi i n} \left(e^{-\frac{\pi i n \tau}{T}} e^{-2\pi i n k} - e^{\frac{\pi i n \tau}{T}} e^{-2\pi i n k} \right)$$

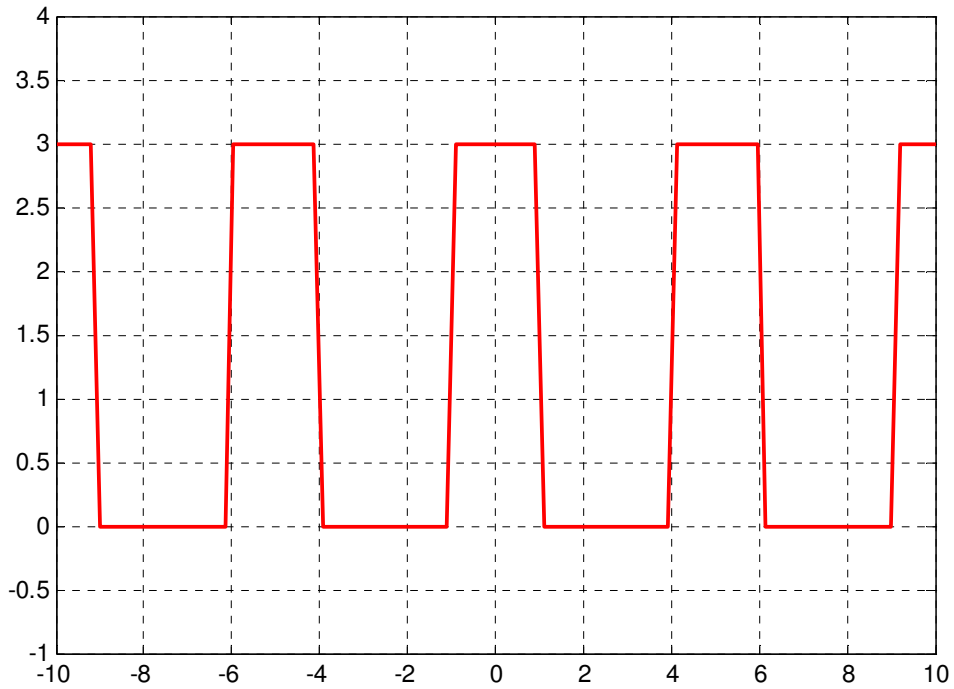
$$F_n = -\frac{A}{2\pi i n} \underbrace{e^{-2\pi i n k}}_{=1} \left(e^{-\frac{\pi i n \tau}{T}} - e^{\frac{\pi i n \tau}{T}} \right)$$

$$F_n = \frac{A}{\pi n} \left(\frac{e^{\frac{\pi i n \tau}{T}} - e^{-\frac{\pi i n \tau}{T}}}{2i} \right)$$

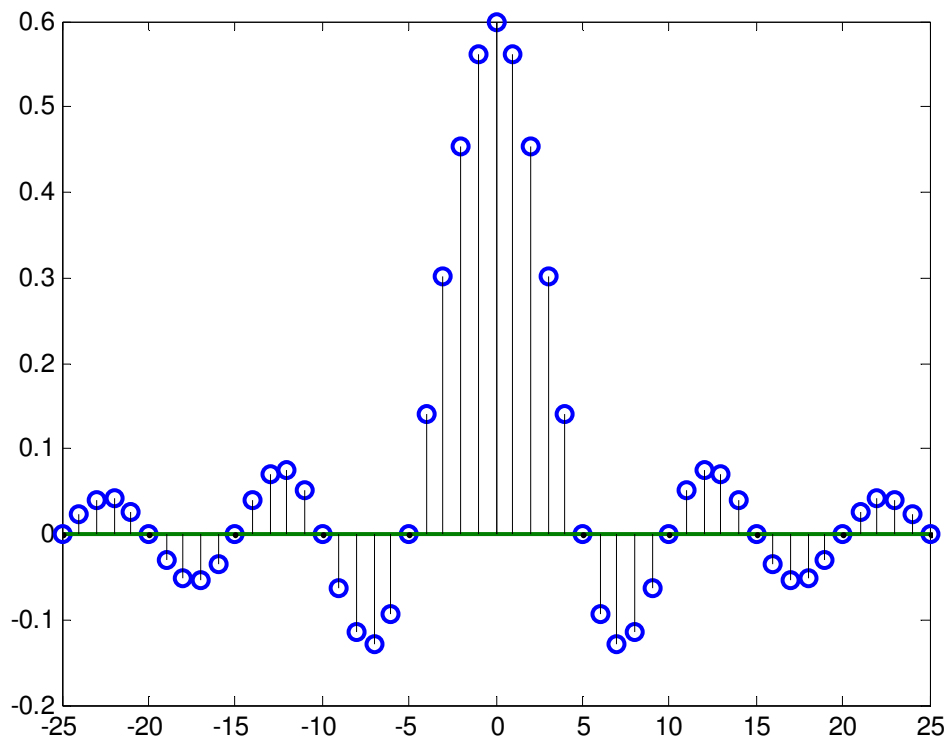
$$\boxed{F_n = \frac{A}{\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n \tau}{T}\right)}$$

Luego, la serie de Fourier es:

$$P(x) = \frac{A}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n \tau}{T}\right) e^{\frac{2\pi i n x}{T}}$$



Puertas de amplitud 3, periodo 5 y ancho 3



Espectro de Amplitud