

GEOFÍSICA DE PROSPECCIÓN I

Semestre PRIMAVERA/2007

CONTENIDOS

MÓDULO I: Introducción (~ 2.5 semanas)

MÓDULO II: Geofísica de Potencial Descriptiva (~ 1 semana)

MÓDULO III: Teoría de Potencial (~ 2 semanas)

MÓDULO IV: Modelación Directa (~ 2 semanas)

MÓDULO V: ANALISIS EN EL DOMINIO DE FRECUENCIAS (~ 2 semanas)

MÓDULO VI: PROCESO DE DATOS (~ 3 semanas)

MÓDULO VII: TEORIA DE INVERSIÓN (~ 3 semanas)

BIBLIOGRAFIA

- **BALKELEY, POTENTIAL THEORY, 2002**
- **TELFORD ET AL., APPLIED GEOPHYSICS, 2000**
- **GRANT & WEST, INTERPRETATION THEORY IN APPLIED GEOPHYSICS, 1965**
- **PARKER, GEOPHYSICAL INVERSE THEOR, 1994**
- **VOGELSANG, ENVIRONMENTAL GEOPHYSICS, 1995**
- **BURGER, EXPLORATION GEOPHYSICS OF THE SHALLOW SURFACE, 1992**
- **TURCOTTE & SHUBERT, GEODYNAMICS, 2000**
- **STÜVE, GEODYNAMICS OF THE LITHOSPHERE, 2002**
- **LOWRIE, FUNDAMENTALS OF GEOPHYSICS, 1997**

MÓDULO I.- Introducción

MODULO 1: INTRODUCCIÓN

MÉTODOS DE POTENCIAL: Conceptos Básicos

GRAVEDAD: mide la variación del campo gravitacional de la tierra, asociado a contrastes de densidad de las rocas de subsuperficie.

Aplicaciones:

- marco regional
- isostasia
- geometría de cuencas
- reconocimiento de domos salinos
- geodesia
- etc.

MÉTODOS DE POTENCIAL: Conceptos Básicos

MAGNETISMO: mide variaciones en el campo magnético terrestre, asociadas a la magnetización de las rocas en subsuperficie.

Aplicaciones:

- marco regional
- propiedades magnéticas relleno/basamento
- caracterización de arcos magmáticos
- geometría de cuencas
- etc.

GRAVEDAD: Campo Gravitacional

$$F = \frac{G M m}{R^2} \quad \text{"Ley de Gravitación Universal"}$$

Donde : $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ Kg}^{-2}$ *Cte. Gravitación Universal*

Y " F " corresponde a la atracción gravitacional entre las masas M y m separadas por una distancia R .

Si consideramos $m=1$, hablaremos del campo gravitacional ejercido por la masa M y en el caso de la tierra corresponderá a:

"g" = aceleración de gravedad

En este caso $M =$ Masa de la Tierra

$R =$ Radio de la tierra

GRAVEDAD: Potencial Gravitacional

“g” es un campo conservativo
⇒ Puede ser representado como
el gradiente de un potencial escalar.

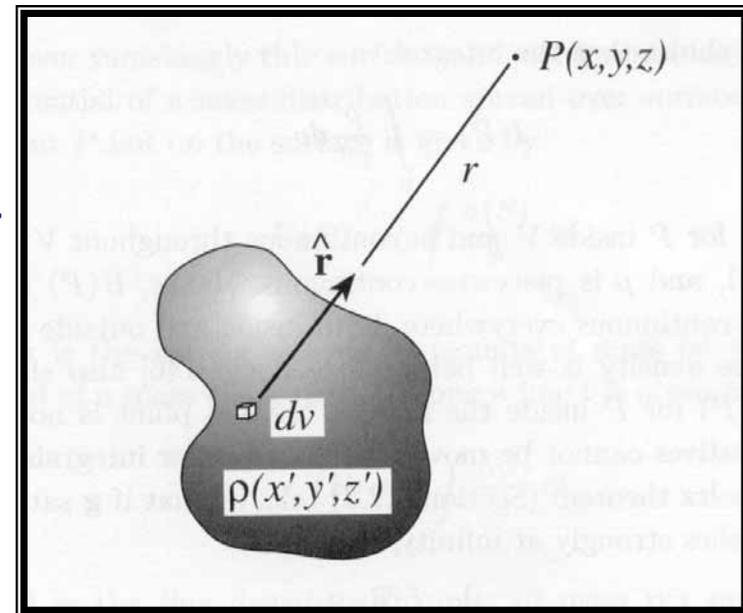
$g(P) = -\text{Grad. } U(P)$ Donde

$$U(P) = G M/R$$

En general, para una distribución
de masa (figura):

$$U(P) = G \int_V dm/r = G \int \frac{\rho(x',y',z') dv}{r}$$

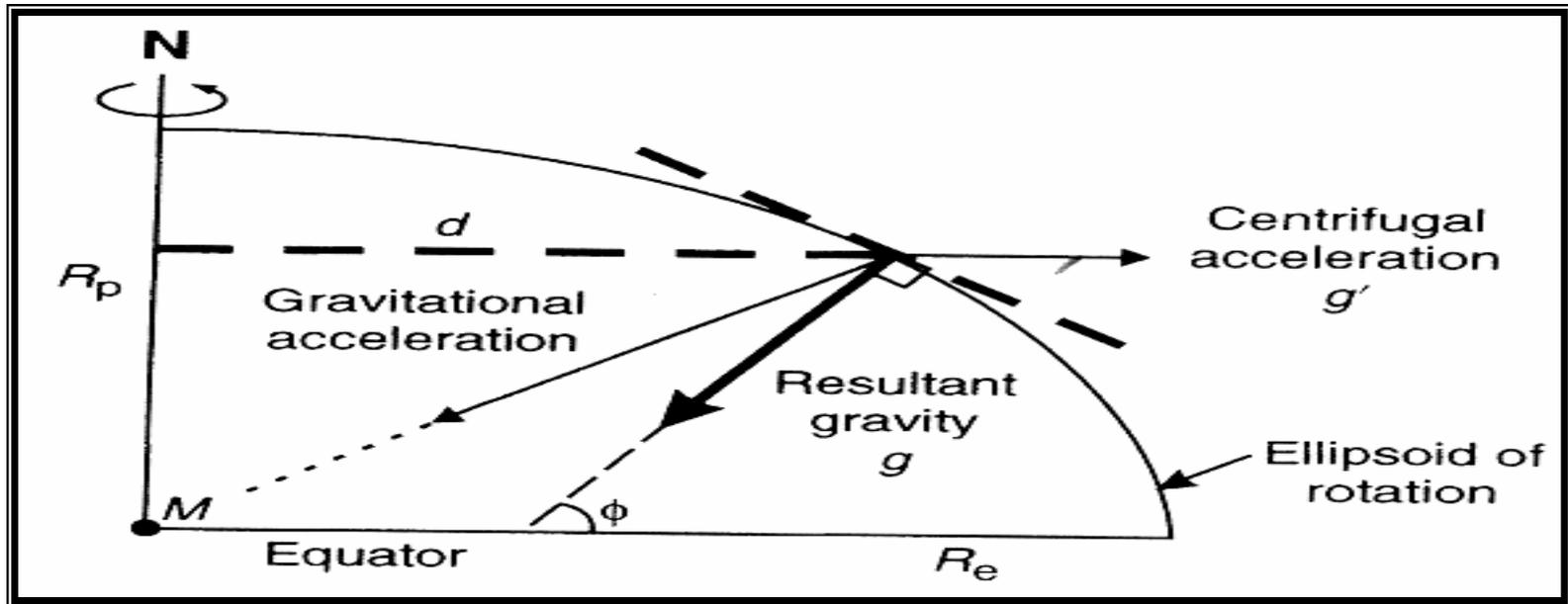
$$g(P) = -\text{Grad. } U(P) = G \int_V \frac{\rho(x',y',z') \hat{r}}{r^2} dv$$



GRAVEDAD: Conceptos Básicos

Pero la tierra no es una esfera perfecta y esta rotando

$$\Rightarrow R \neq \text{Cte.} ; M = \int \rho(x,y,z) dV ; \text{efectos dinámicos}$$



$$U = U_g + U_r \quad (U \equiv \text{Potencial Gravitacional})$$

$$U_g = \text{Potencial Propio} ; U_r = \text{Potencial Rotacional}$$

GRAVEDAD: Conceptos Básicos

Tierra "Normal" → Gravedad Teórica

$$g(\phi) = 9.78031846(1 + 0.0053024\sin^2\phi - 0.0000058\sin^2 2\phi) \text{ m/s}^2$$

1967 International Gravity Formula

$$g(\phi) = 9.7803267714 \frac{1 + 0.00193185138639\sin^2\phi}{(1 - 0.00669437999013\sin^2\phi)^{1/2}}$$

World Geodetic System 1984 (WGS84)

GRAVEDAD: Reducción de Datos

Gravedad Observada (g_{obs}) = Atracción del Elipsoide de Referencia
+ variaciones temporales (mareas, deriva instrumental)
+ efecto de elevación sobre nivel de referencia (*free-air*)
+ efecto de masa sobre nivel de referencia (*Bouguer, Terrain*)
+ efectos dinámicos (plataformas en movimiento → *Eötvös*)
+ efecto de masas asociadas a compensación isostática
+ efectos asociados a variaciones de densidad en la corteza
y manto superior ("*geología*") ✓ ✓ ✓

⇒ Debemos ser capaces de aislar el último término de esta sumatoria, descontando todos los demás efectos.

GRAVEDAD: Conceptos Básicos

Unidades

$$1 \text{ Gal} = 1 \text{ cm/s}^2$$

- La unidad más común en gravimetría es el miligal (mGal).

$$1 \text{ mGal} = 10^{-3} \text{ Gal}$$

- Un gravímetro puede medir con precisión 0.001 mGal
- Un rango común de efectos gravimétricos asociados a fenómenos geológicos, estaría entre 1 – 50 mGal.

$$(g \text{ "normal"} \sim 9.8 \text{ m/s}^2 = 980 \text{ Gal} = 980.000 \text{ mGal})$$

GRAVEDAD: Reducción de Datos

Efectos Dinámicos: Mareas y Deriva Instrumental

Mareas:

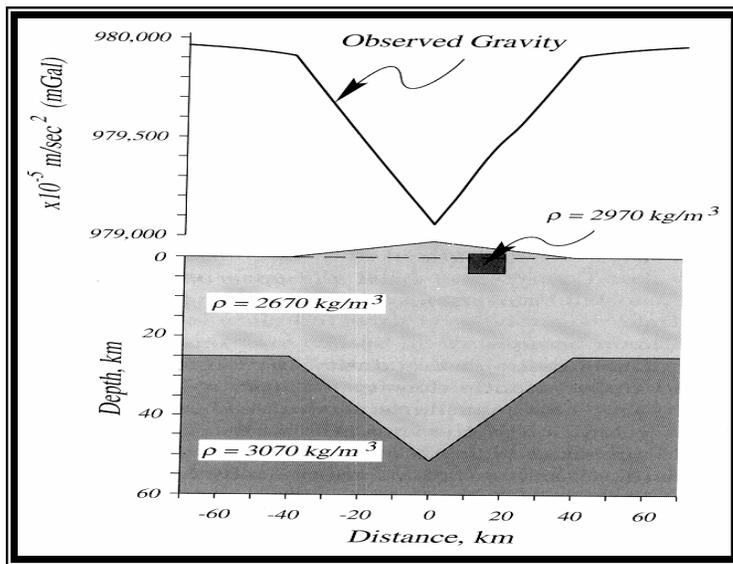
- **Dependen del tiempo y la latitud**
- **Período ~ 12 hrs.**
- **Tablas**
- **Nunca > 0.3 mGal.**
- **Aprox. Lineal en períodos cortos ~ 3 hrs.**

En primera aproximación, ambos efectos pueden ser considerados lineales y tratados en forma conjunta.

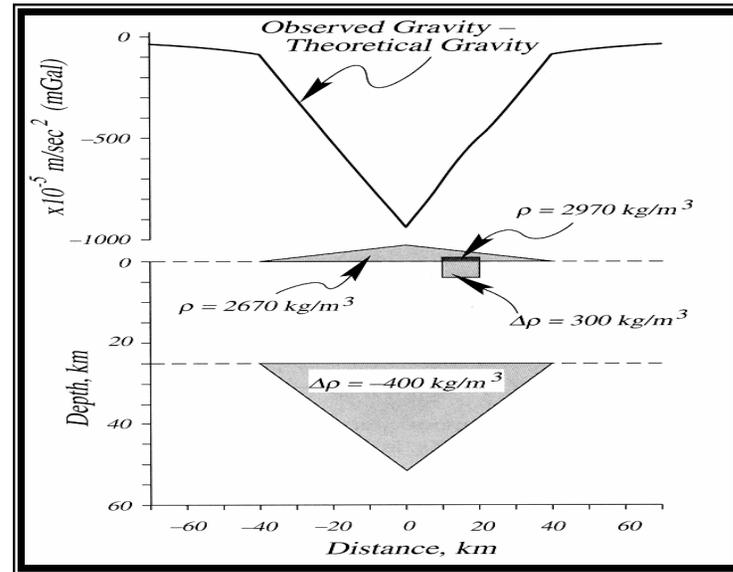
GRAVEDAD: Reducción de Datos

Atracción del Elipsoide de Referencia

Gravedad Observada



$g_{\text{obs}} - g(\phi)$



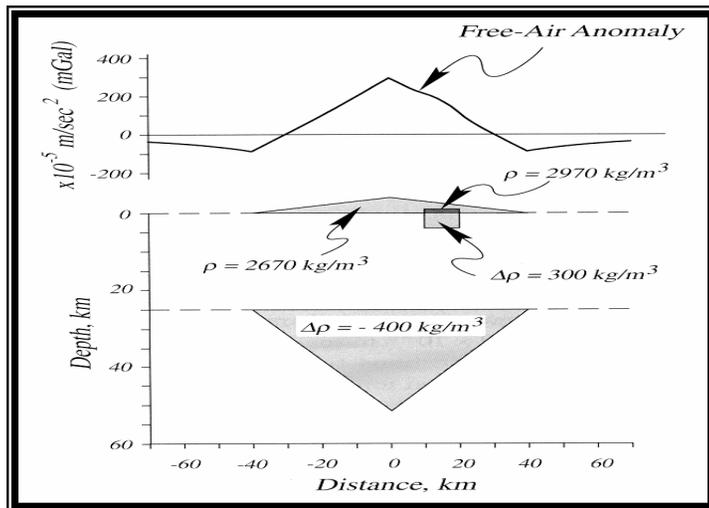
GRAVEDAD: Reducción de Datos

Corrección de Aire Libre (*"free-air"*)

$$g(r+h) = g(r) + h \partial g(r) / \partial r + \dots \quad \text{Taylor } (h \ll r)$$

$$\Rightarrow g(r) = g(r+h) - 2g(r)h/r \rightarrow \text{Corr. de Aire Libre } (g_{fa})$$

$$g_{fa} = -0.3086h \text{ [mGal]} \quad (h \text{ en metros})$$

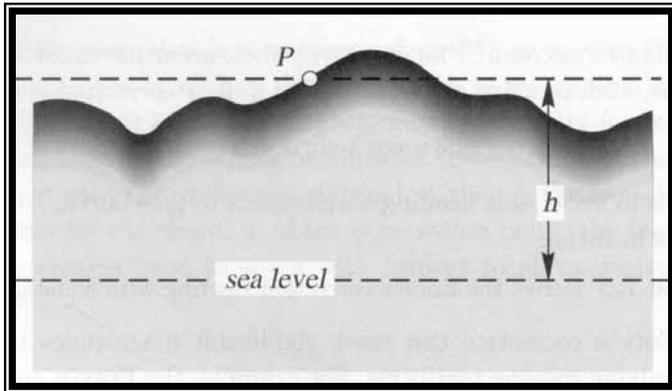


Anomalía de Aire Libre

$$\Delta g_{fa} = g_{obs} - g(\phi) - g_{fa}$$

GRAVEDAD: Reducción de Datos

Corrección de Bouguer

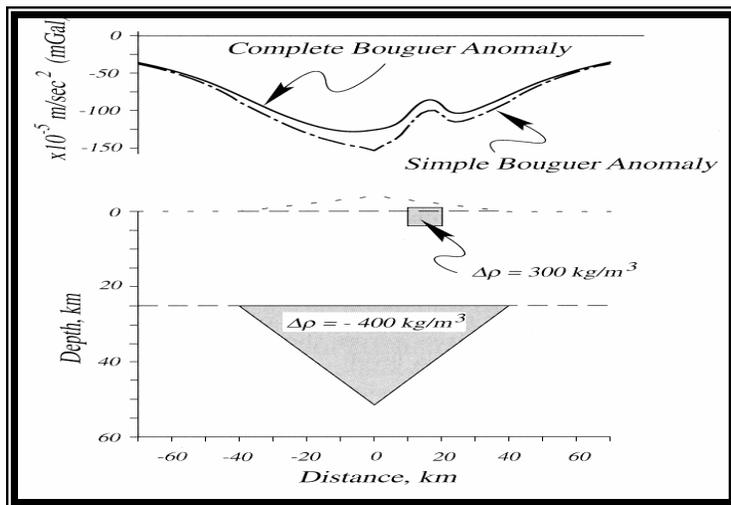


Considera "placa infinita"

$$g_{PI} = 2\pi G\rho h$$

$$g_B = 0.04193 \rho_B h \text{ [mGal]}$$

(h en metros, ρ_B en grs/cc)



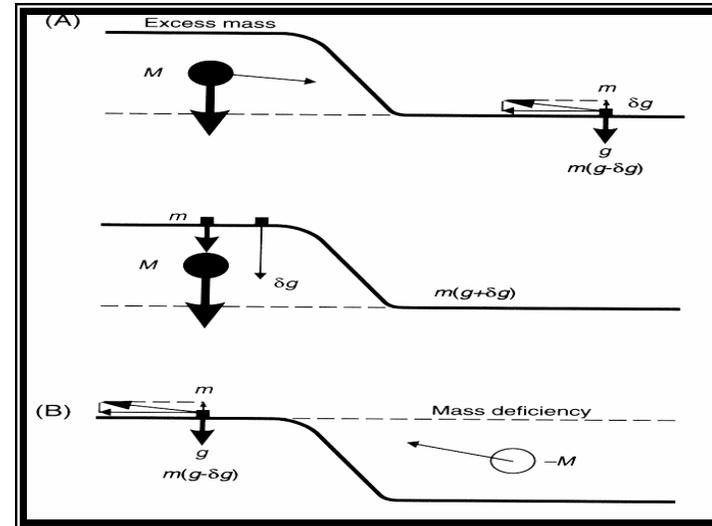
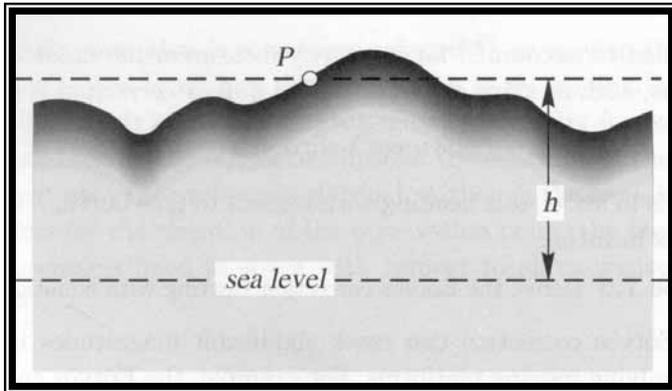
Anomalía de Bouguer (simple)

$$\Delta g_B = g_{\text{obs}} - g(\phi) - g_{\text{fa}} - g_B$$

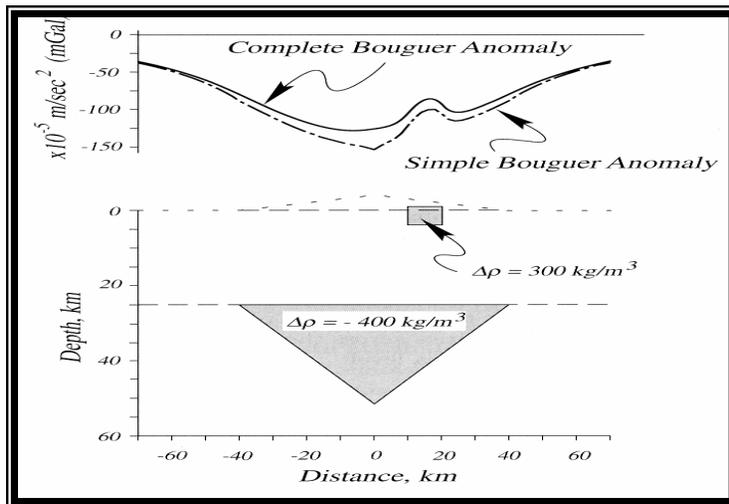
- Como estimar ρ_B ?

GRAVEDAD: Reducción de Datos

Corrección de Bouguer



Corrección Topográfica (terrain correction)

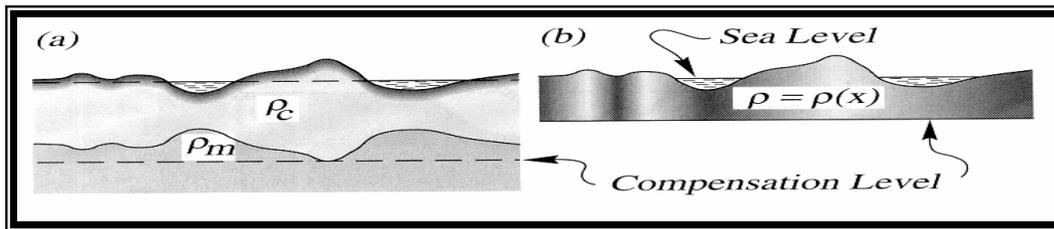


Anomalía de Bouguer (completa)

$$\Delta g_B = g_{\text{obs}} - g(\phi) - g_{\text{fa}} - g_B - g_t$$

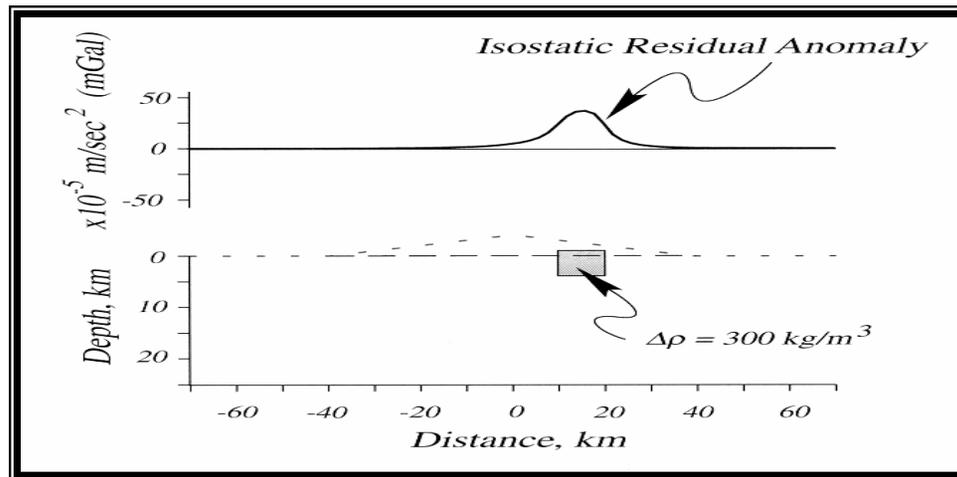
GRAVEDAD: Reducción de Datos

Compensación Isostática – Regional/Residual



- Mínimos Cuadrados
- Filtraje en Frecuencia
- Continuaciones Analíticas
- etc.

Anomalía Residual



GRAVEDAD: Reducción de Datos

Plataformas en Movimiento ($V > 0$) – Corrección de Eötvös

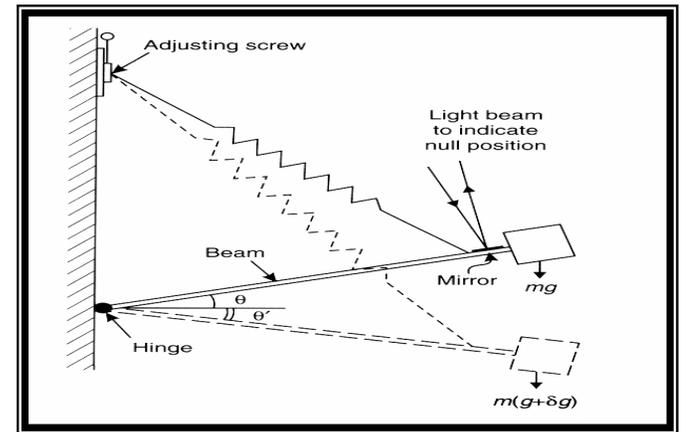
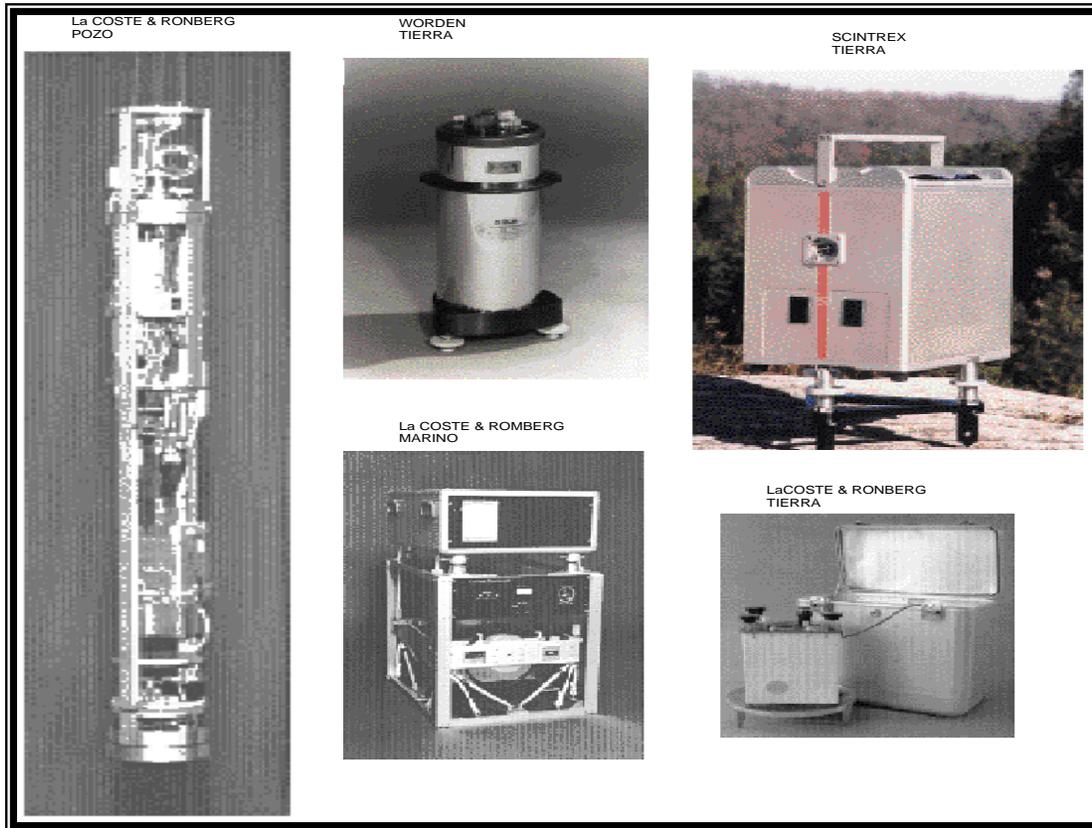
$$g_E = 7.503 V \cos(\phi) \sin(\alpha) + 0.004154 V^2 \text{ [mGal]}$$

V [nudos] ; ϕ =latitud ; α =rumbo c/r norte verdadero

Puede tener magnitud del orden de efectos asociados a fenómenos geológicos (~ 5 mGal para un barco moviéndose hacia el Este, en latitud 45° y con $V= 1$ nudo).

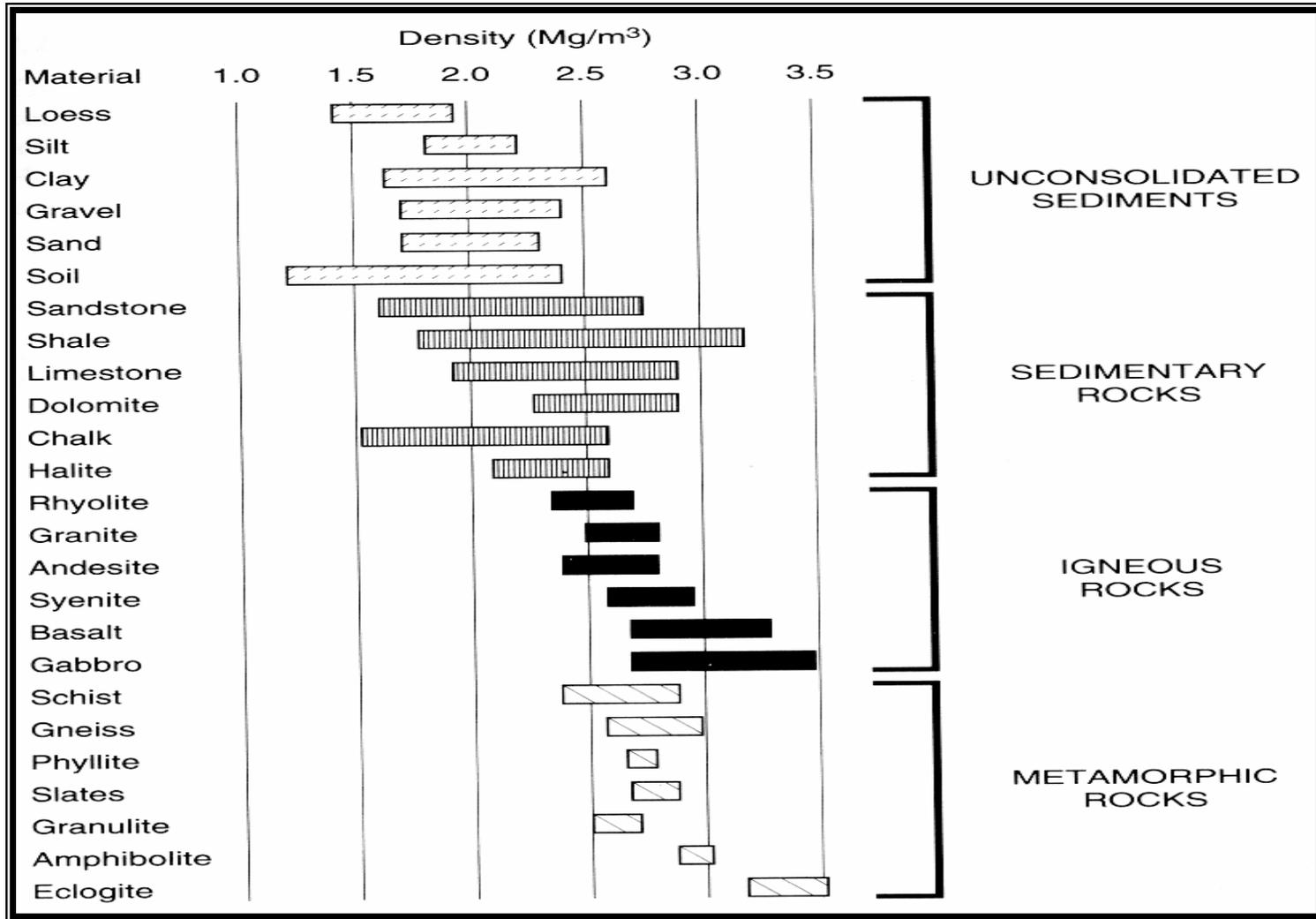
Crítico para levantamientos aerotransportados.

GRAVEDAD: Instrumental



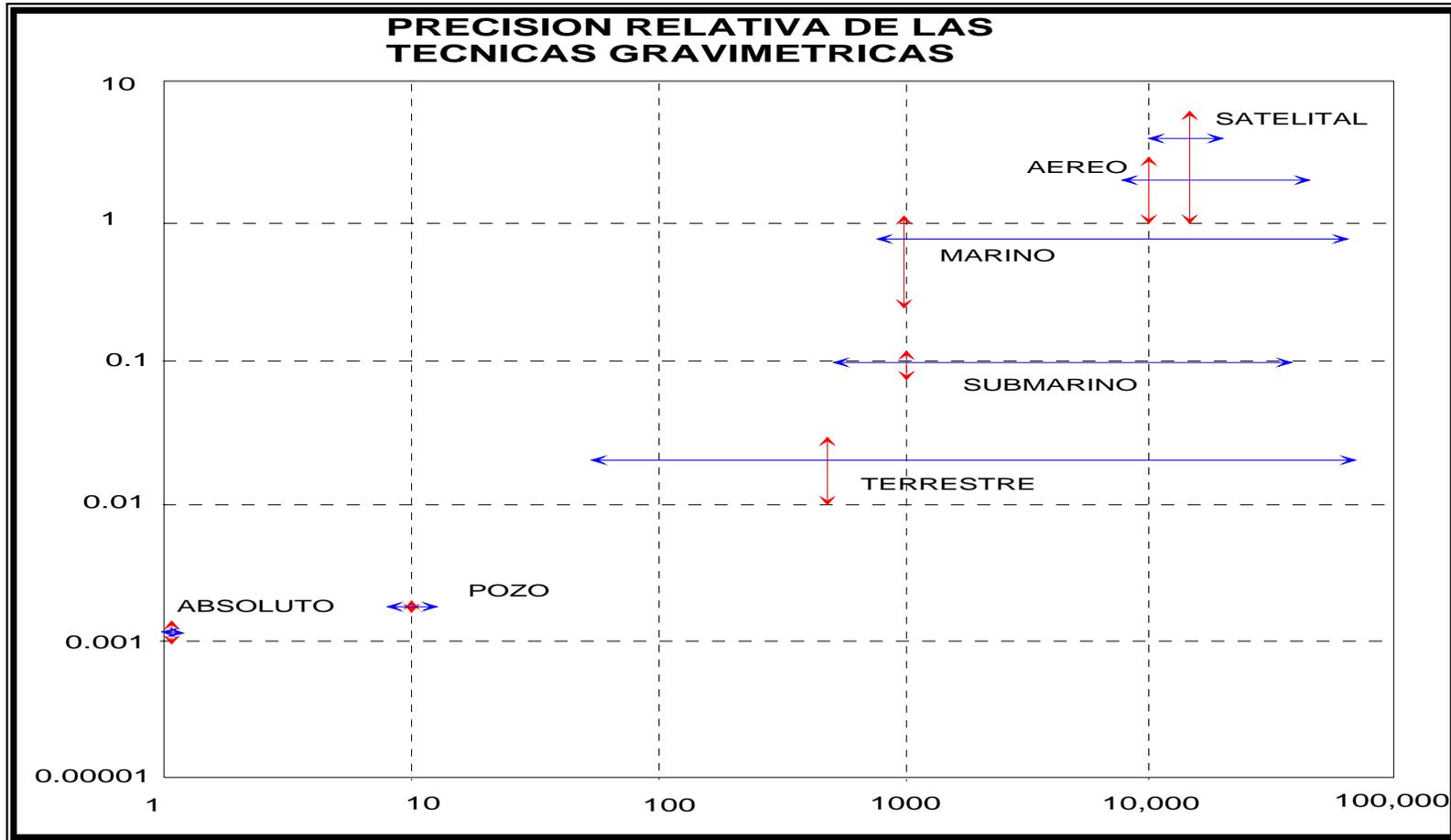
**Principio Físico
Lacoste&Romberg**

Gravedad: Densidad de Rocas



Gravedad: Precisión Relativa

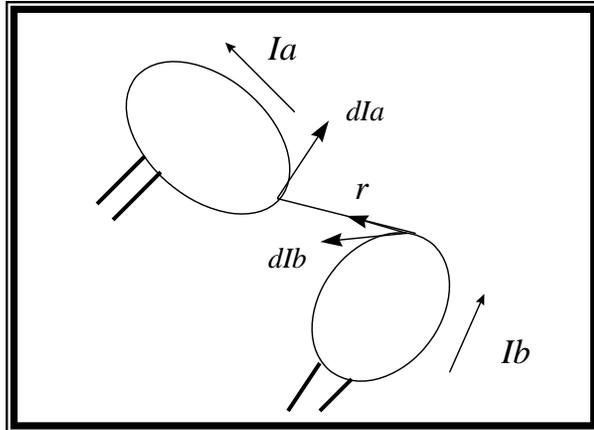
m
G
A
I



Longitud de Onda [m]

MAGNETISMO: Conceptos Básicos

Inducción Magnética



Análogo a la atracción entre dos masas puntuales, consideremos la atracción entre dos "loops" de corriente continua, con corrientes I_a e I_b respectivamente.

La fuerza actuando sobre un pequeño elemento dI_a del loop a, causada por la corriente en el elemento dI_b del loop b, estará dada por la "Fuerza de Lorentz".

$$df_a = C_m I_a I_b \frac{dI_a \times (dI_b \times \hat{r})}{r^2}$$

"Fuerza de Lorentz"

C_m es una constante de proporcionalidad, análoga a $G =$ constante gravitacional

MAGNETISMO: Conceptos Básicos

Inducción Magnética

Si definimos un vector B tal que:

$$dB_b = C_m I_b \frac{dl_b \times \hat{r}}{r^2} \quad \text{Y} \quad df_a = I_a dl_a \times dB_b$$

e integramos sobre el loop b , obtenemos:

$$B = C_m I_b \oint \frac{dl_b \times \hat{r}}{r^2}$$

“Ley de Biot-Savart”

El vector B se conoce como “Inducción Magnética”, “Densidad de Flujo Magnético”, o simplemente “Campo Magnético” de un loop de corriente continua.

“Una corriente eléctrica induce una fuerza sobre una carga en movimiento, igual al producto vectorial del campo magnético y la velocidad de la carga”.

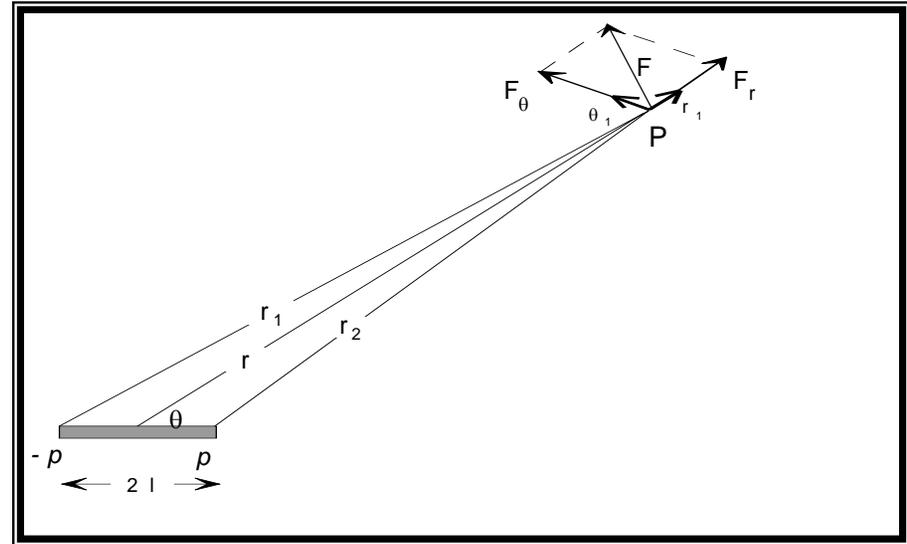
MAGNETISMO: Conceptos Básicos

Potencial Magnético

El campo magnético (F) es una fuerza conservativa \Rightarrow deriva de un potencial escalar (A).

$$\Rightarrow F(r) = - \text{Grad. } A(r)$$

Para un dipolo:



$$A = p \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + l^2 - 2rl \cos \theta}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + l^2 + 2rl \cos \theta}} \right]$$

Si $r \gg l$ (campo lejano) $\Rightarrow A \sim \frac{2lp \cos \theta}{r^2} = \frac{|m| \cos \theta}{r^2}$

En este caso:

$$F \sim \frac{|m|}{r^3} [2\cos\theta \hat{r} + \sin\theta \hat{\theta}]$$

En primera aproximación, el campo terrestre puede ser considerado dipolar.

MAGNETISMO: Conceptos Básicos

Susceptibilidad Magnética

En presencia de un campo externo H , un cuerpo magnetizable se magnetiza por inducción magnética. El alineamiento de los dipolos magnéticos al interior del cuerpo, produce un campo magnético M que se suma al campo externo.

En campos magnéticos débiles (como el terrestre), el campo M es proporcional a H y alineado en la misma dirección.

El grado de magnetización alcanzado por este cuerpo corresponde a la constante de proporcionalidad, que se define como "*susceptibilidad magnética (k)*", tal que:

$$M = k \cdot H$$

MAGNETISMO: Conceptos Básicos

Unidades

Más complejo que en el caso de gravedad, básicamente por el enorme rango de magnitudes que presentan los campos magnéticos dependiendo de la aplicación y también por la derivación matemática, que en algunos casos es dependiente del sistema de unidades usado !!! (Blakely 1995, p.67).

Básicamente se usan dos sistemas: *CGS* (también conocido como *emu* = Electromagnetic Units) y el *Sistema Internacional (SI)*.

$C_m = 1$ en emu (adimensional) ; $C_m = \mu_0/4\pi$ [10^{-7} henry/m] en SI
 $\mu_0 \equiv$ permeabilidad mag. del vacío.

En *emu* B se mide en *Gauss (G)*, mientras que en *SI*, B se mide en Weber/m² \equiv Tesla (T). En aplicaciones geofísicas la unidad más común para B es *gamma* en *emu* (γ) o *nanotesla* en *SI* (nT).

$$1 \text{ Tesla} = 10^4 \text{ Gauss} \quad (1 \text{ nT} = 10^{-9} \text{ T} = 1 \text{ gamma} = 10^{-5} \text{ Gauss})$$

MAGNETISMO: Conceptos Básicos

El Campo Magnético Terrestre

Asumimos en primera aproximación que la tierra es una esfera de radio "a" y consideramos un potencial escalar V, el cual debe satisfacer la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0$$

La solución de esta ecuación en coordenadas esféricas, estará dada por los polinomios asociados de Legendre

$$V = a \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\phi + h_n^m \sin m\phi) P_n^m(\theta),$$

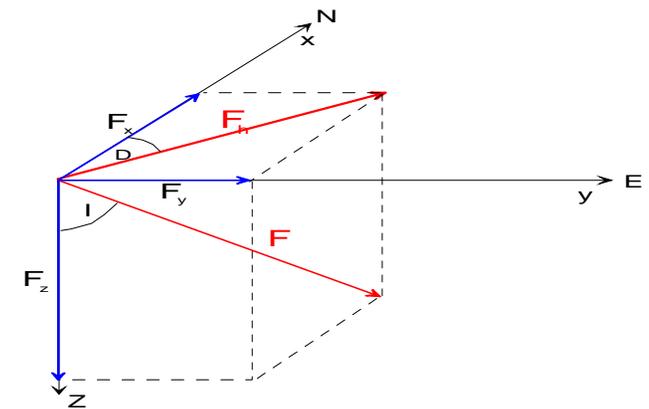
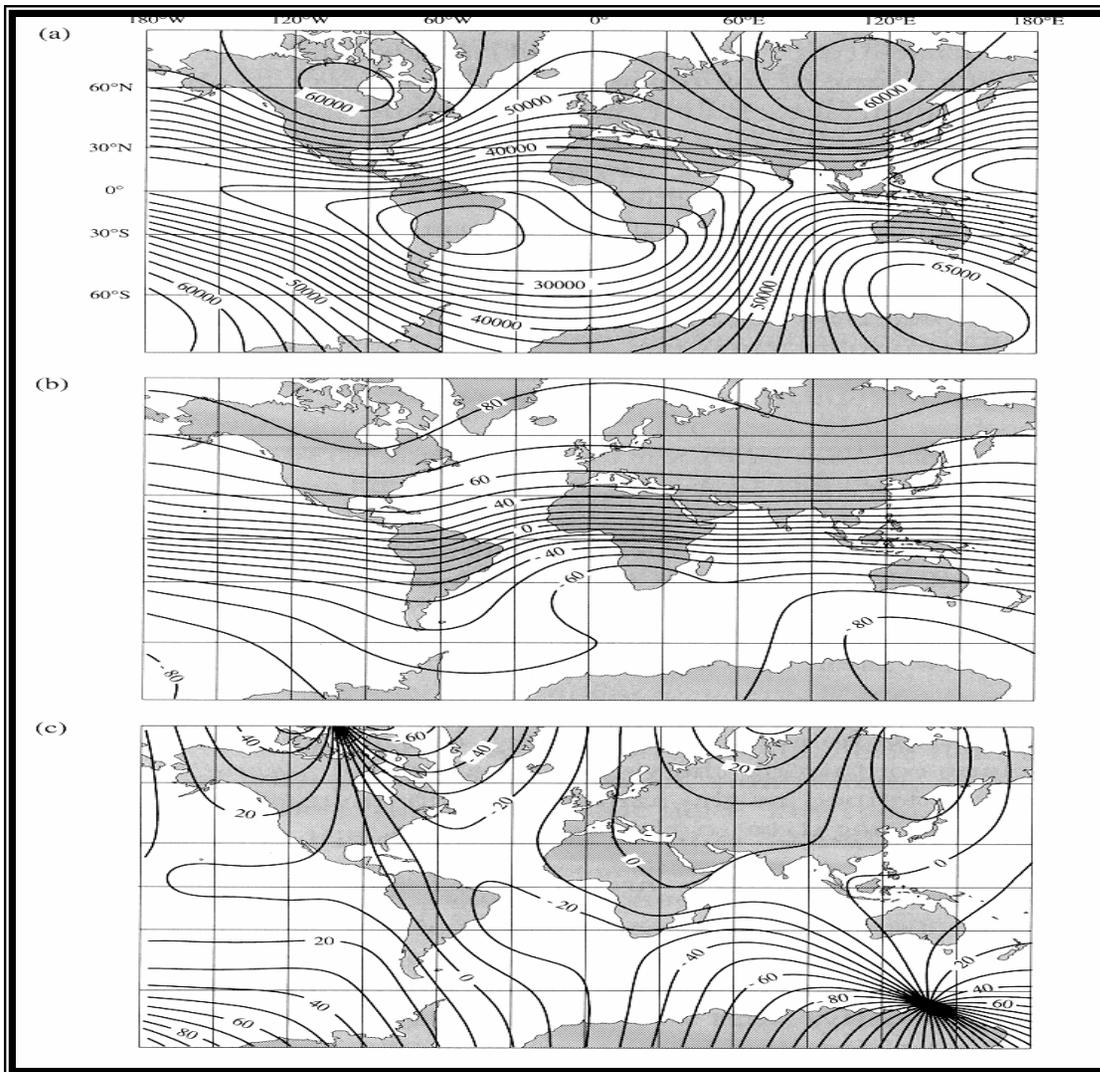
θ - Colatitud ; ϕ Longitud

A partir de valores medidos por los observatorios magnéticos, se determinan los coeficientes g y h que "ajustan" una superficie matemática al campo observado.

Esto se conoce como el IGRF (International Geomagnetic Reference Field)

MAGNETISMO: Conceptos Básicos

El Campo Magnético Terrestre



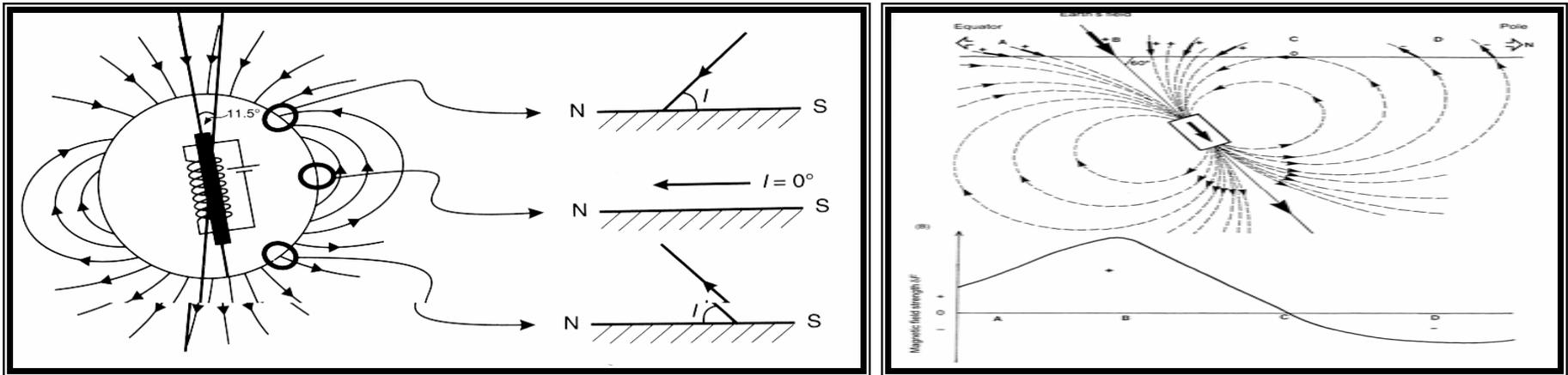
F = Intensidad de campo total

I = Inclínación

D = Declinación

MAGNETISMO: Conceptos Básicos

El Campo Magnético Terrestre



Inducción Magnética \Rightarrow Rocas magnetizadas en dirección del campo actual

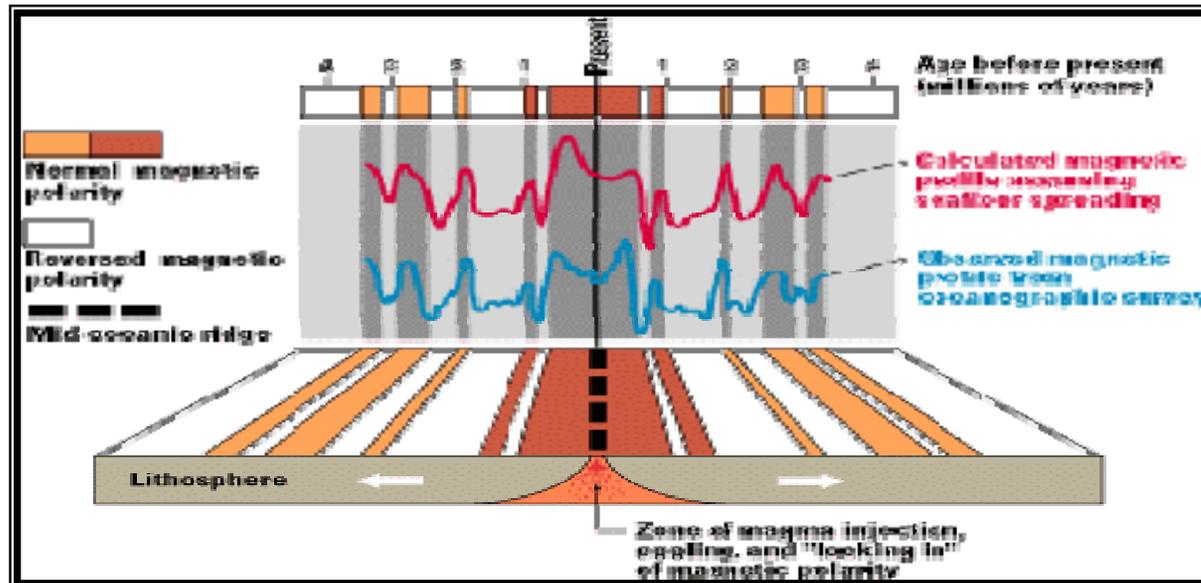
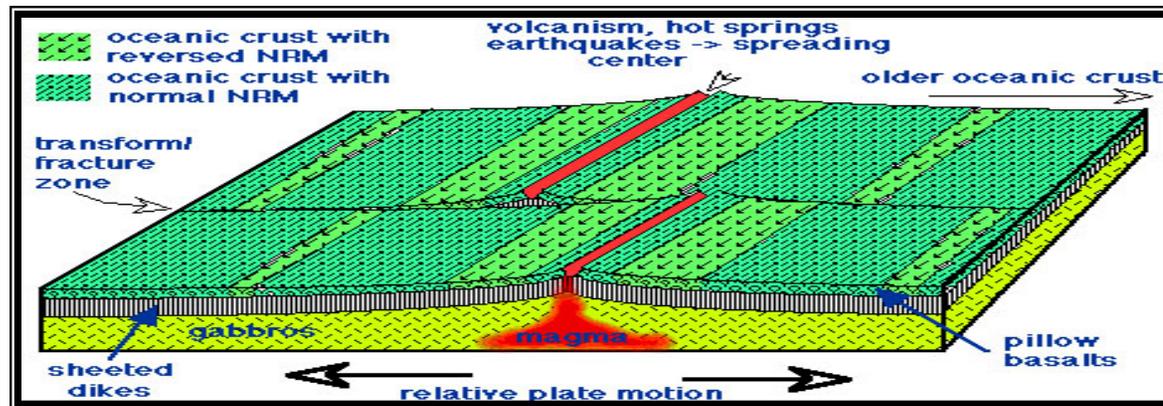
Remanencia Magnética \Rightarrow Rocas magnetizadas en dirección de un campo magnético del pasado.

Ej.- Termoremanencia en basaltos oceánicos.

Temperatura de Curie (T_c)

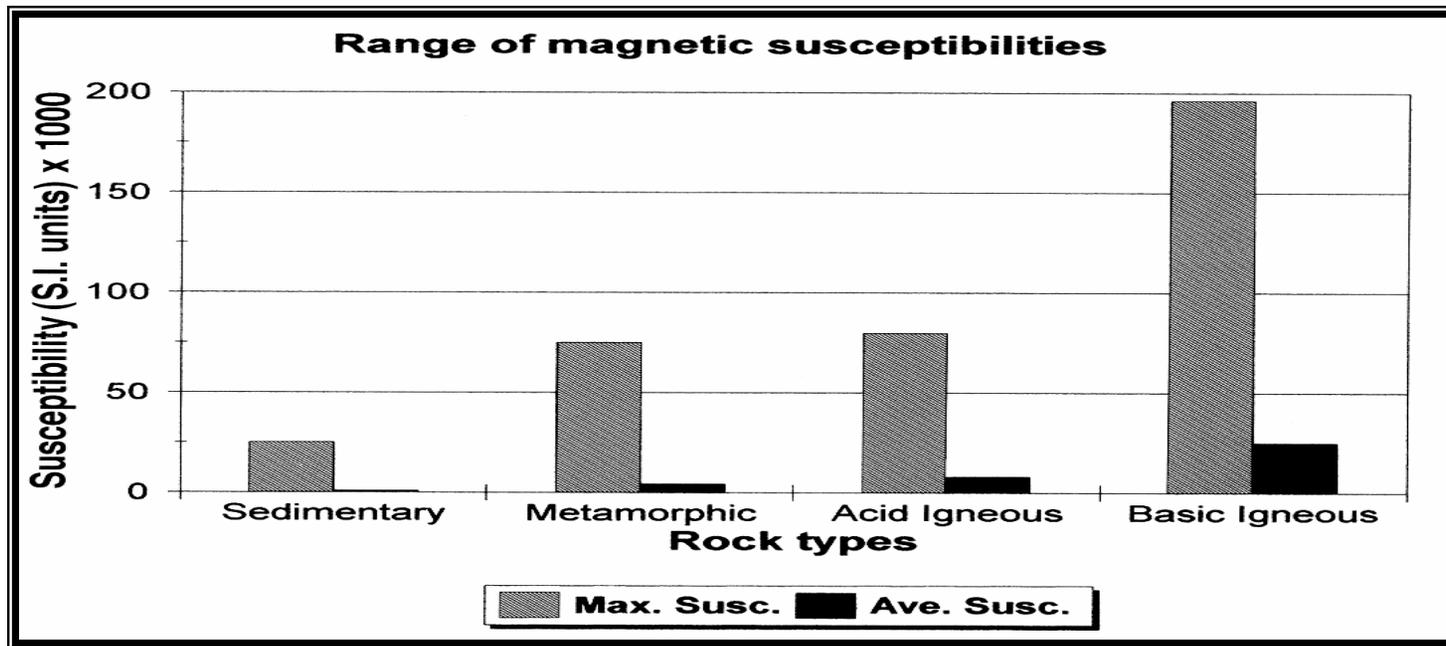
MAGNETISMO: Conceptos Básicos

El Campo Magnético Terrestre



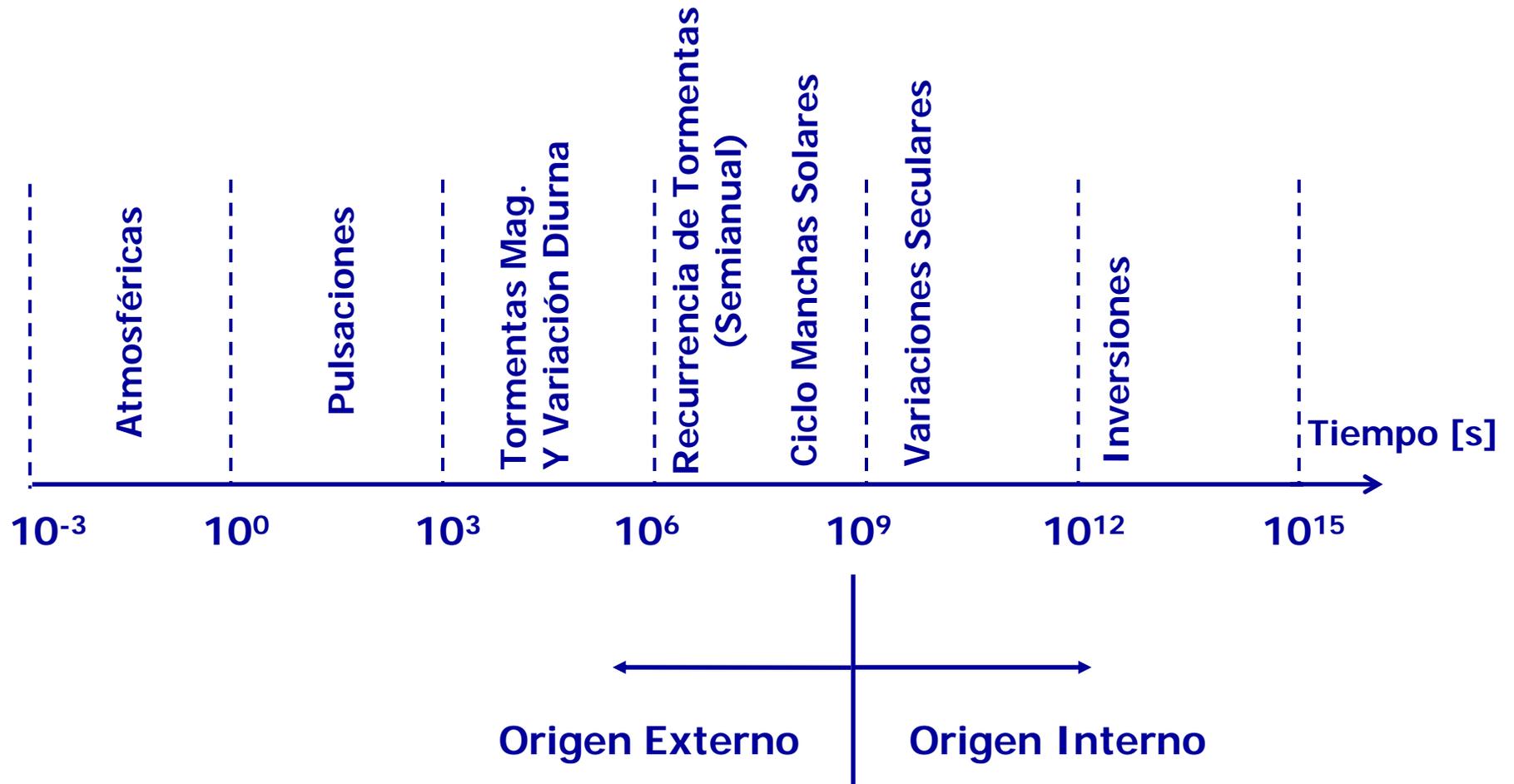
MAGNETISMO: Conceptos Básicos

Magnetización de las Rocas

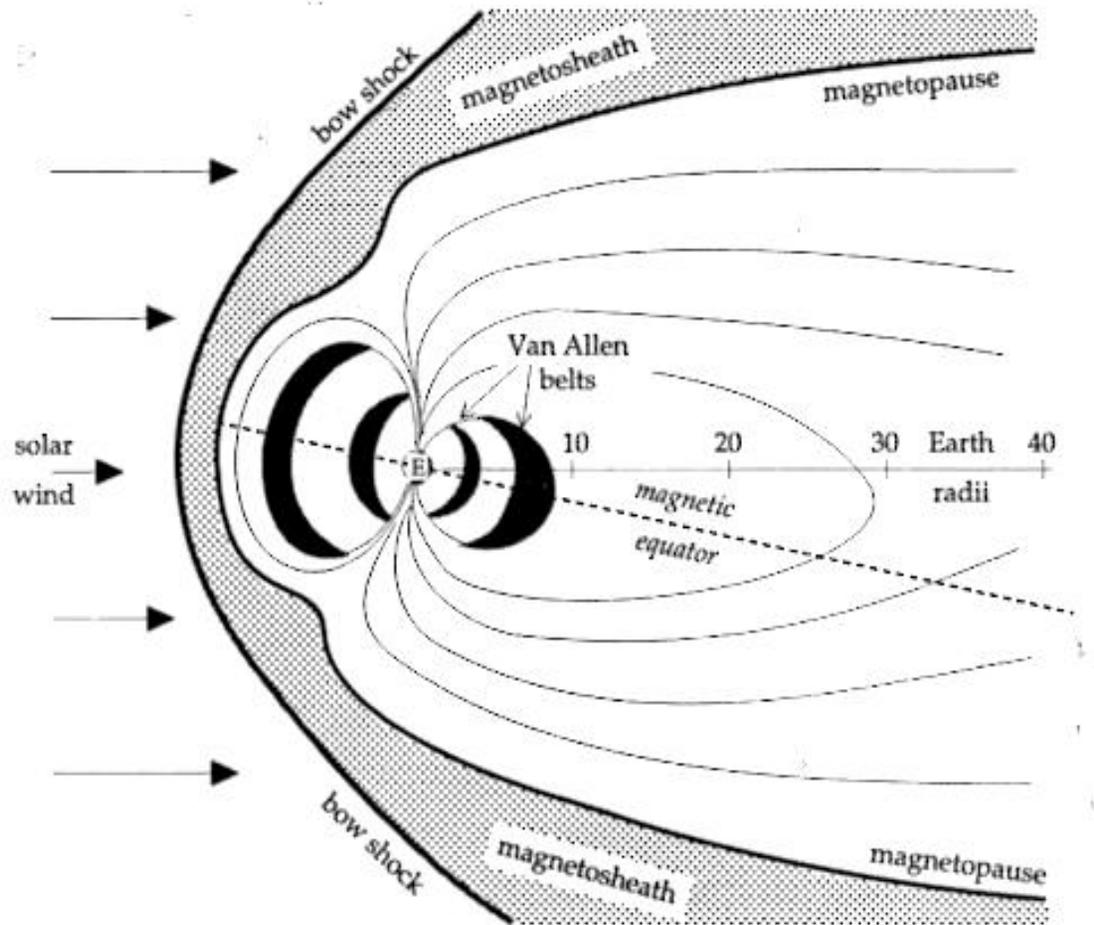


MAGNETISMO: Conceptos Básicos

CMT. Sus Variaciones Temporales



VARIACIONES CAMPO MAGNETICO TERRESTRE



Externas:

- periodicidad de 11 años
- variación diurna ~ 30 nT
- variación lunar ~ 2 nT
- tormentas solares

MAGNETISMO: Reducción de Datos

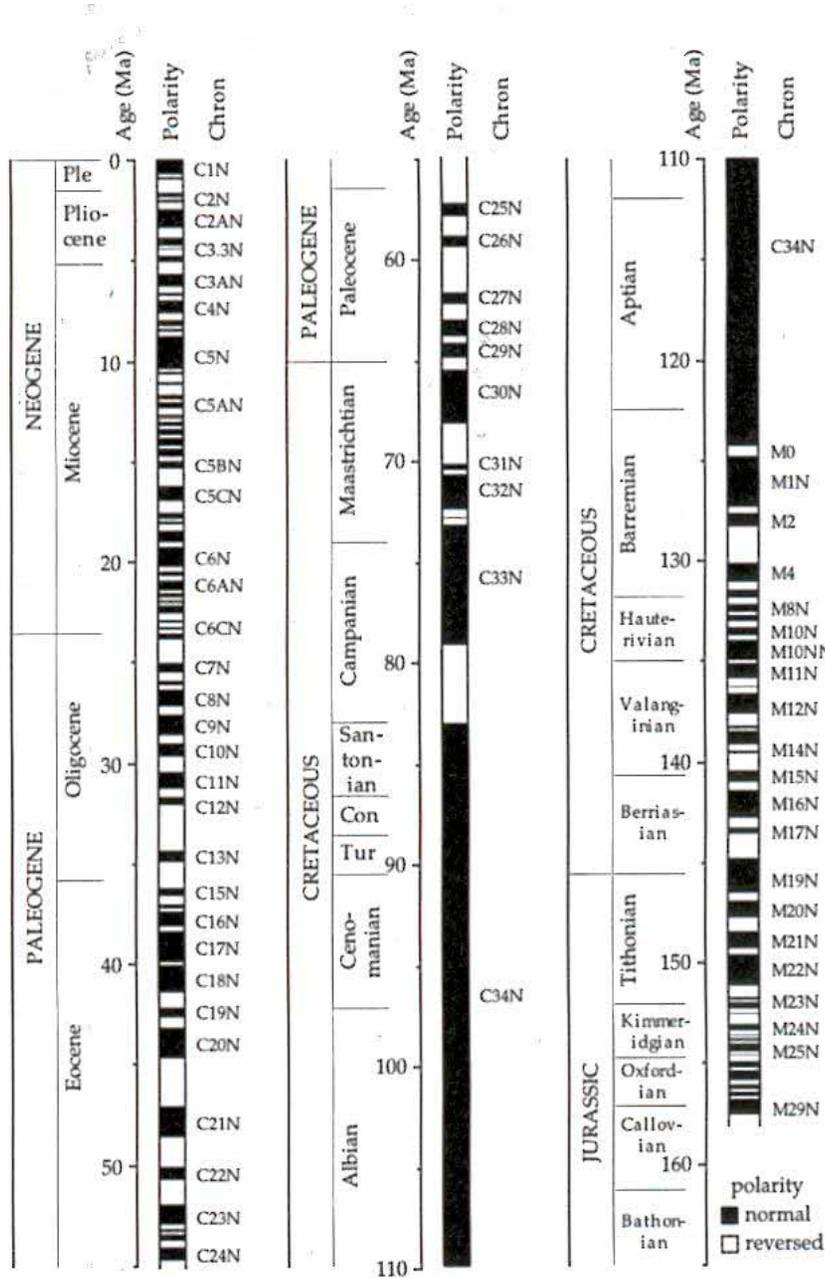
CORRECCIONES:

- ESTACION BASE (REGISTRO DE VARIACIONES TEMPORALES)



- ANOMALÍA REGIONAL (IGRF)

MÓDULO I.- Introducción



VARIACIONES CAMPO MAGNETICO TERRESTRE

Internas:

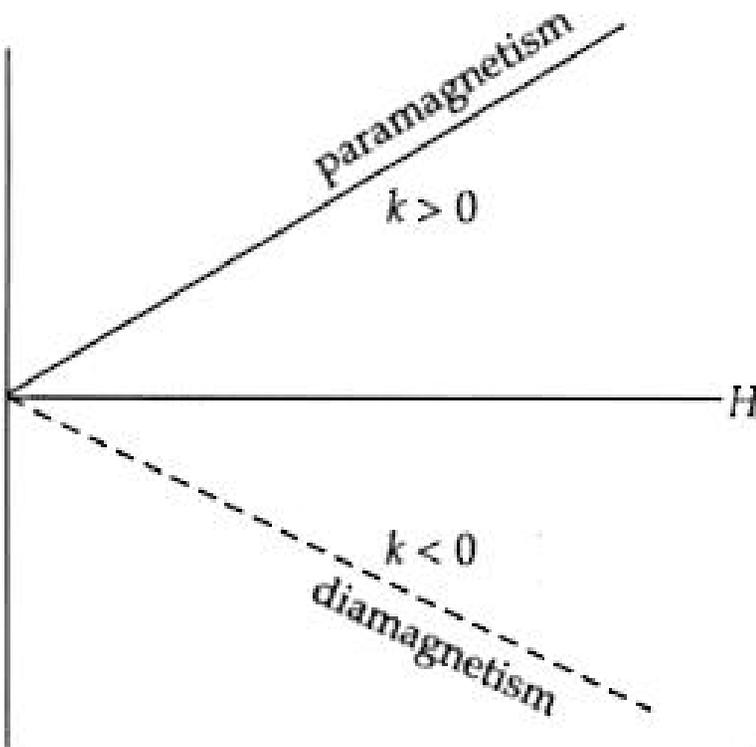
- variaciones seculares (precesión)
[I = 10°/400 años; D=35°/400 años]
[IGRF actualización cada 5 años]
- Inversión de campo magnético
[comportamiento caótico del proceso magneto-hidrodinámico que genera el campo magnético terrestre en el núcleo líquido de la tierra y el desarrollo de la capa D'' en la interfase manto-núcleo]

MAGNETIZACION DE LAS ROCAS

En presencia de un campo externo (H) las rocas presentan dos comportamientos:

- **PARAMAGNETISMO:** Momento magnético neto positivo (susceptibilidad magnética, $k > 0$)

- **DIAMAGNETISMO:** Se opone al campo externo (susceptibilidad magnética negativa), característico de materiales que completan todos los orbitales. En ausencia de un campo externo tienen momento magnético nulo (ej. , grafito, mármol, cuarzo)



En general el efecto paramagnético y diamagnético es muy débil, con la excepción de los elementos **FERROMAGNESIANOS** (fierro, cobalto, níquel), con una interacción magnética varios ordenes de magnitud superior.

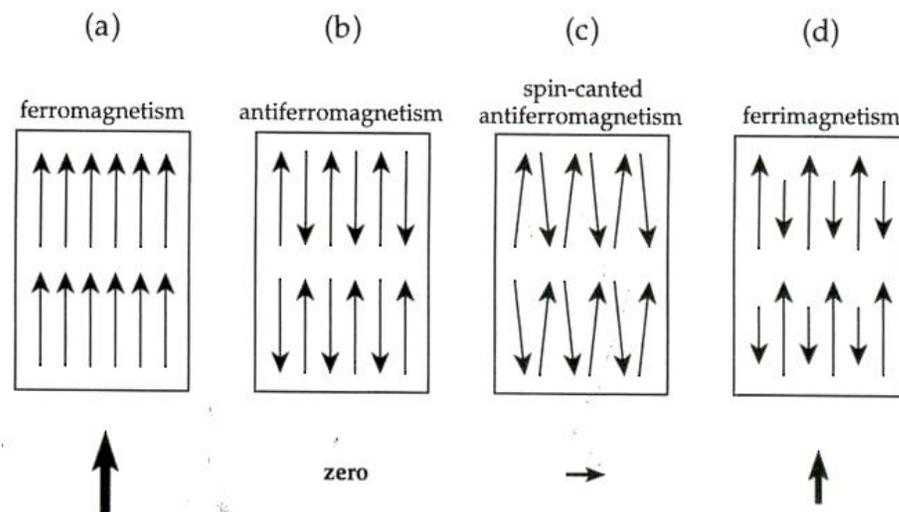
MAGNETIZACION DE LAS ROCAS

FERROMAGNESIANOS: El tipo de interacción magnética define los **DOMINIOS MAGNETICOS:**

a) Ferromagnetismo: dominios en fase momento magnético máximo (fierro)

b) Anti-Ferromagnetismo: dominios en oposición de fase, momento magnético nulo (hematita), si los dominios están levemente rotados se genera un anti-ferromagnetismo con momento magnético débil en sentido perpendicular al campo c)

d) Ferrimagnetismo: momento neto mayor que cero (la mayoría de las rocas magnetizadas en la naturaleza (magnetita, titanomagnetita, ox. fierro)

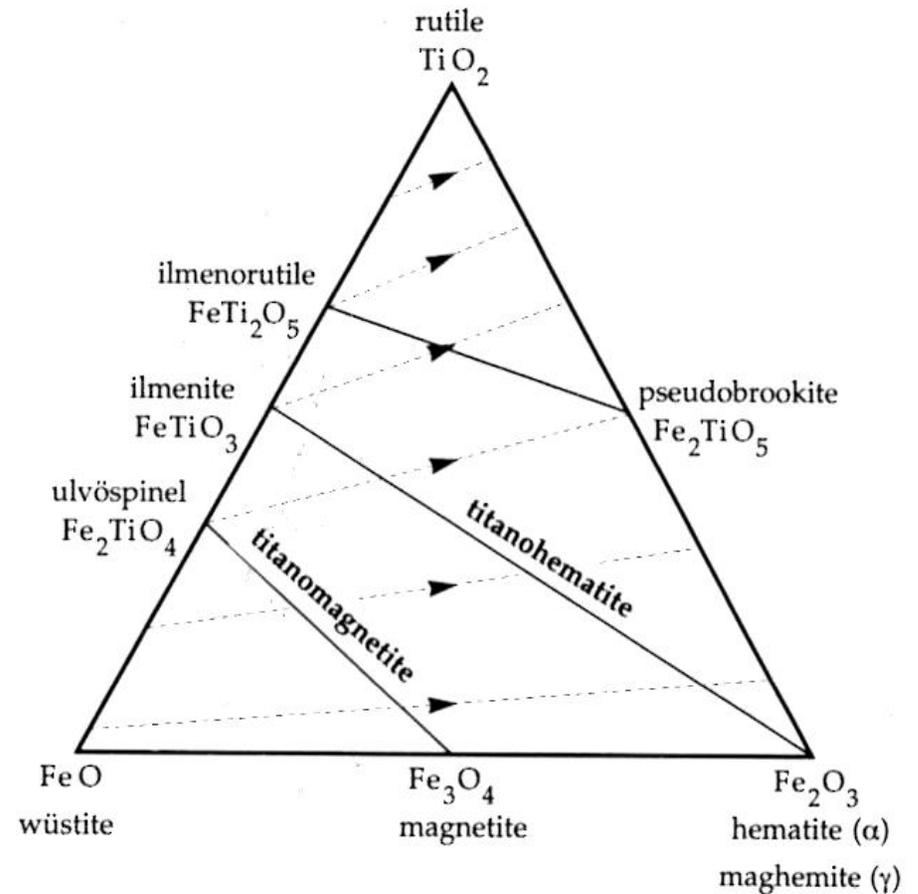


MAGNETIZACION DE LAS ROCAS

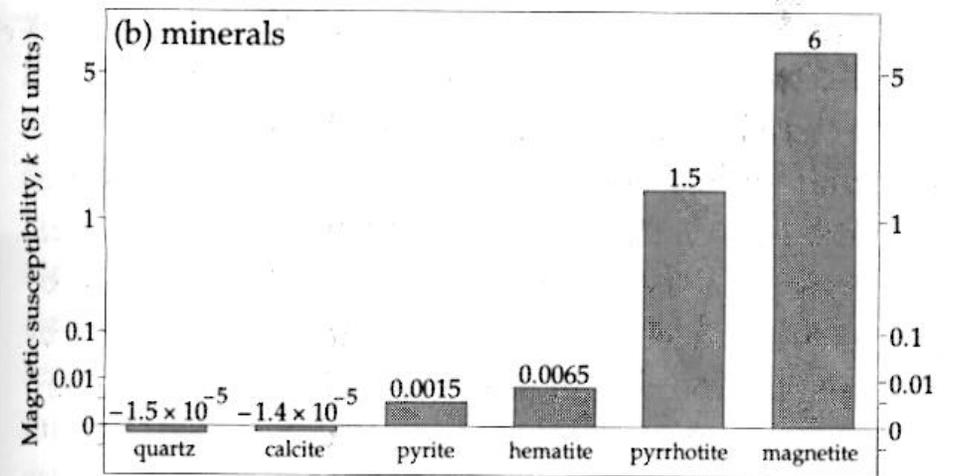
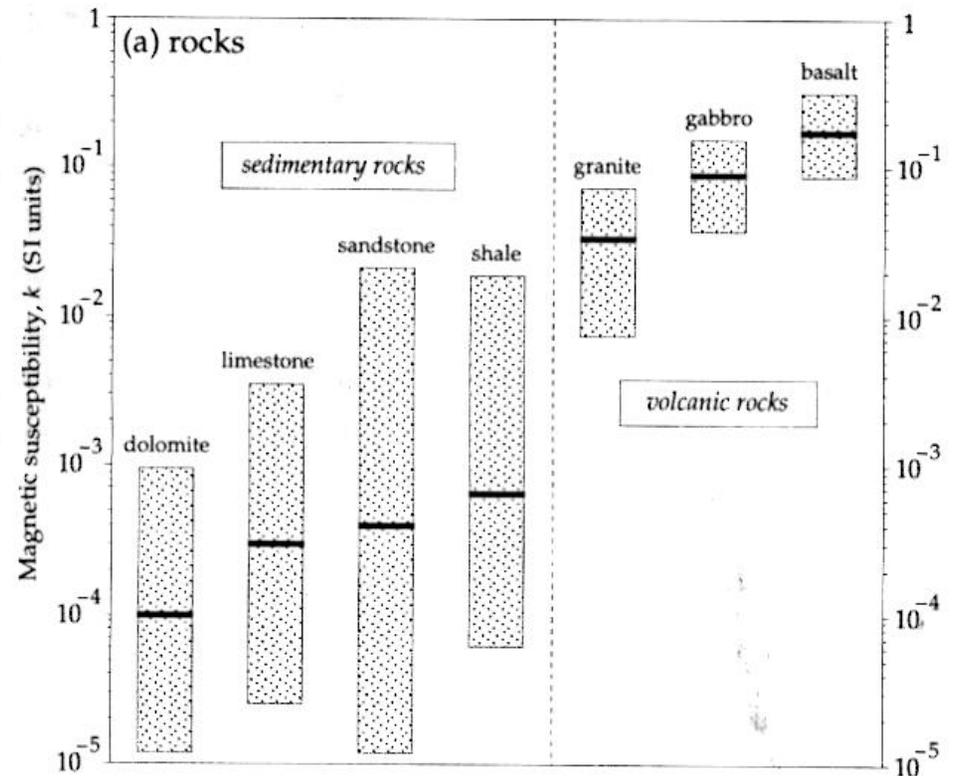
La solución sólida titanomagnetita es la familia de óxidos de hierro mas importante en términos de la magnetización de las rocas, a mayor contenido de titanio se incrementa el tamaño de grano y disminuye la T. Curie => ulvospinel no magnético a temperatura ambiente, la magnetización superior la alcanza la magnetita.

La solución sólida titanohematita tiene el mismo comportamiento: al aumentar el contenido de titanio, su valor extremo, hematita, presenta una magnetización débil pero alta T. Curie por lo cual es muy utilizada en estudios paleomagnéticos.

FERROMAGNESIANOS: El grado de magnetización en las rocas se puede expresar en un diagrama triangular Fe-Ti-O,

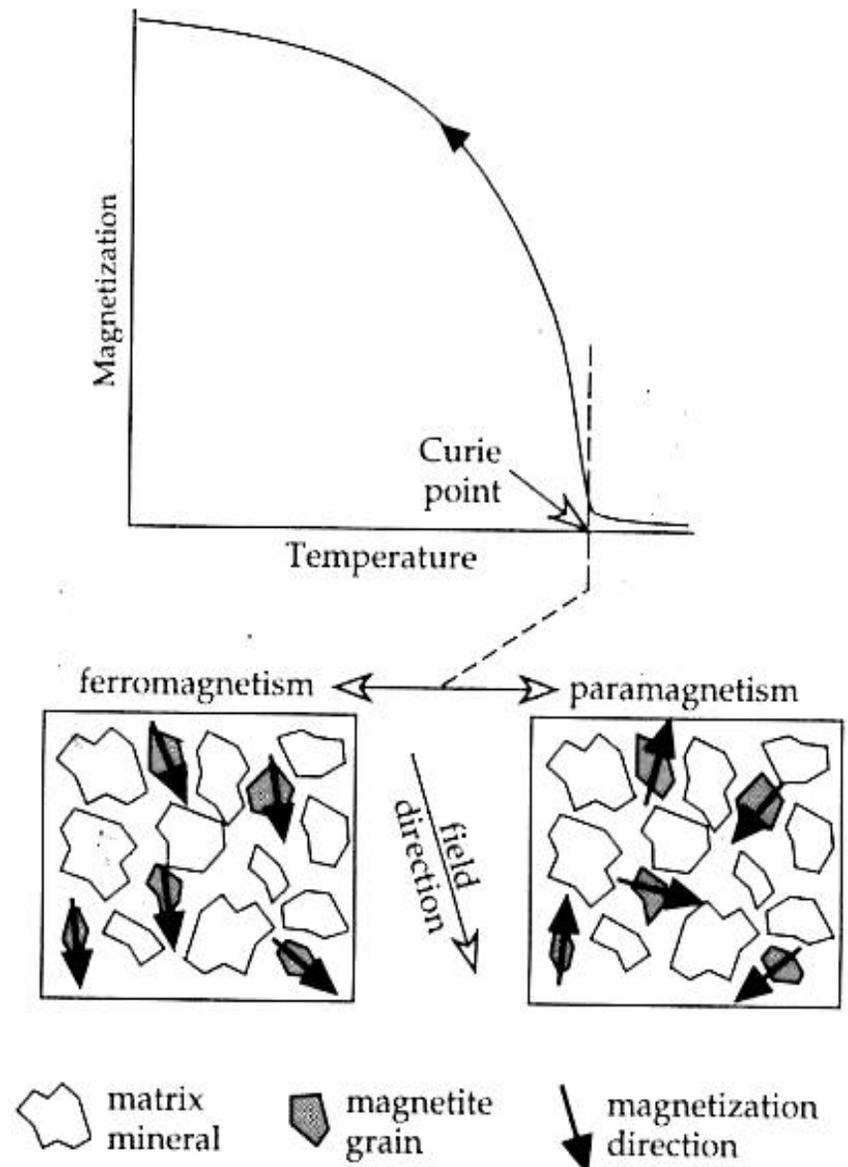


SUSCEPTIBILIDAD MAGNÉTICA ROCAS Y MINERALES



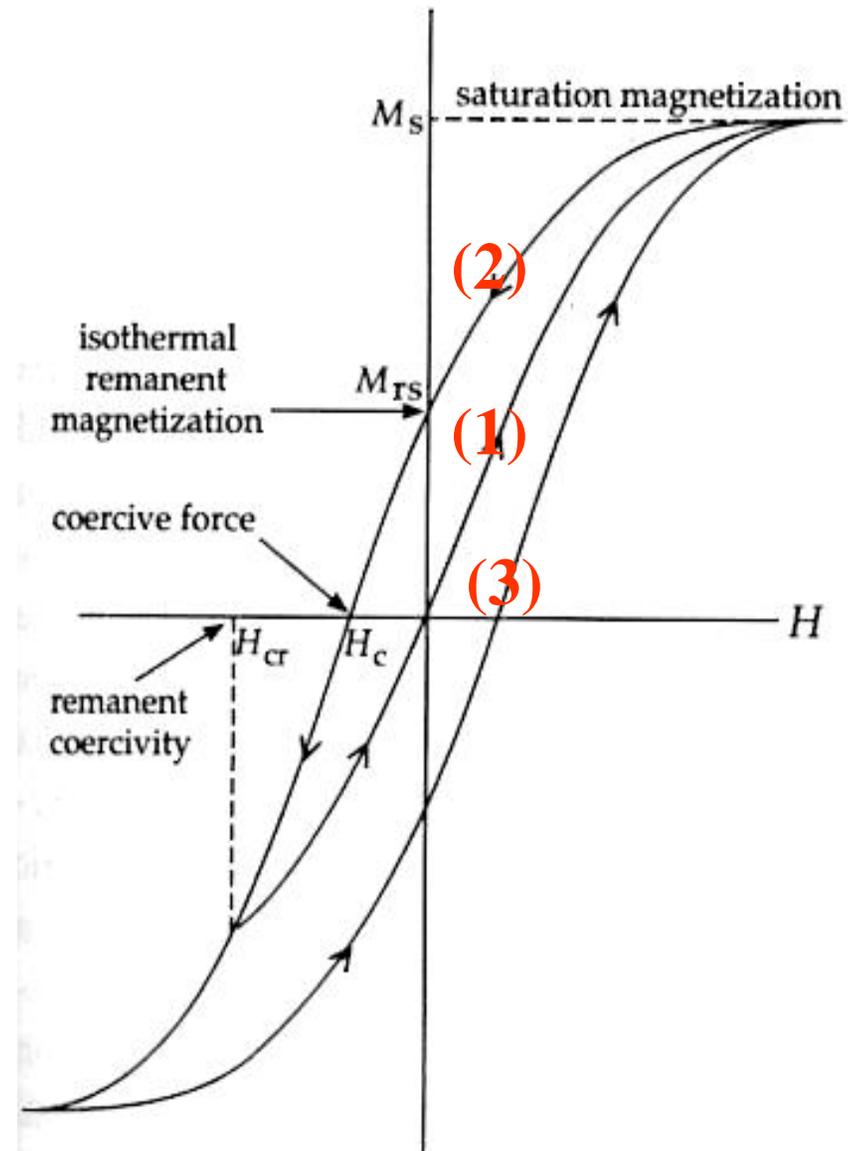
MAGNETIZACION DE LAS ROCAS: PUNTO CURIE

A medida que aumenta la temperatura el ordenamiento mostrado por la magnetización de los dominios magnéticos se mantiene estable hasta alcanzar la Temperatura de Curie, propia para cada mineral (580 °C para la magnetita). Sobre esta temperatura los granos magnéticos muestran una orientación aleatoria con un momento magnético neto = 0



MAGNETIZACION DE LAS ROCAS: CICLO DE HISTERESIS Y REMANENCIA

Al variar la intensidad del campo externo varia la magnetización adquirida por la roca: (1) aumenta hasta un nivel de saturación (M_s); al decrecer el campo no necesariamente sigue la misma trayectoria (2), manteniendo una magnetización remanente incluso en ausencia de un campo externo (M_{rs}), si el campo H no decrece bajo el valor H_{cr} al aumentar el campo retoma la trayectoria original (1), si alcanza el nivel de saturación su recuperación la efectúa según la trayectoria (3)



MAGNETIZACION DE LAS ROCAS: REMANENCIA

En presencia de un campo externo variable, la magnetización de las rocas puede contener una magnetización remanente (M_r) que es función de la historia de magnetización a la cual ha estado sometida la muestra. Esta magnetización remanente puede tener diversos orígenes pero en términos simples puede expresarse como una componente vectorial neta que presenta una angularidad relativa con respecto a la magnetización inducida por el campo actual (M_t). La importancia relativa de cada componente se expresa en el RADIO DE KONIGSBERG : $Q = M_r/M_t$.

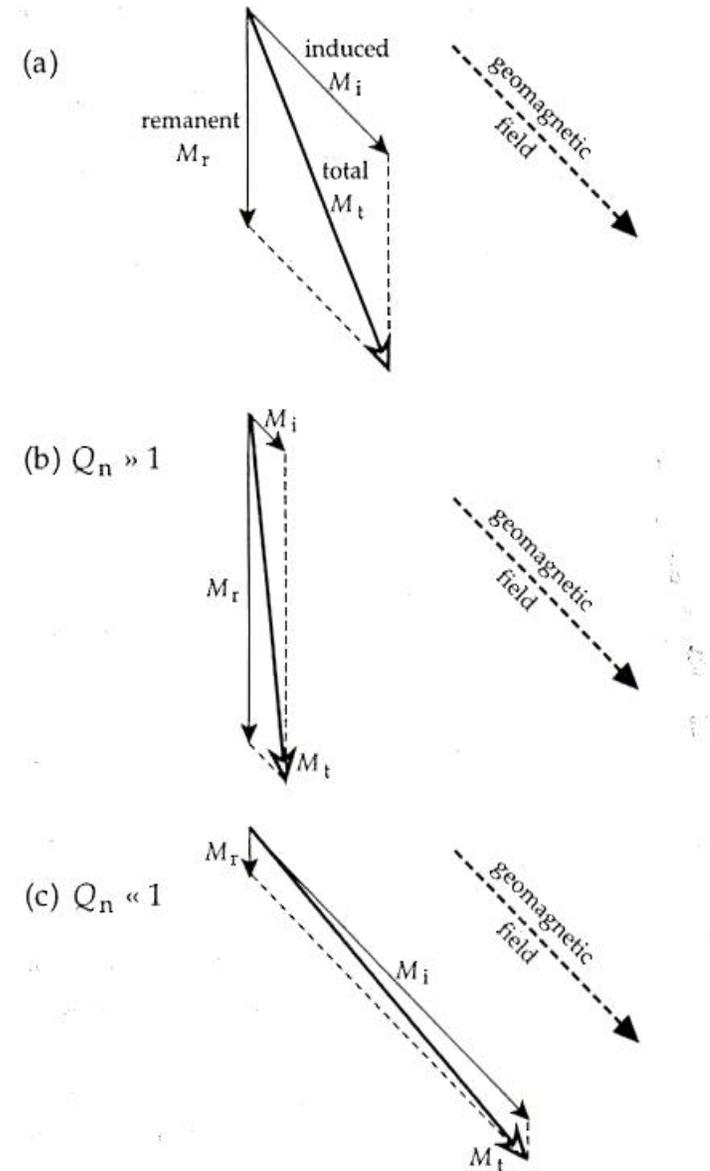
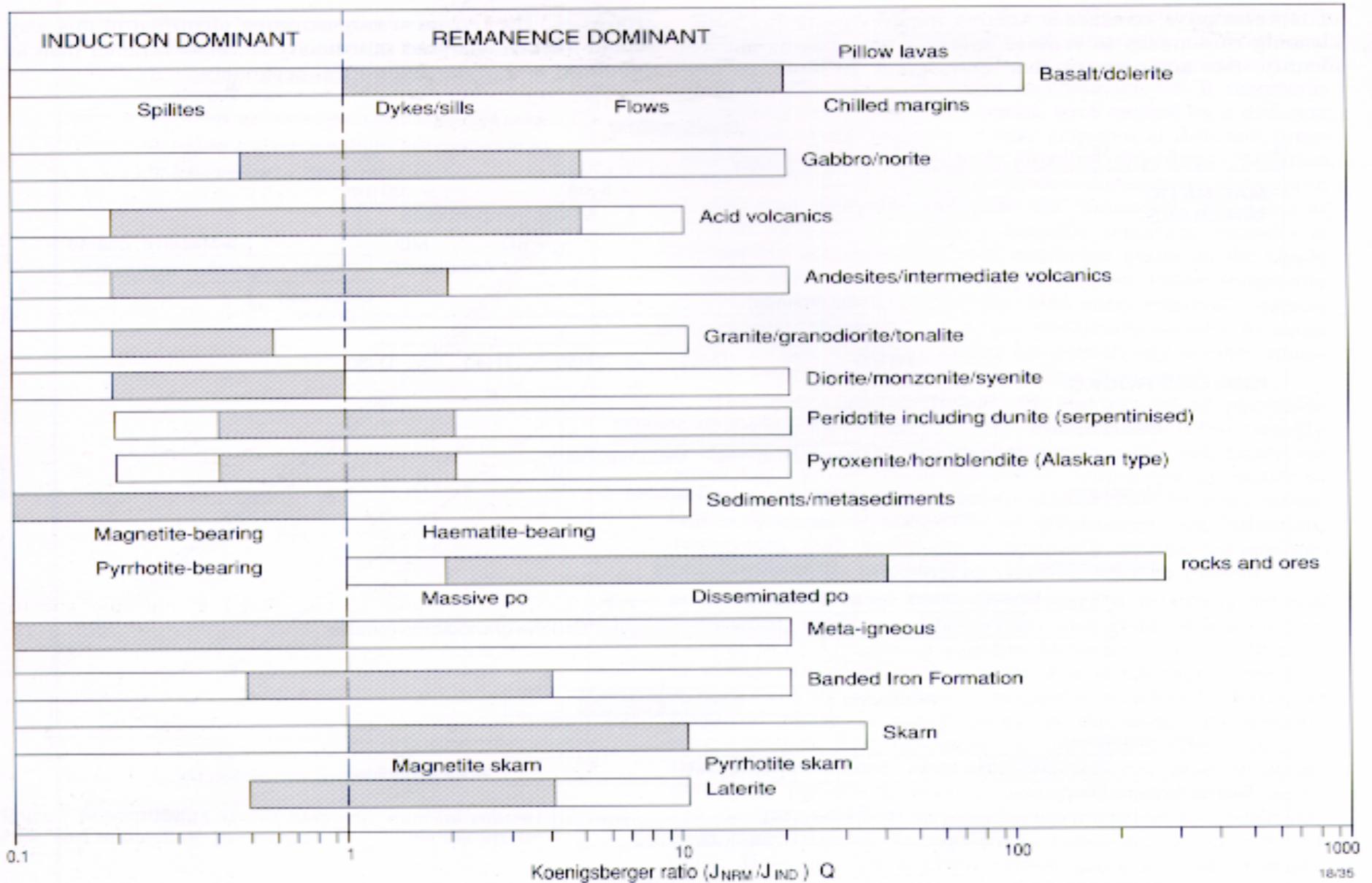


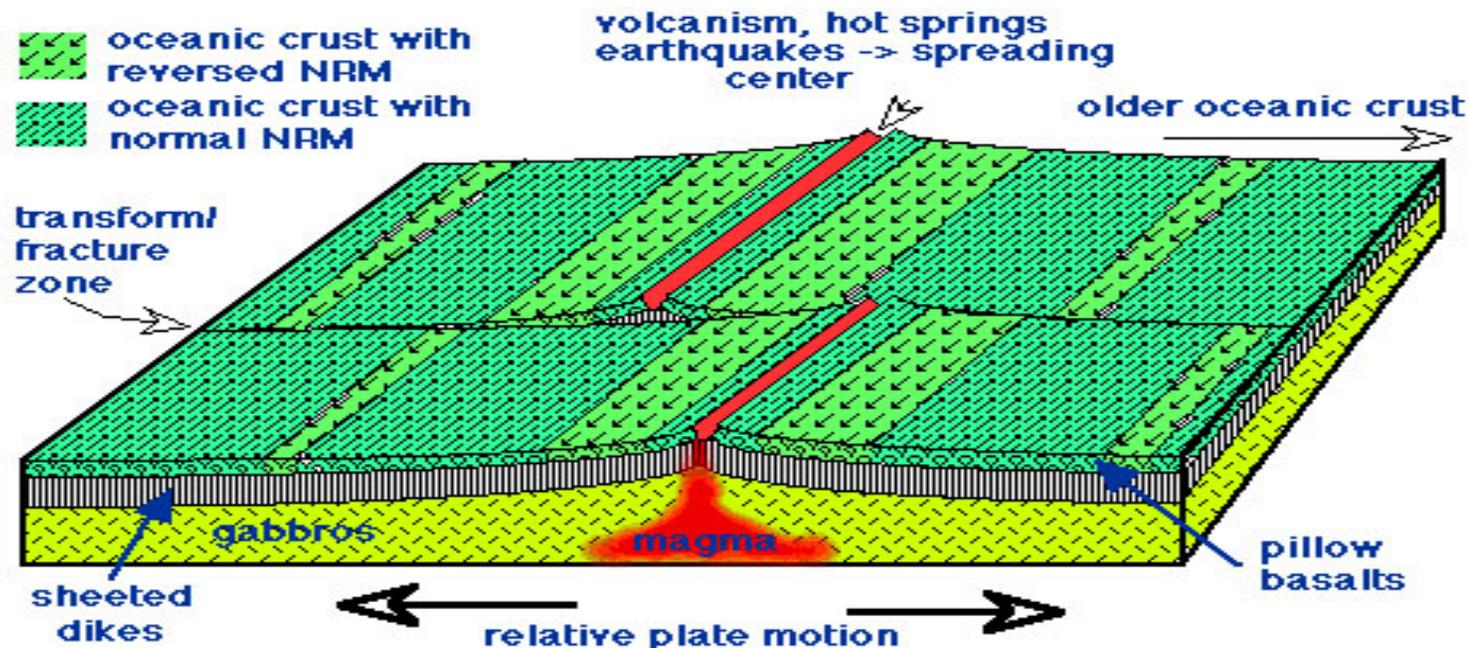
Fig. 5.40 The remanent (M_r), induced (M_i) and total (M_t)

MAGNETIZACION DE LAS ROCAS: REMANENCIA



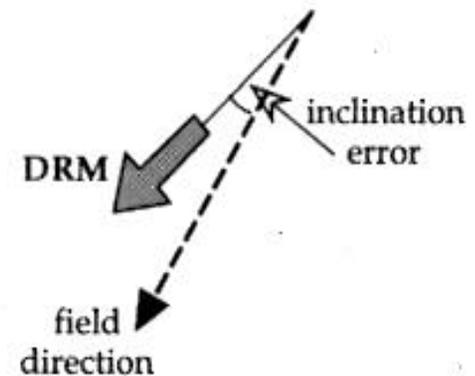
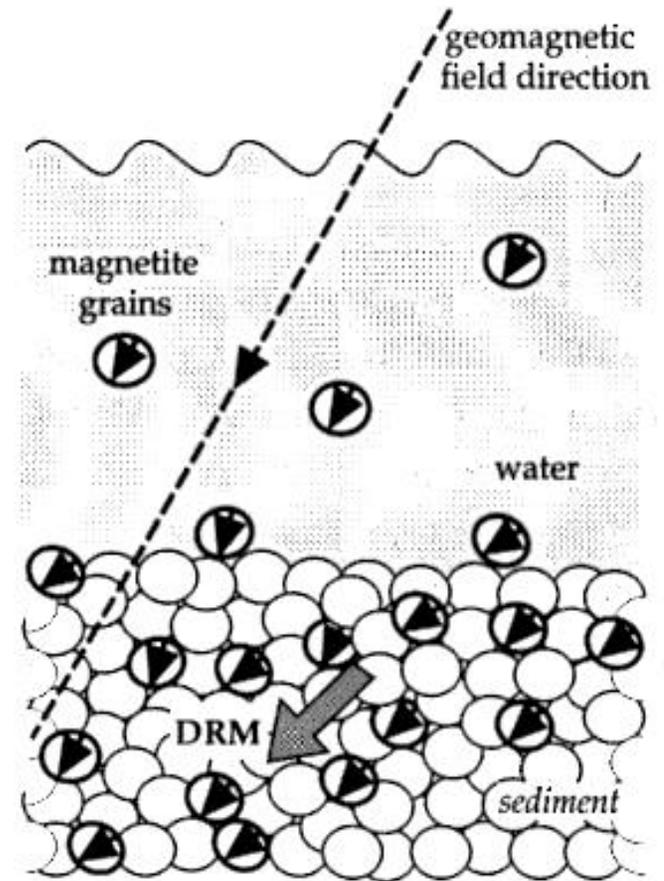
MAGNETIZACION DE LAS ROCAS: TIPOS DE REMANENCIA

TRM: Magnetización Termoremanente. Magnetización adquirida al momento de enfriarse bajo el punto de Curie correspondiente. Esta magnetización es característica de rocas efusivas tipo basaltos oceánicos que se magnetizan en la dirección del campo ambiente al momento de cristalizar en dorsales oceánicas.



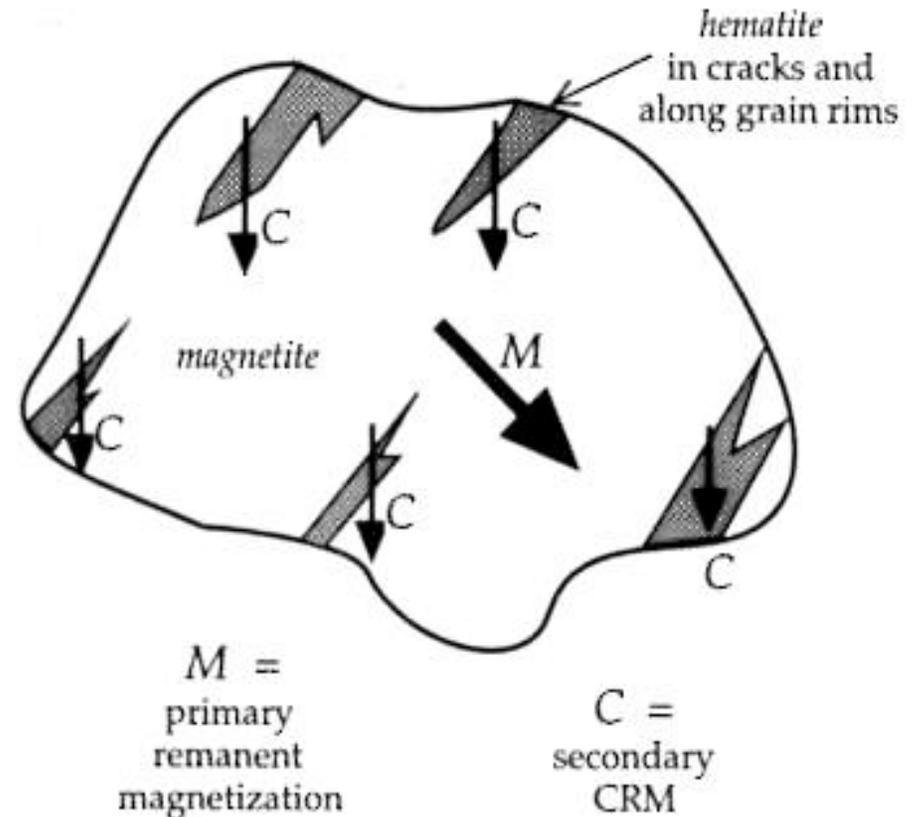
MAGNETIZACION DE LAS ROCAS: TIPOS DE REMANENCIA

DRM: Magnetización Detrítica.
Magnetización adquirida durante los procesos de sedimentación lenta, por ejemplo en arcillas. Los granos de magnetita se orientan según la dirección del campo ambiente al momento de la depositación.



MAGNETIZACION DE LAS ROCAS: TIPOS DE REMANENCIA

CRM: Magnetización Químico-remanente. Magnetización adquirida mediante un proceso químico en la diagénesis de rocas sedimentarias y también en ambientes ígneos sometidos a circulación hidrotermal (ej. dorsales oceánicas). También en ambientes metamórficos (ej. Depósitos tipo skarn)



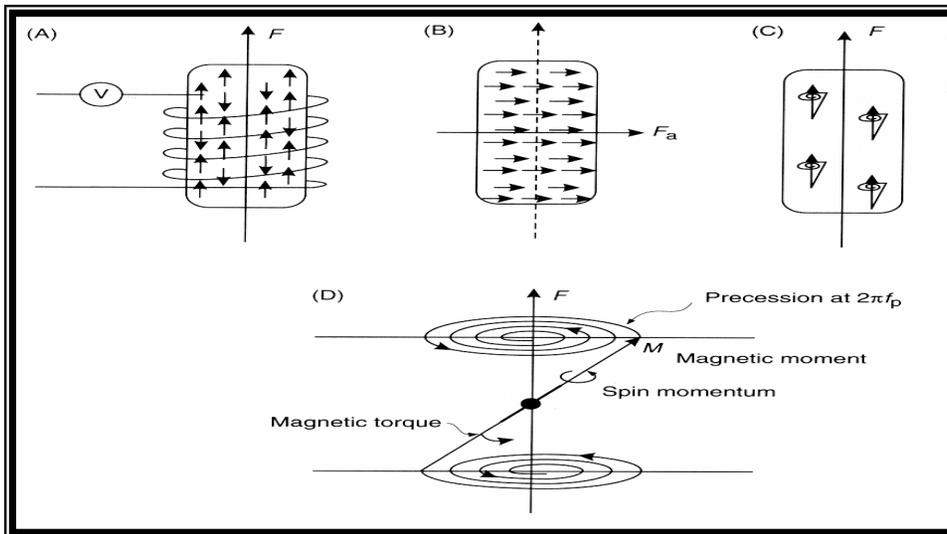
Otros tipos, VRM: magnetización viscoremanente en sometimiento a campos externos por un periodo prolongado de tiempo.

IRM: magnetización remanente al eliminar el campo externo

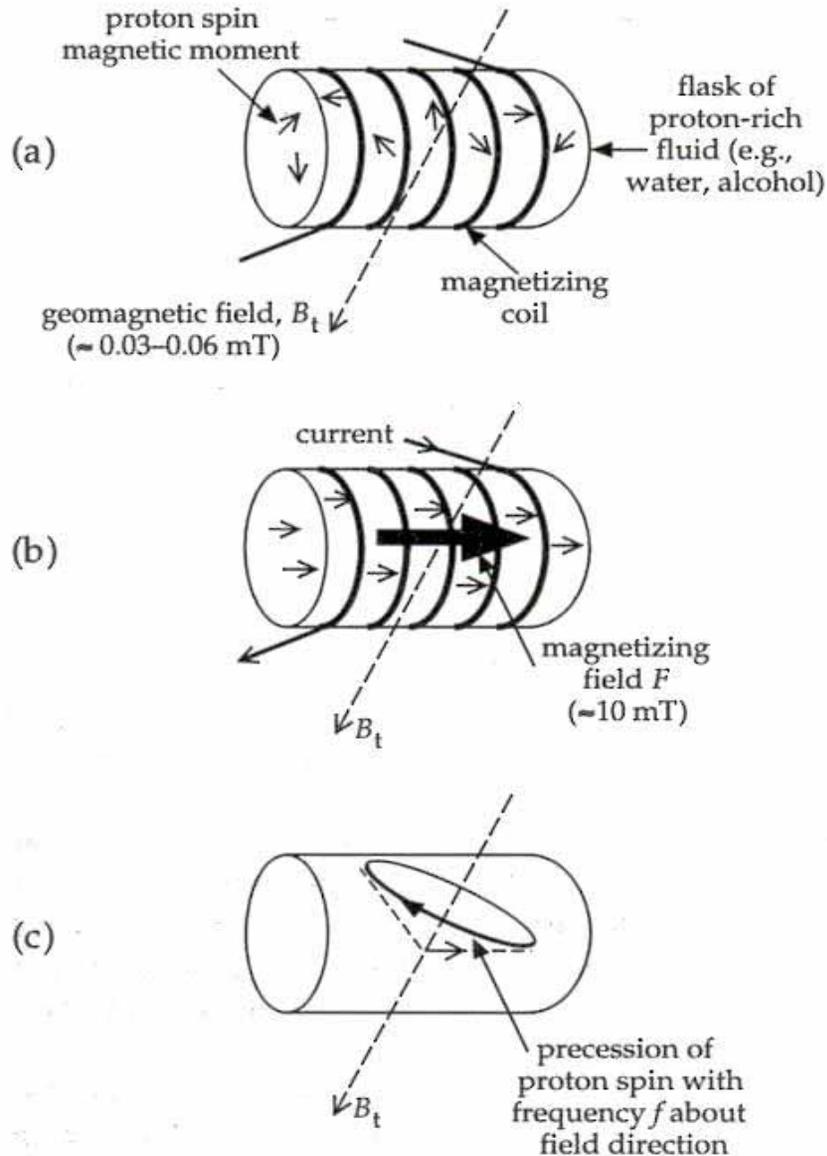
MAGNETISMO: Instrumental

MAGNETOMETRO GEOMETRICS G-858
PRECESION (VAPORES DE CESIO)

PRINCIPIO FISICO MAGNETOMETROS DE PRECESION



MÓDULO I.- Introducción



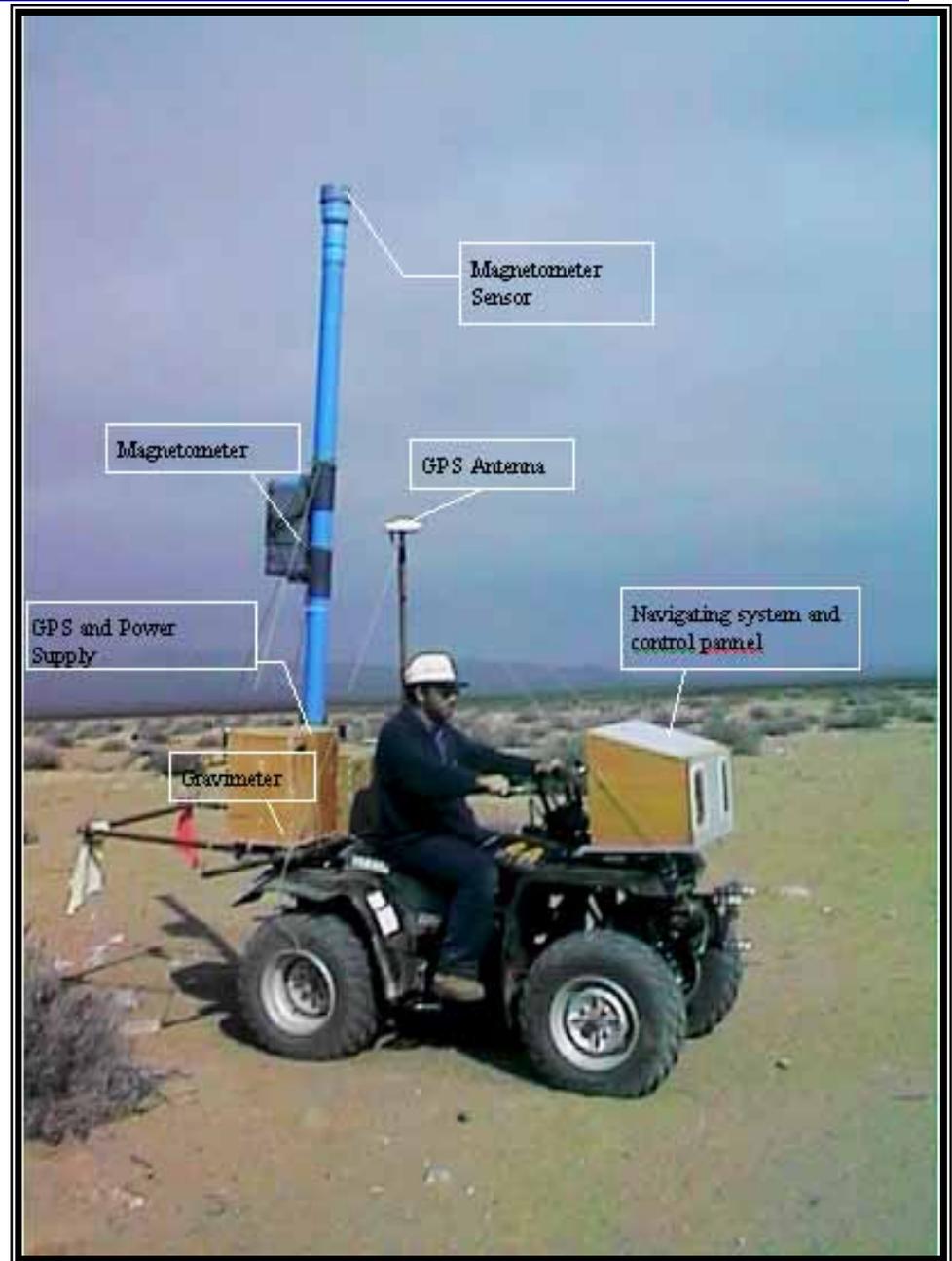
Principio del magnetometro de precesión magnética:

a) En una bobina con agua destilada se dispone un volumen de protones con una bobina envolvente.

b) Se energiza la bobina generando un campo magnético intenso en una dirección distinta del campo terrestre.

c) Al cortar el flujo de corriente por la bobina los protones adquieren un movimiento de precesión en torno a la dirección del campo terrestre con una frecuencia que es proporcional a la intensidad del campo (50 a 100 veces la amplitud de las anomalías observadas).

MAGNETISMO: Instrumental



GRAVEDAD Y MAGNETISMO: Generalidades

1) Definición del Experimento

- Área de Estudio
- Objetivos → Precisión Requerida
Parámetros de Adquisición
Dirección y espaciamiento entre perfiles
Razón de muestreo (resolución espacial)
Tipo de posicionamiento
Etc.

2) Adquisición → Planeamiento Logística

3) Reducción de Datos

- Correcciones
- Filtros (relación señal/ruido)

4) Interpretación

- Problema geológico
- Infinitas soluciones (información complementaria)
- Modelado

GRAVEDAD Y MAGNETISMO: Conclusiones

- ALCANCES
- LIMITACIONES
- APLICACIONES PRINCIPALES
 - En Diversos Ambientes Geológicos
 - En Chile
- RESOLUCIÓN RELATIVA
- COSTOS RELATIVOS

Method	Cost per day (US\$)
Geomagnetics	500 to 700
Goelectric mapping	530 to 1000
Goelectric sounding (according to spread)	560 to 1100
Induced polarization	950 to 1300
Self-potential (> 200 electrodes → 1000 \$)	350 to 1400
Electromagnetic mapping + VLF, TDEM	510 to 850
Georadar	900 to 1500
Seismic refraction	1000 to 2200
Seismic reflection	2000 to 10000

(VOGELSANG, 1993)

**MODULO 2: TEORIA DE POTENCIAL
DESCRIPTIVA**

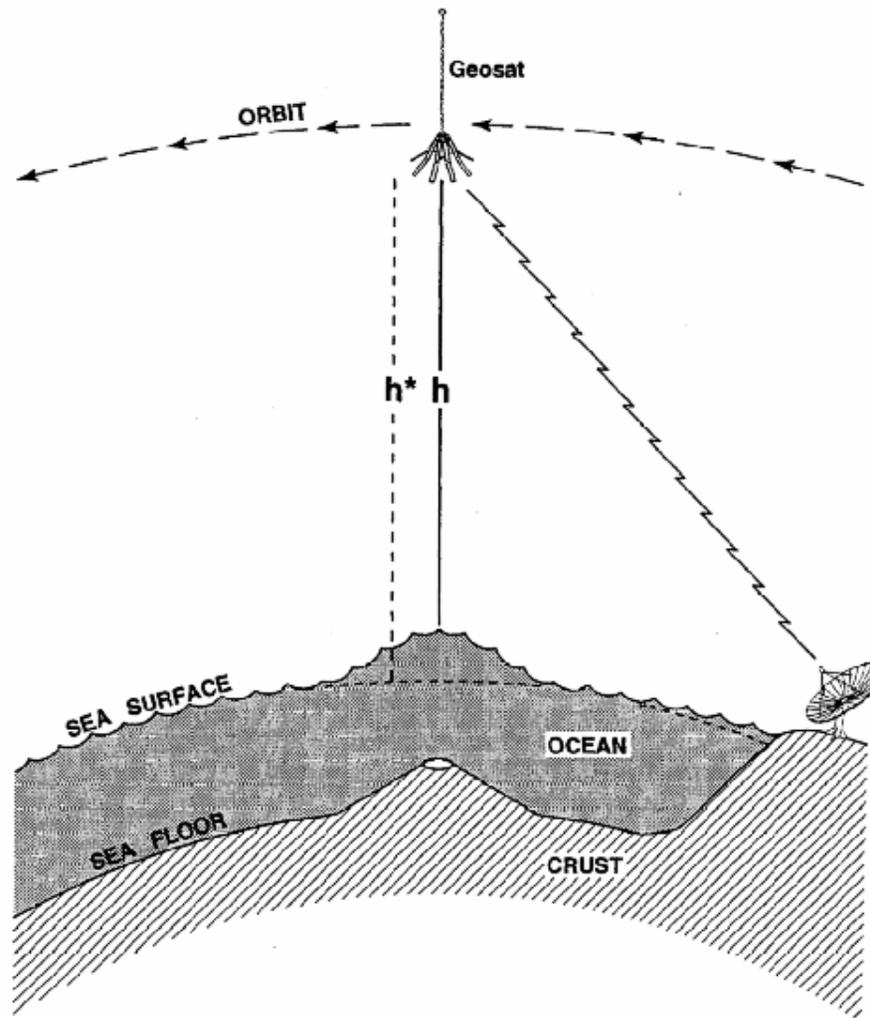
**SATELITAL (CONTINENTAL)
REGIONAL (MARINA-TERRESTRE)
LOCAL (EXPLORACION)**

MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA

GRAVEDAD:

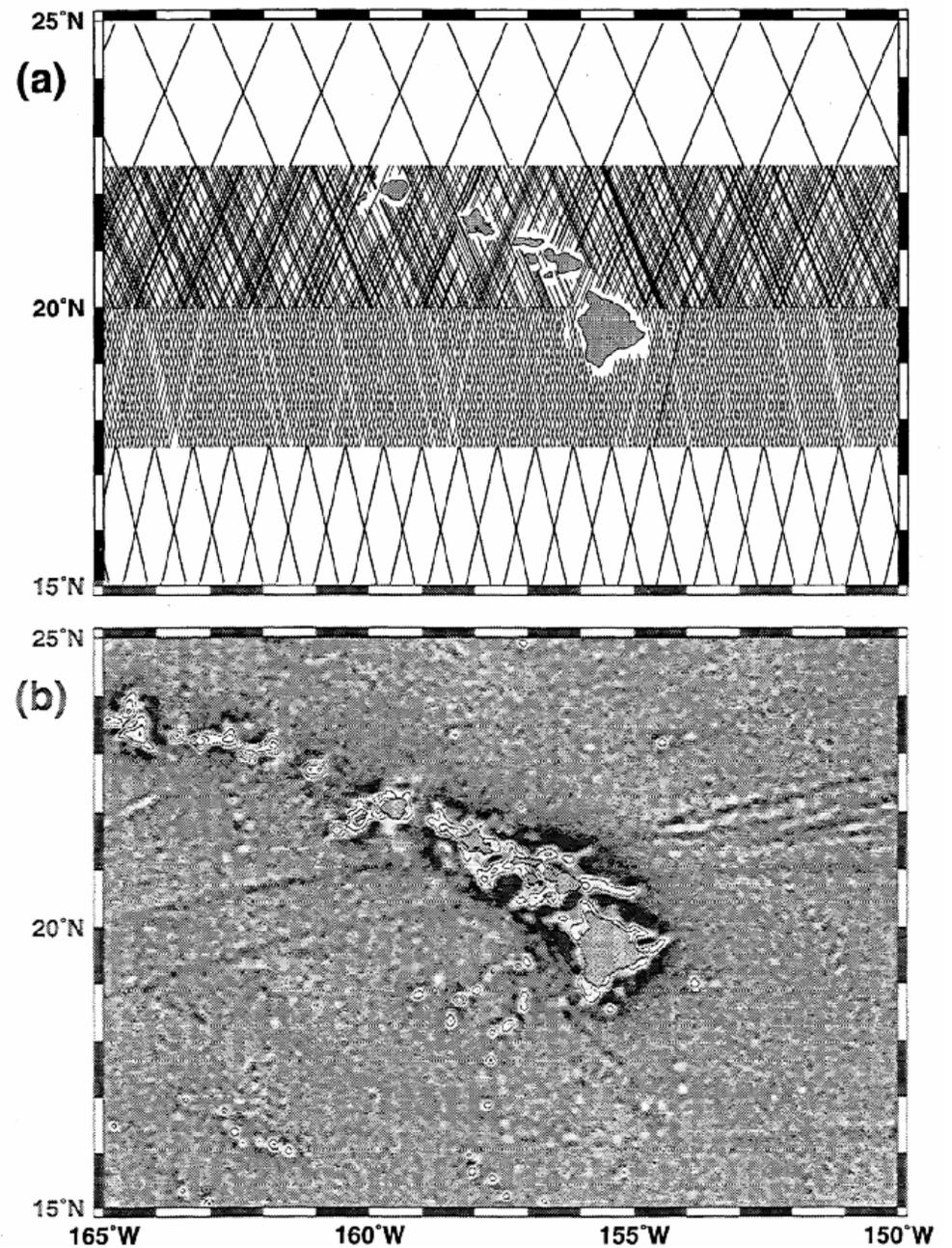
Gravedad Satelital, Sandwell-Smith, 1997

Geosat: órbita 800 km altitud



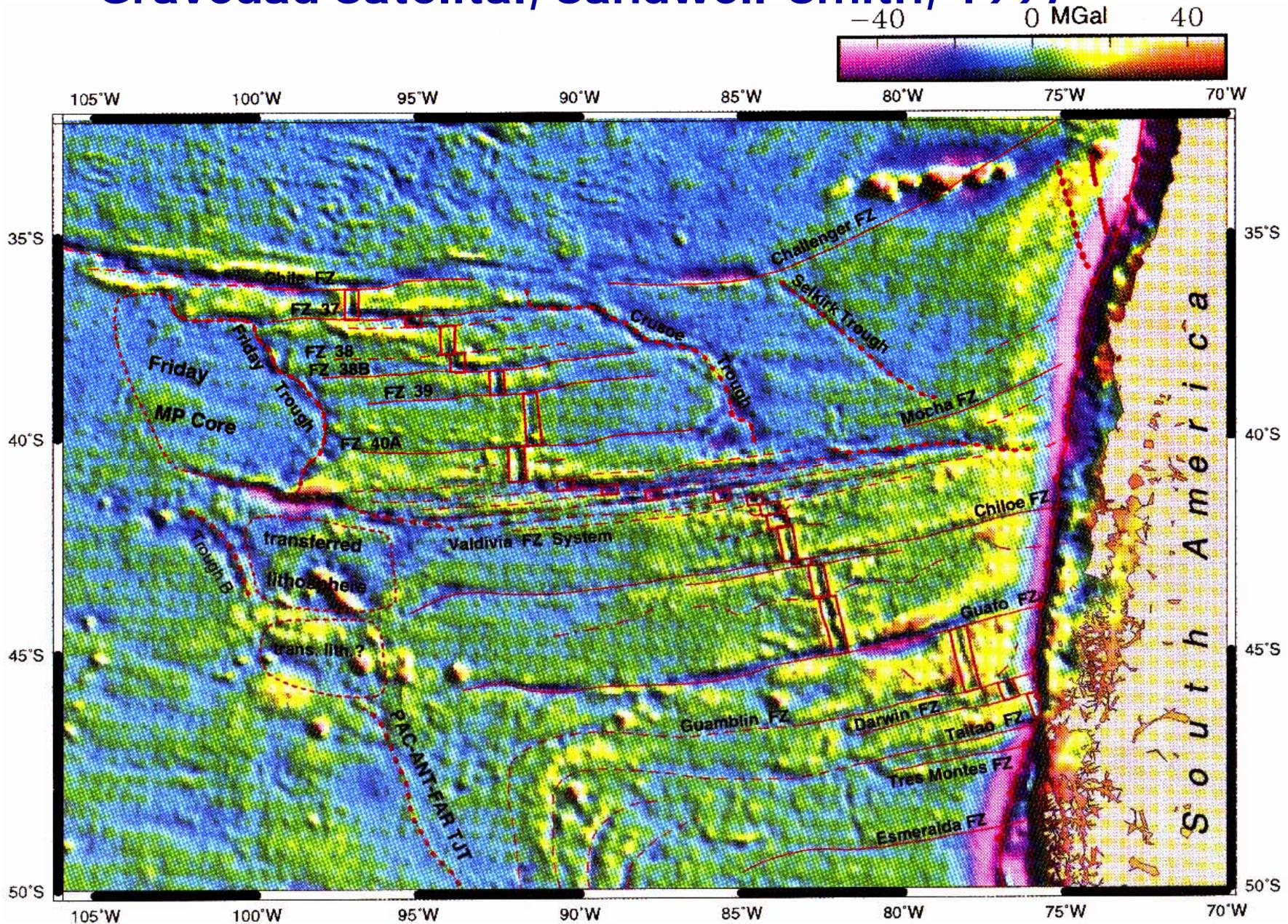
MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA

Gravedad Satelital, Sandwell-Smith, 1997



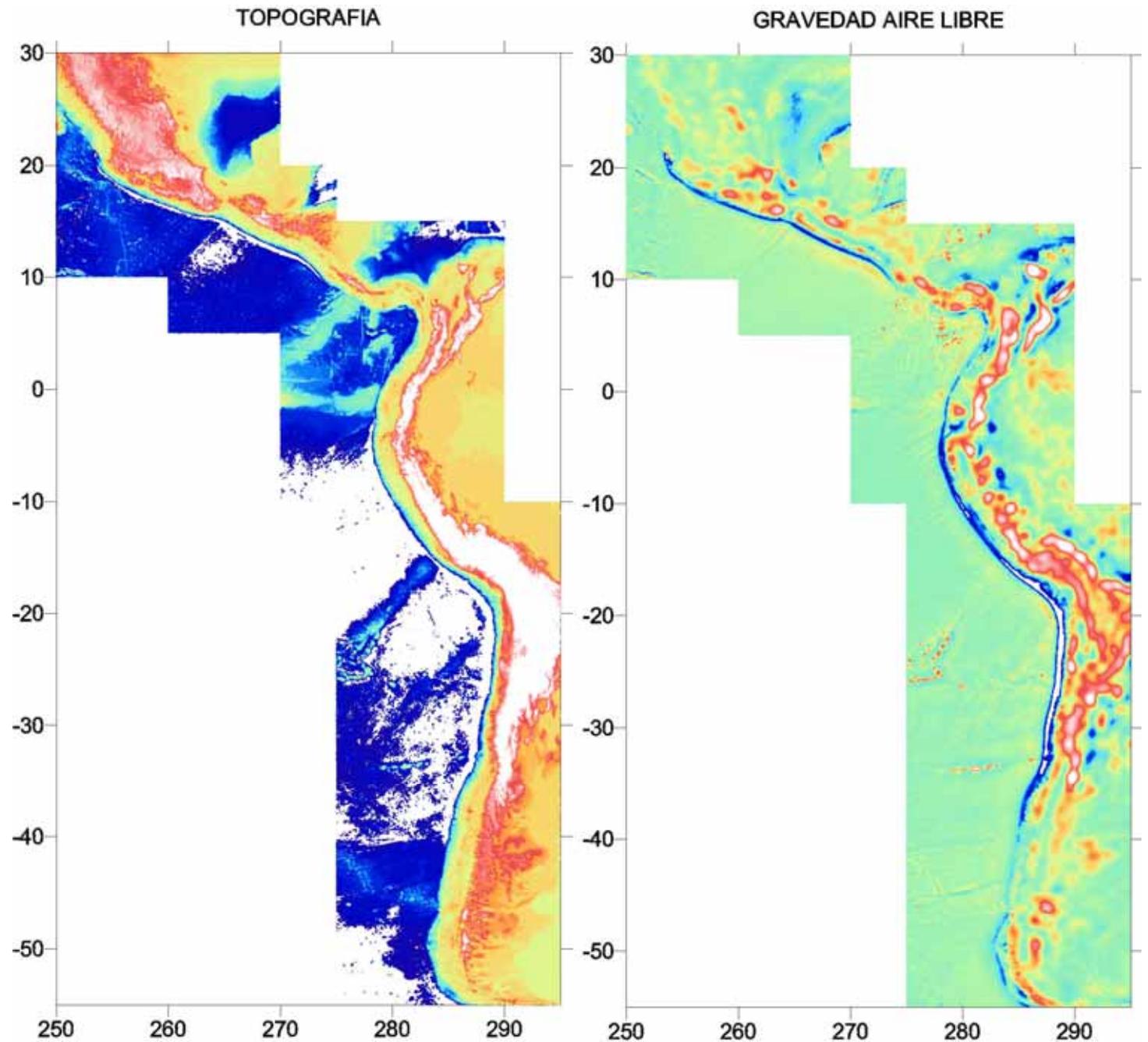
MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA

Gravedad Satelital, Sandwell-Smith, 1997

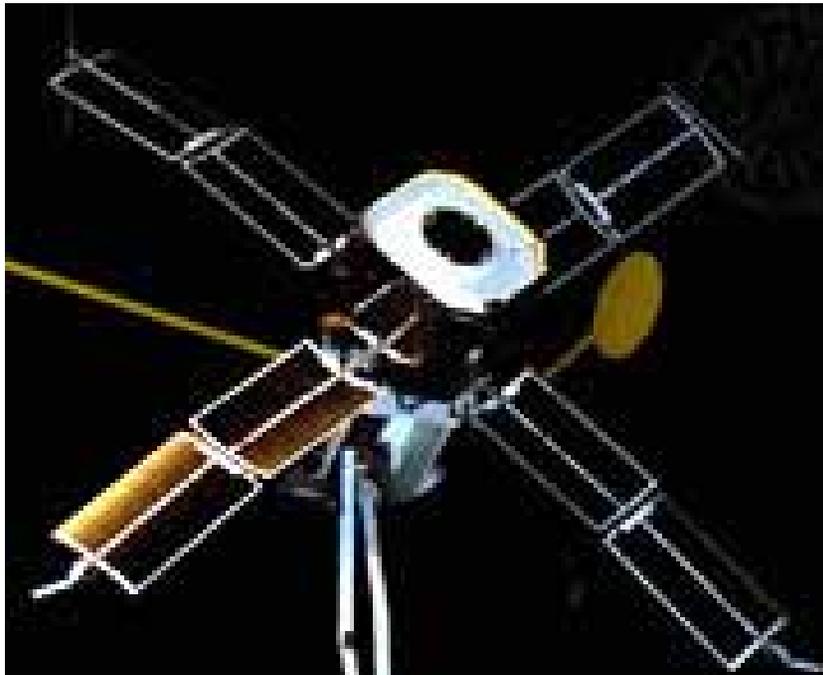
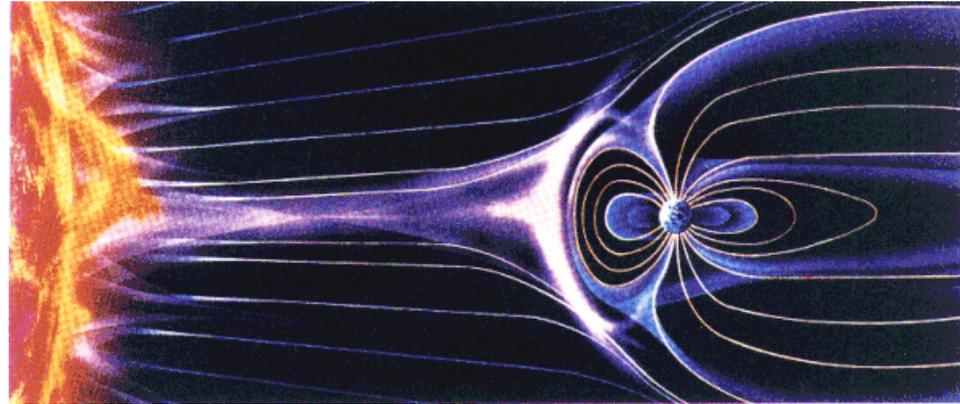


MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA

GRAVEDAD SATELITAL SUD- AMERICA



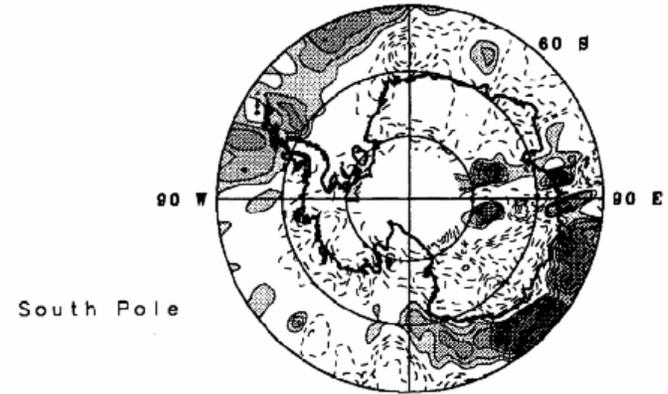
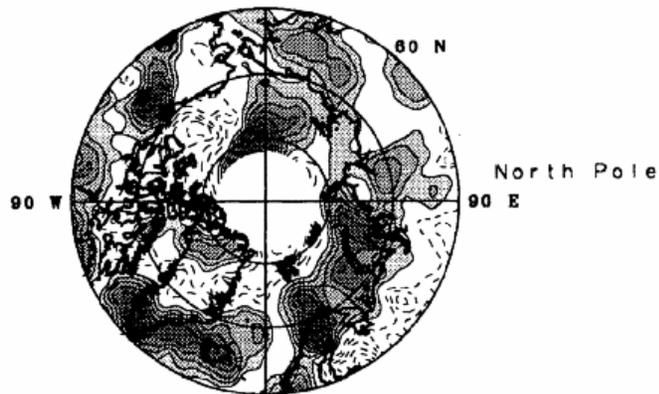
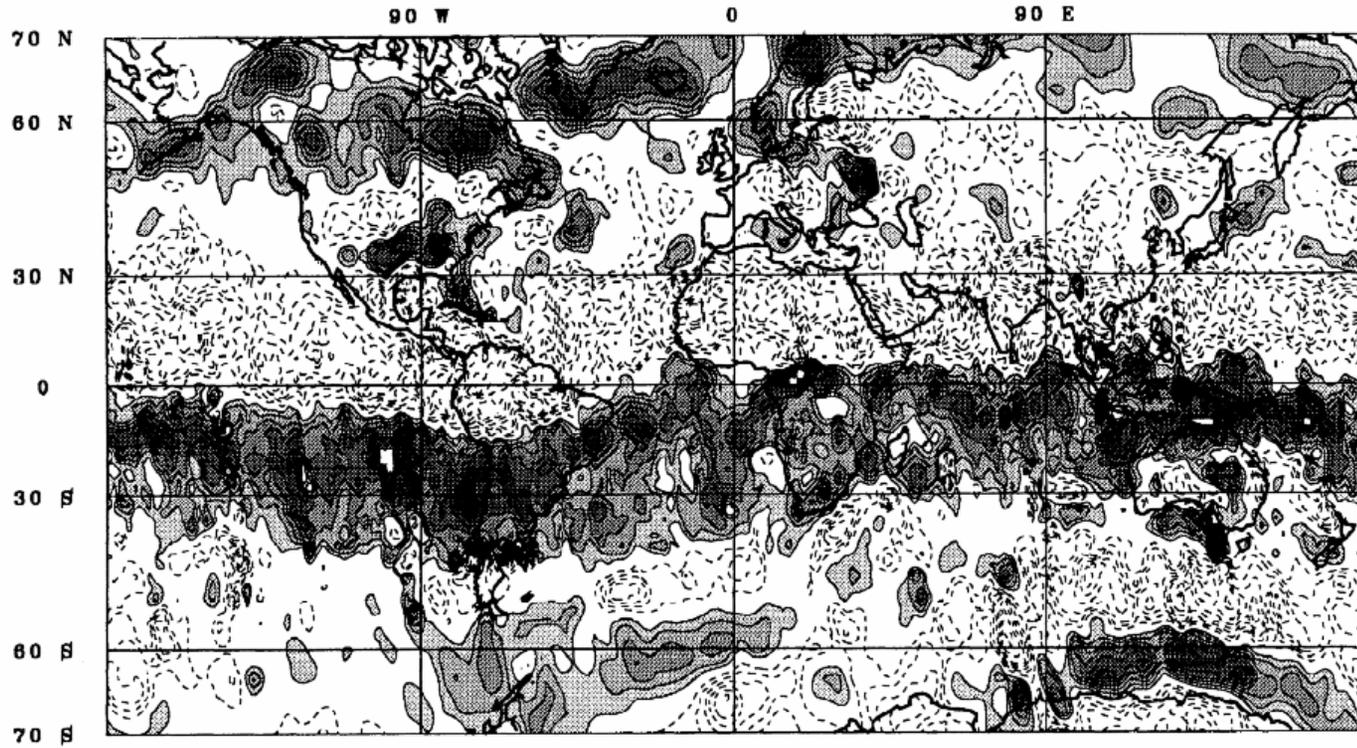
MAGNETISMO: MAGSAT



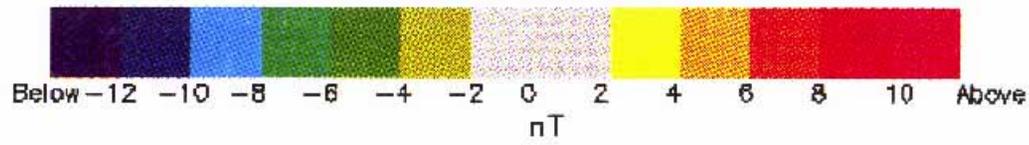
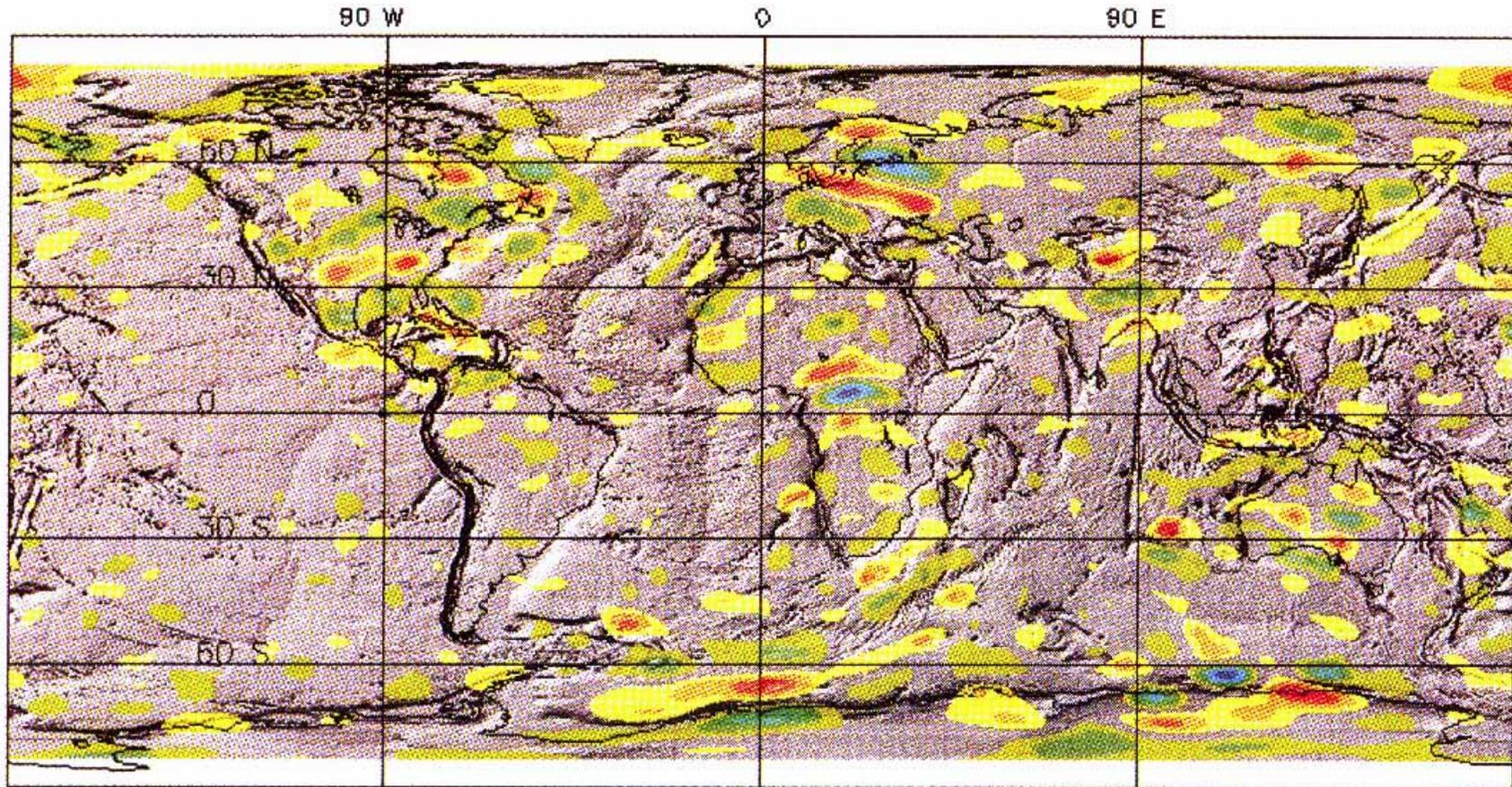
MAGNETOMETRIA SATELITAL: PROYECTO MAGSAT

RAVAT ET AL.: GLOBAL MAGSAT MAGNETIC ANOMALIES

20,115



MAGNETOMETRIA SATELITAL: PROYECTO MAGSAT



MAGNETOMETRIA SATELITAL: PROYECTO MAGSAT

15,434

DYMENT AND ARKANI-HAMED: REMANENT MAGNETIZATION CONTRIBUTION

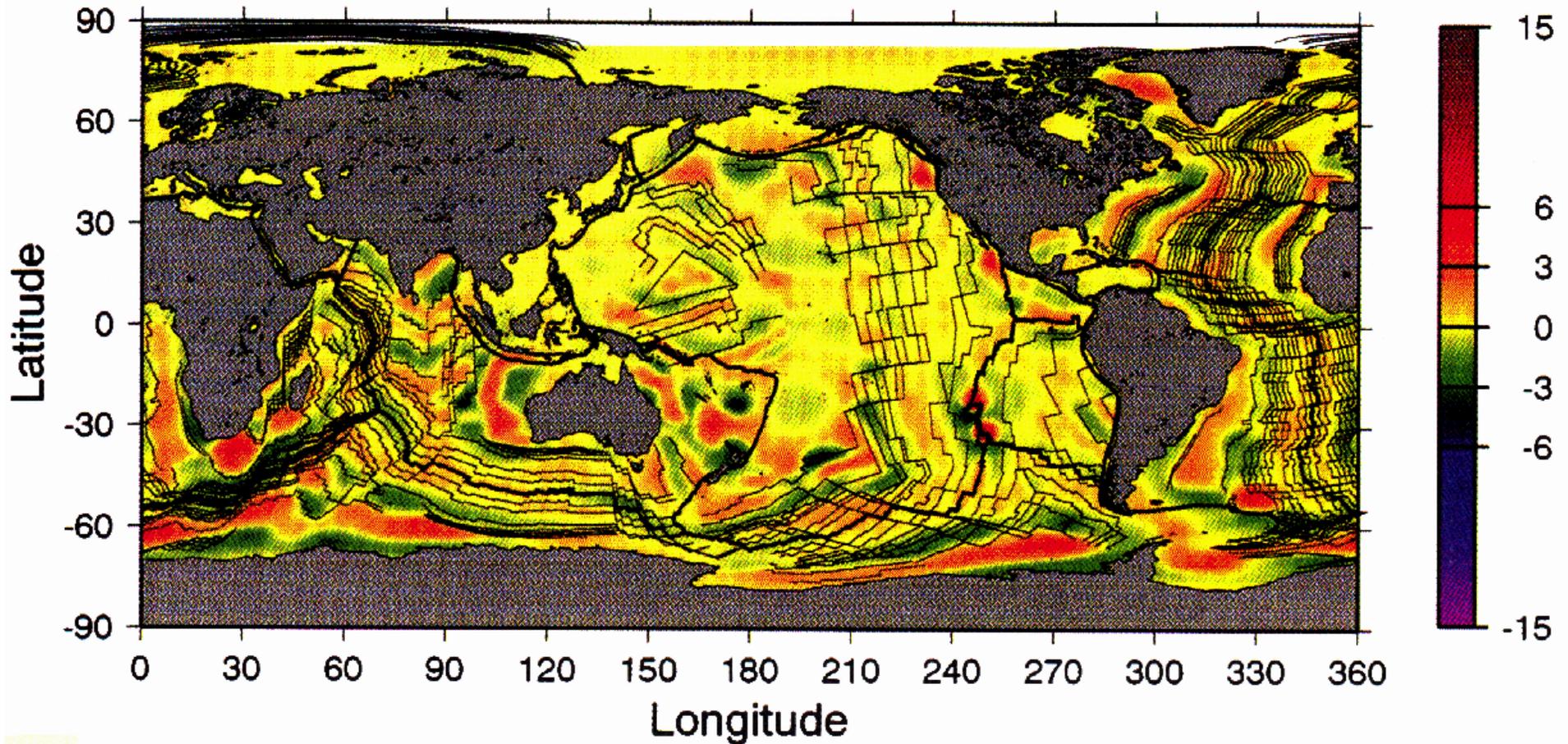
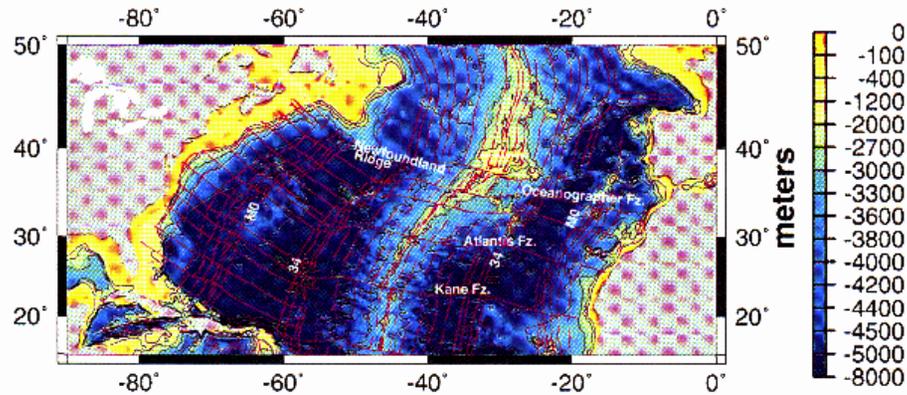


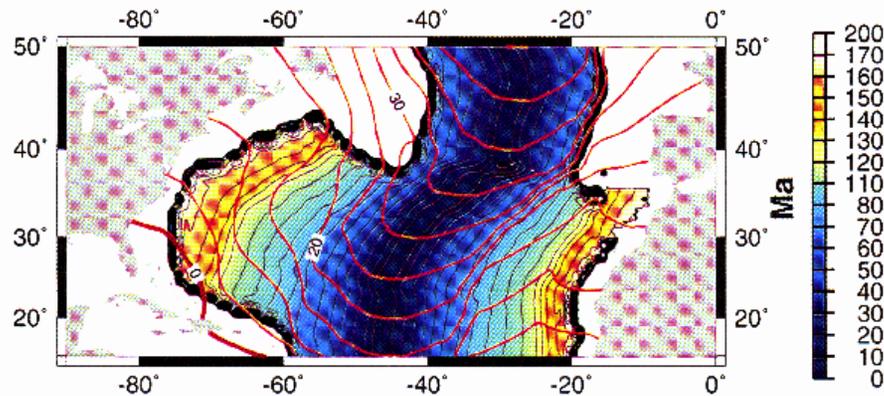
Plate 2a. Magnetic anomaly (nanoteslas) computed at satellite altitude (400 km) for model 1. Spherical harmonics of degree and orders 15-60 are retained for comparison with Figure 1. Thick lines are plate boundaries; thin lines are isochrons of seafloor spreading [*Royer et al., 1992*].

MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA

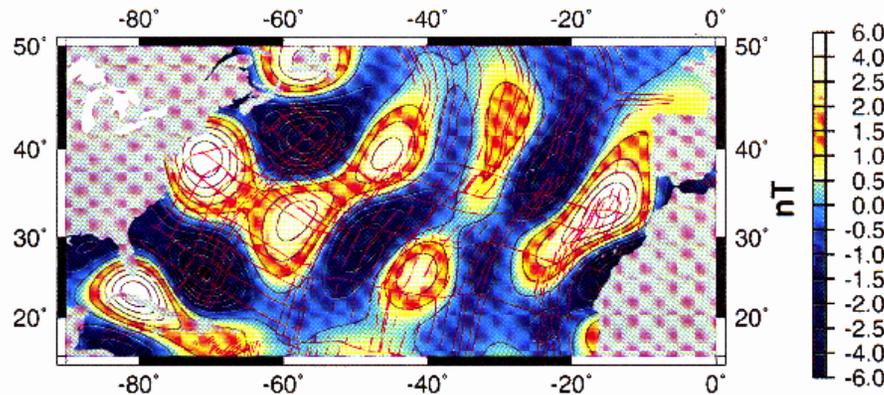
a. Tectonic Map



b. Age & Paleo Incl.



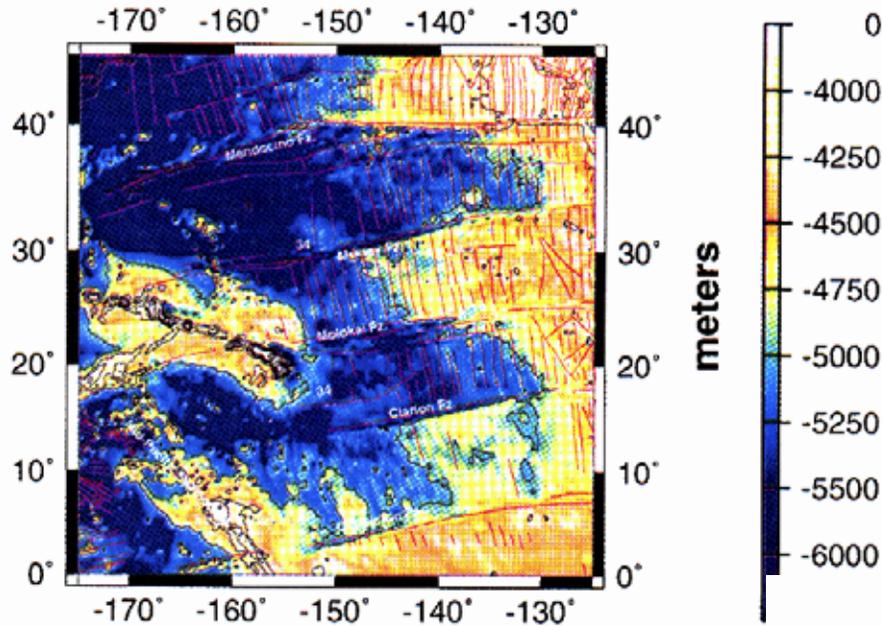
c. Magsat



MAGNETOMETRIA SATELITAL: PROYECTO MAGSAT: ATLANTICO

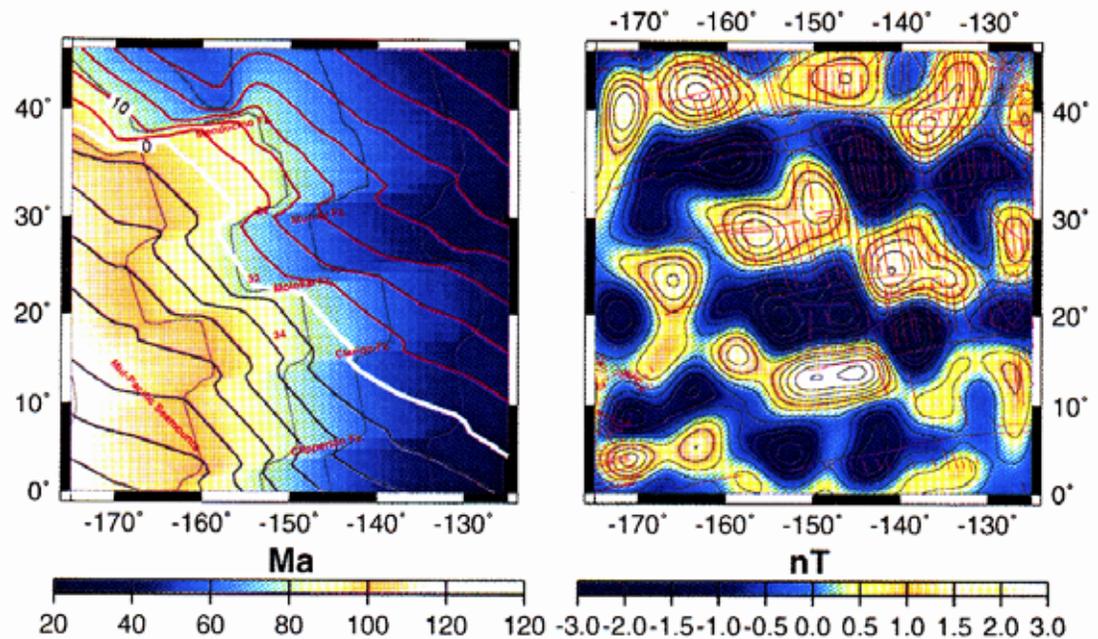
MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA

MAGNETOMETRIA SATELITAL: PROYECTO MAGSAT: PACIFICO

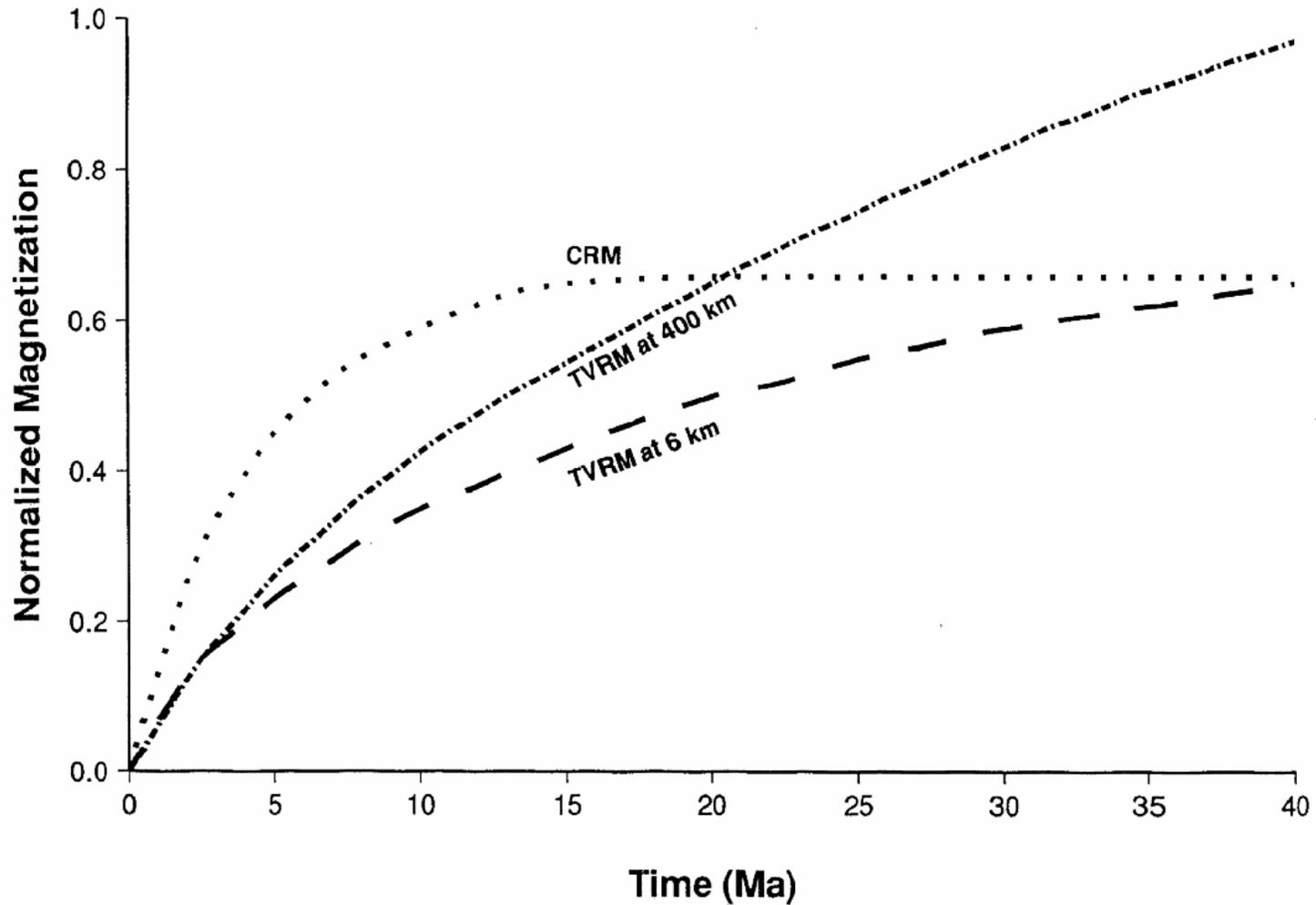


b. Age & Paleo Incl.

c. Magsat



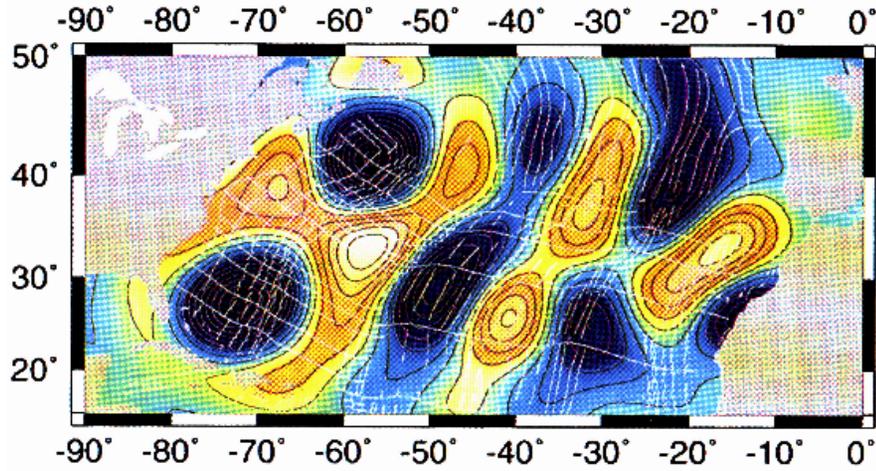
MAGNETOMETRIA SATELITAL: MODELO DE REMAGNETIZACION N PERIODOS DE POLARIDAD MAGNETICA ESTABLE



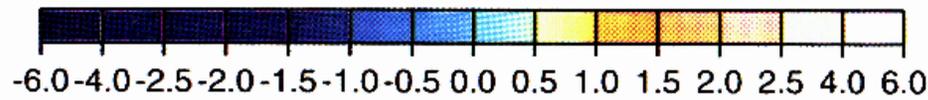
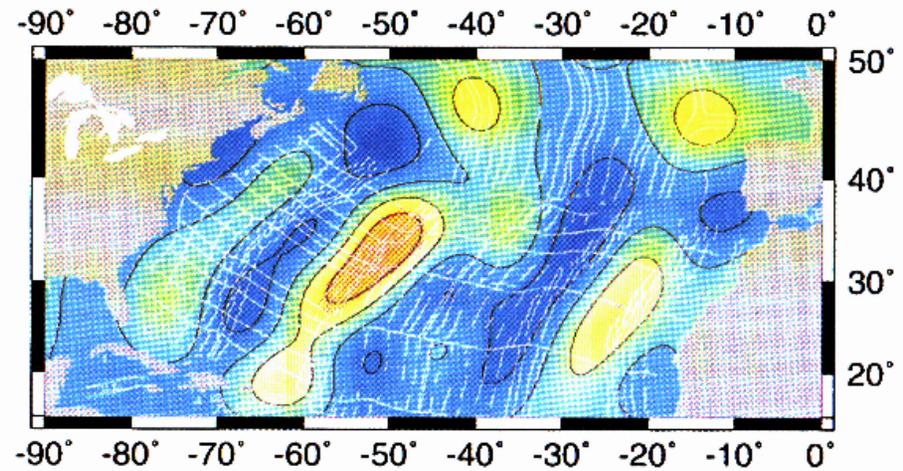
MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA

MAGNETOMETRIA SATELITAL: PROYECTO MAGSAT: MODELACION ATLANTICO

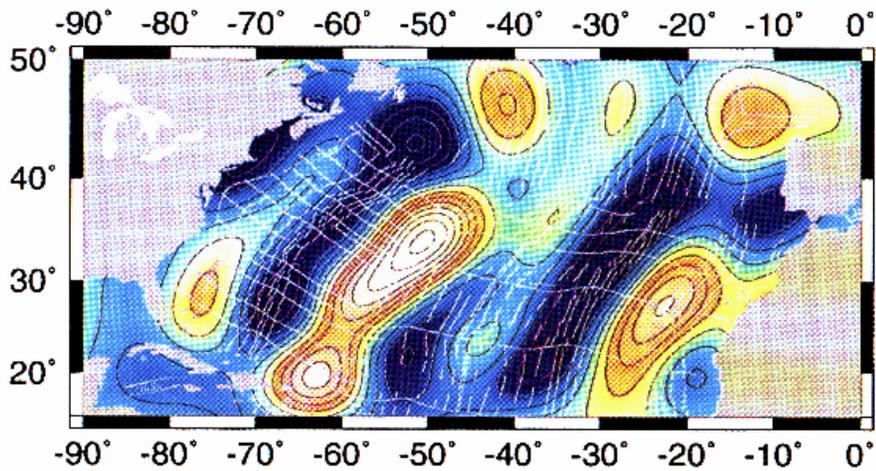
a. Magsat



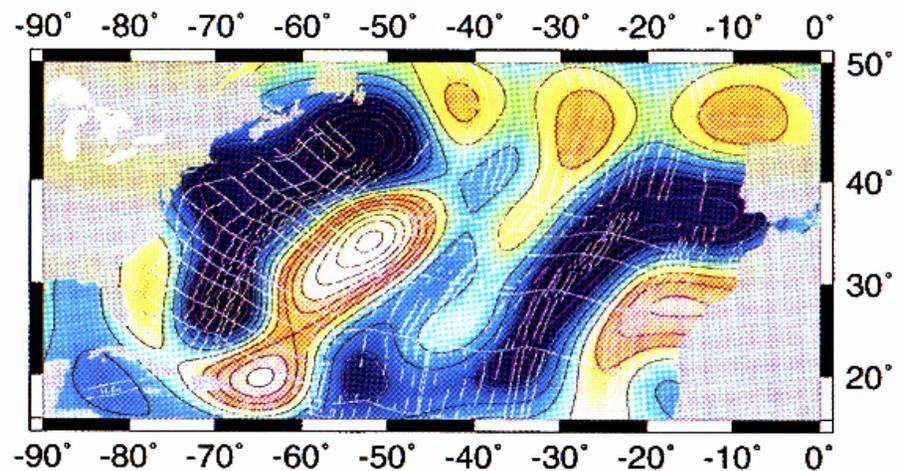
b. TRM



c. CRM

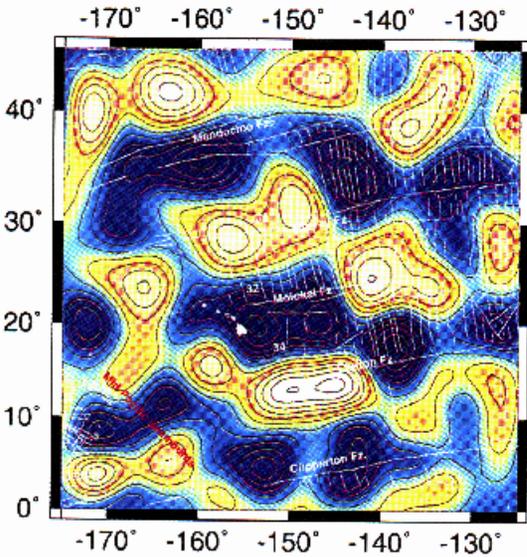


d. TVRM

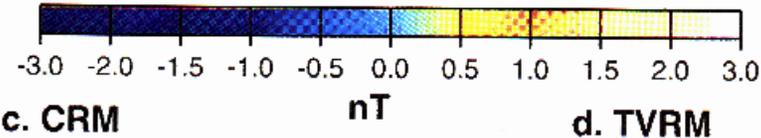
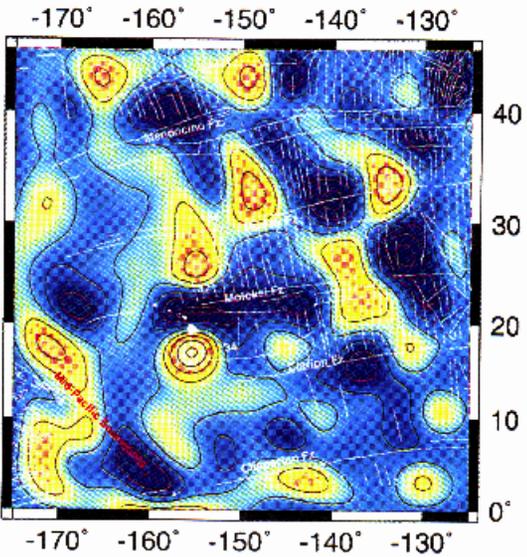


**MÓDULO II.- GEOFISICA DE
POTENCIAL DESCRIPTIVA**

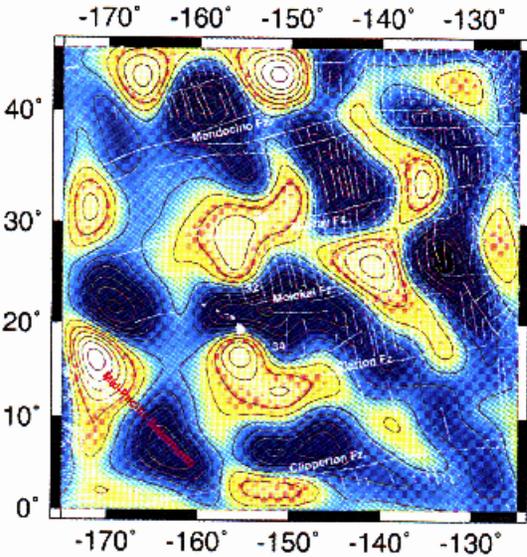
a. MAGSAT



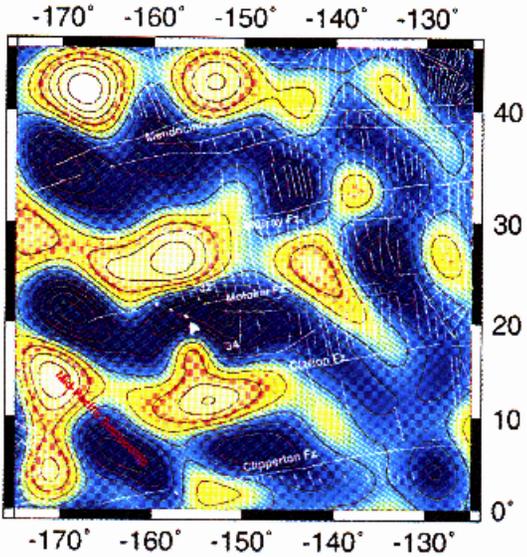
b. TRM



c. CRM



d. TVRM

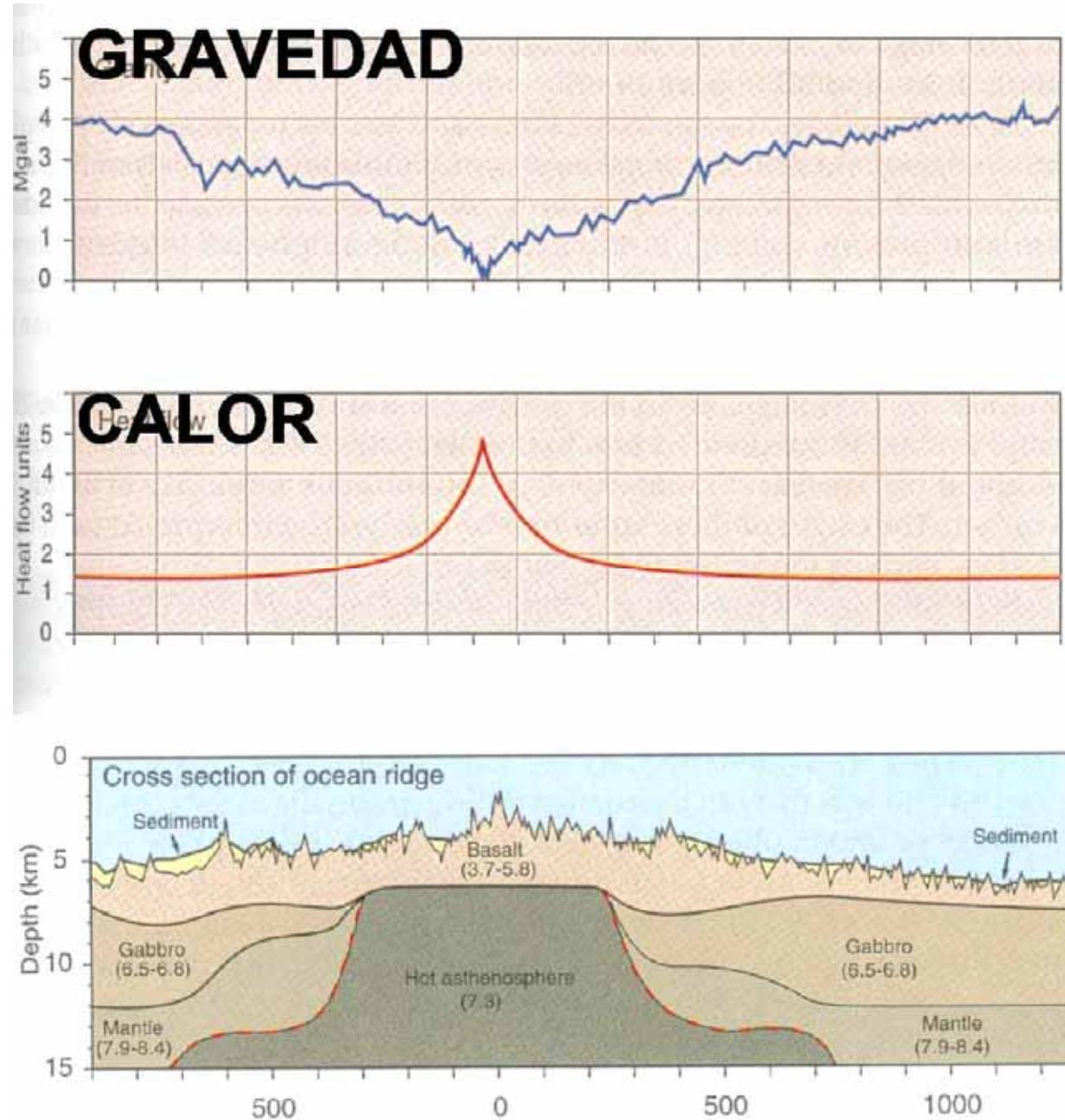


**MAGNETOMETRIA
SATELITAL:
PROYECTO
MAGSAT:
MODELACION
PACIFICO**

**REGIONAL: RESPUESTA MAGNETICA Y
GRAVIMETRICA EN MARGENES DE PLACA**

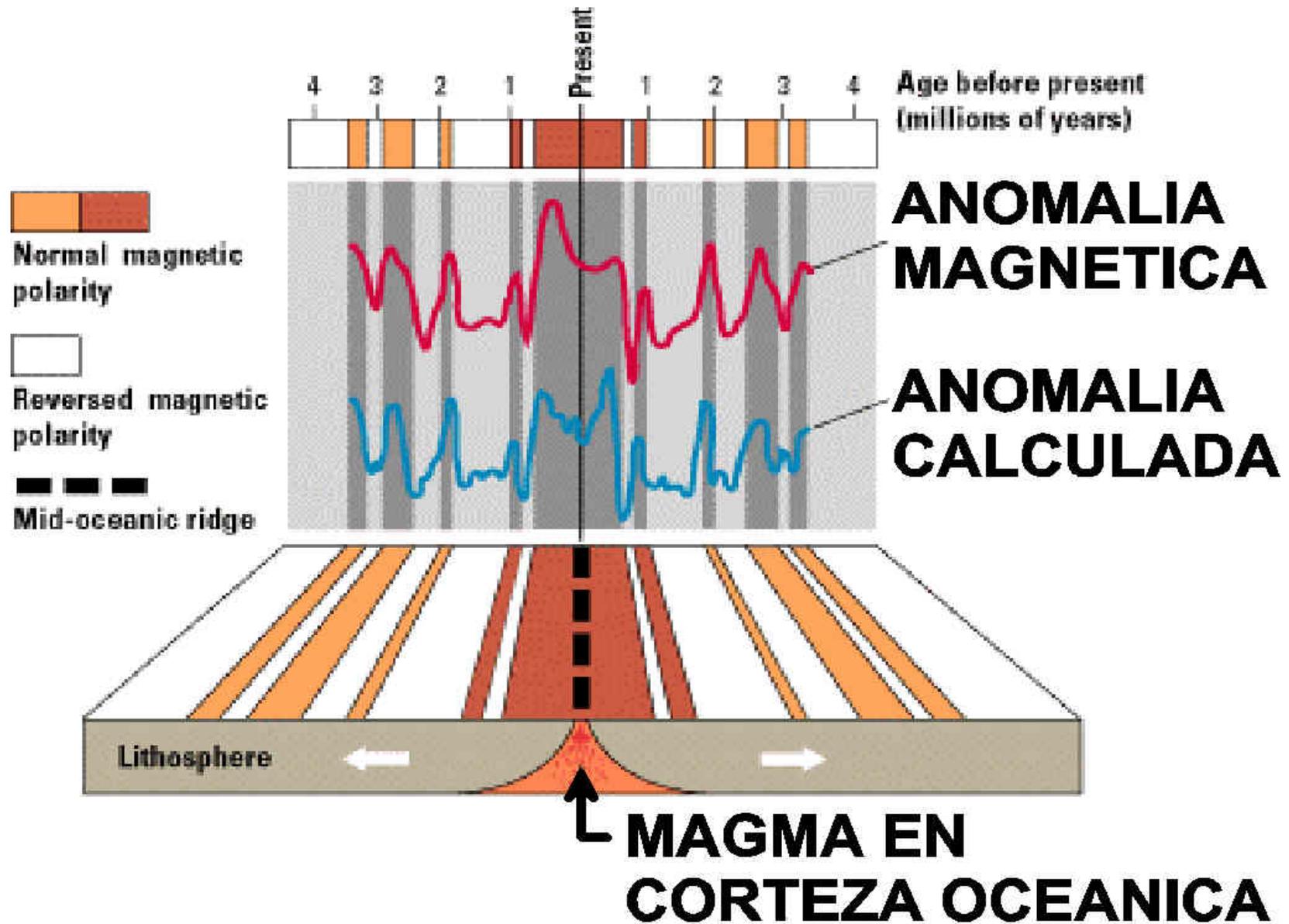
MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA

RESPUESTA GRAVIMÉTRICA EN DORSAL OCEANICA



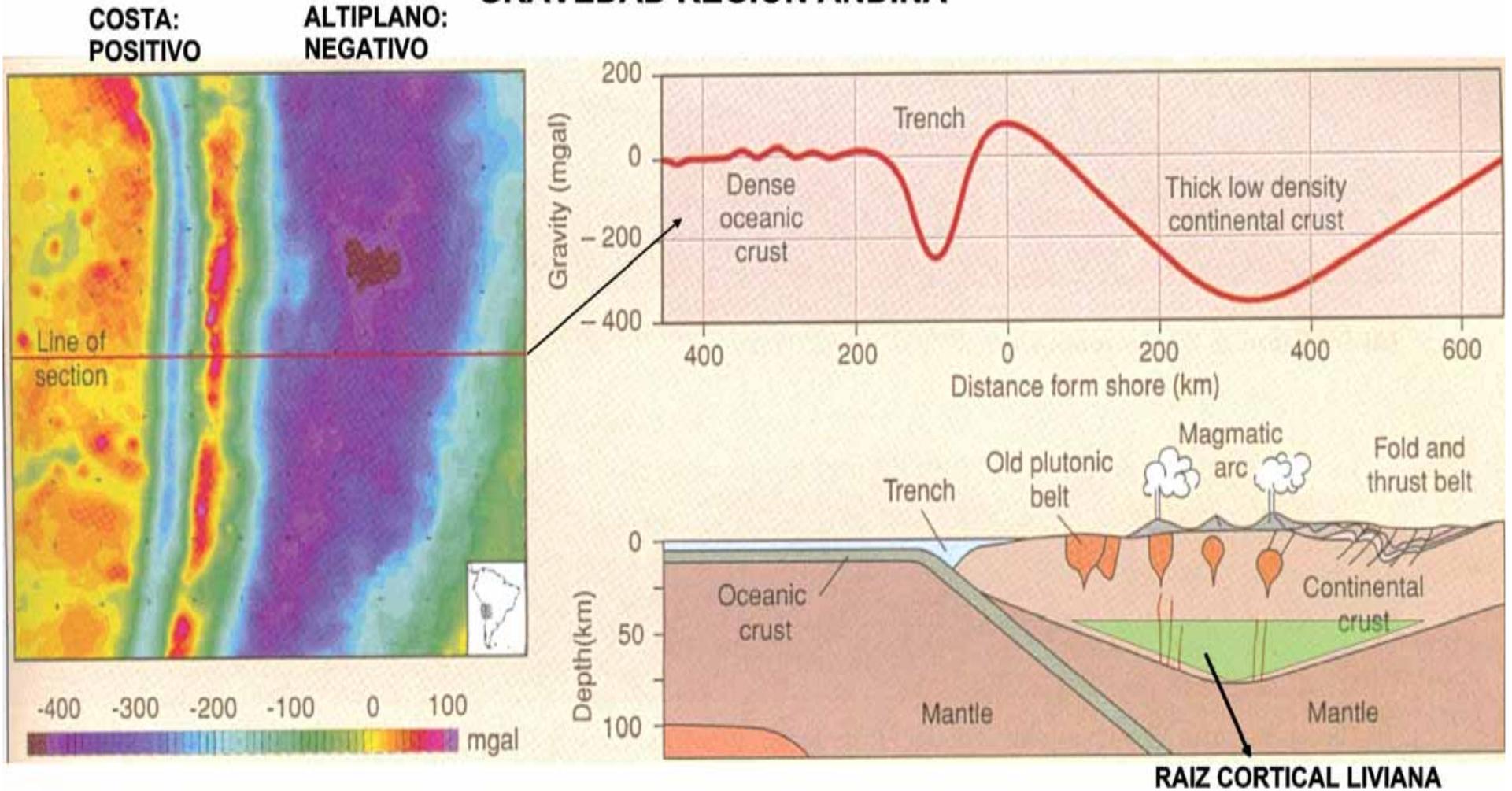
MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA

MARGEN DIVERGENTE: AL ENFRIARSE EL MAGMA ADQUIERE LA MAGNETIZACION DEL CAMPO MAGNETICO TERRESTRE

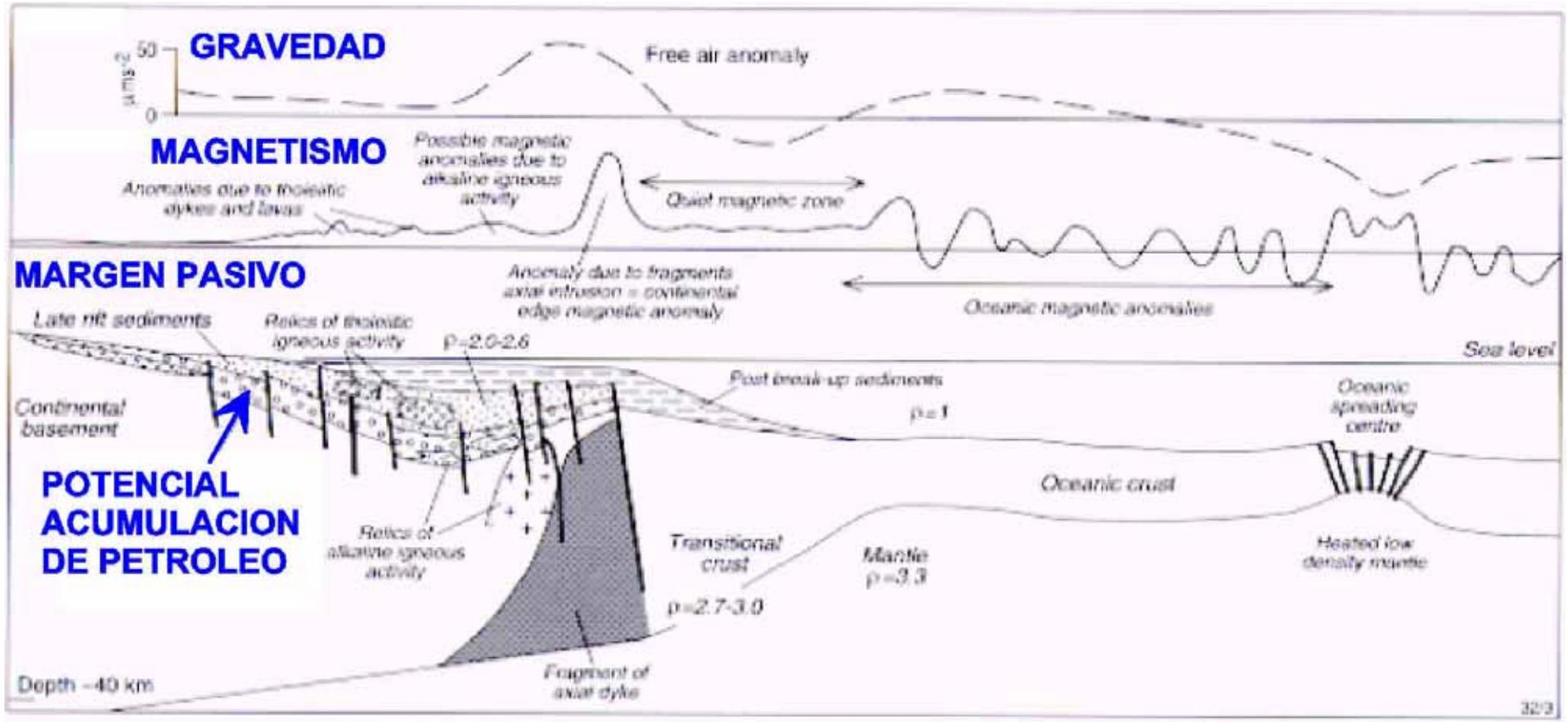


GRAVEDAD: MARGEN ACTIVO

GRAVEDAD REGION ANDINA



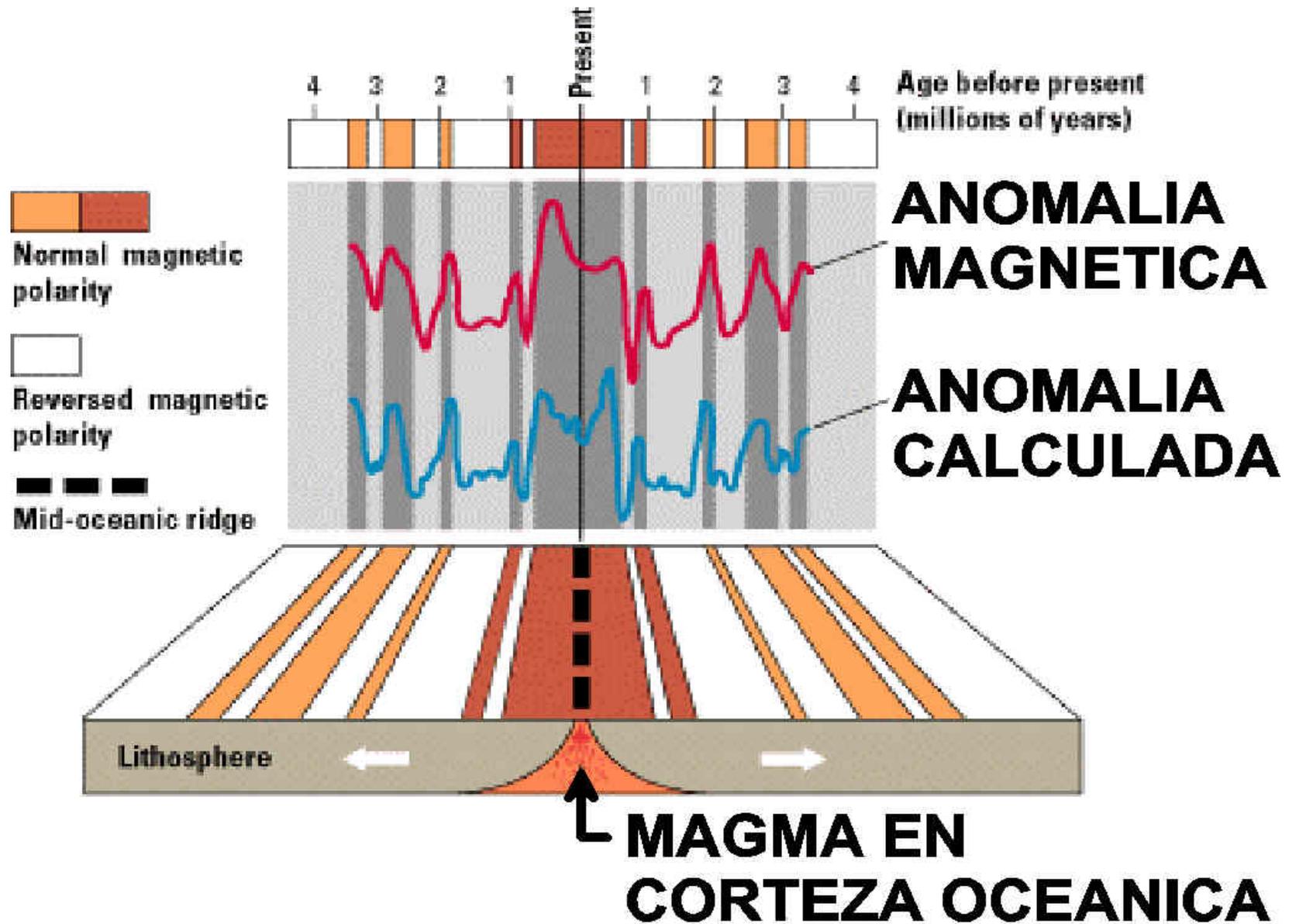
RESPUESTA MAG&GRAV EN MARGEN PASIVO



**MAGNETISMO REGIONAL: CORTEZA
OCEANICA**

MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA

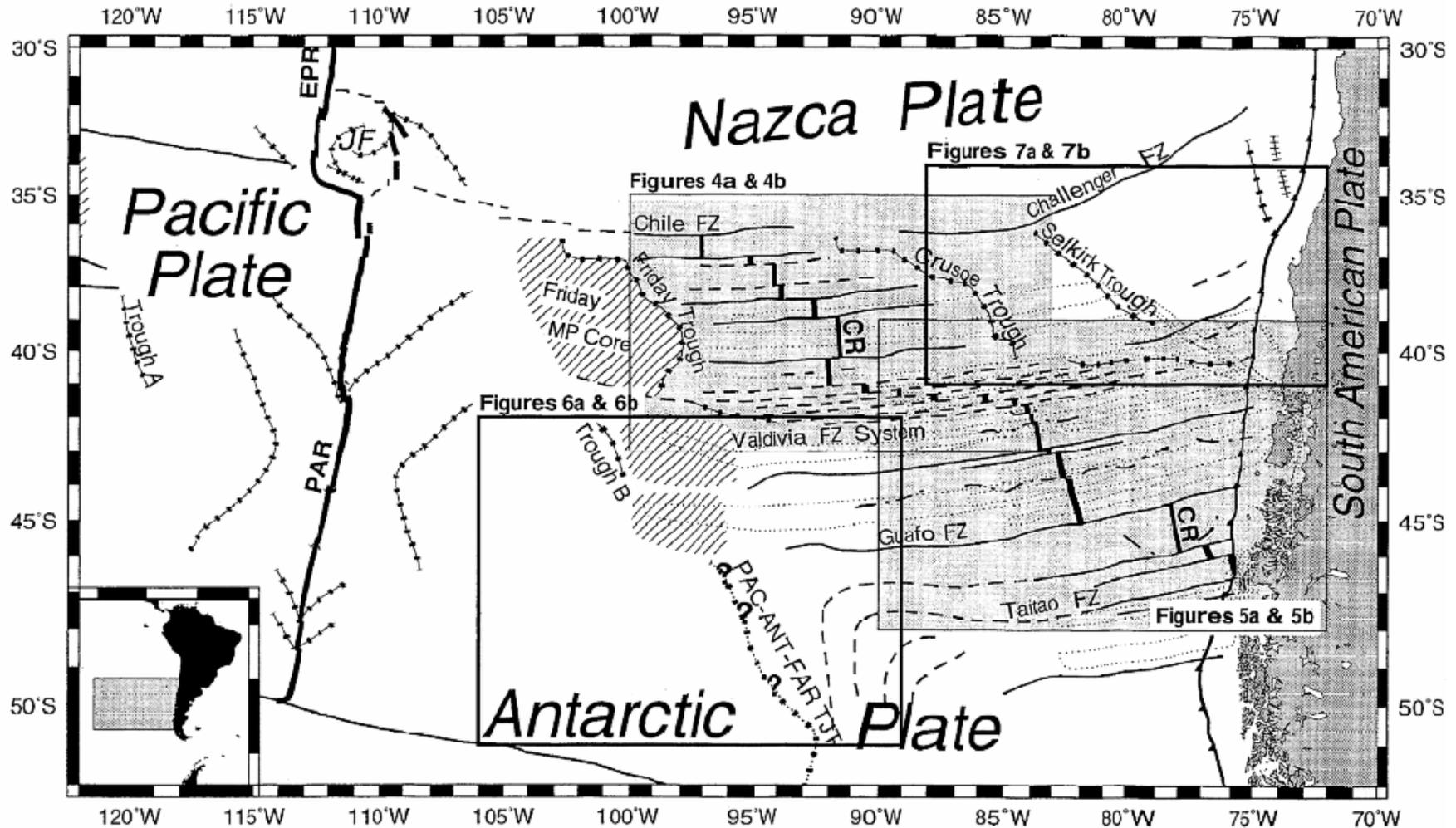
MARGEN DIVERGENTE: AL ENFRIARSE EL MAGMA ADQUIERE LA MAGNETIZACION DEL CAMPO MAGNETICO TERRESTRE



Anomalías magnéticas de fondo oceánico tratamiento clásico Tebbens, 1997

12,036

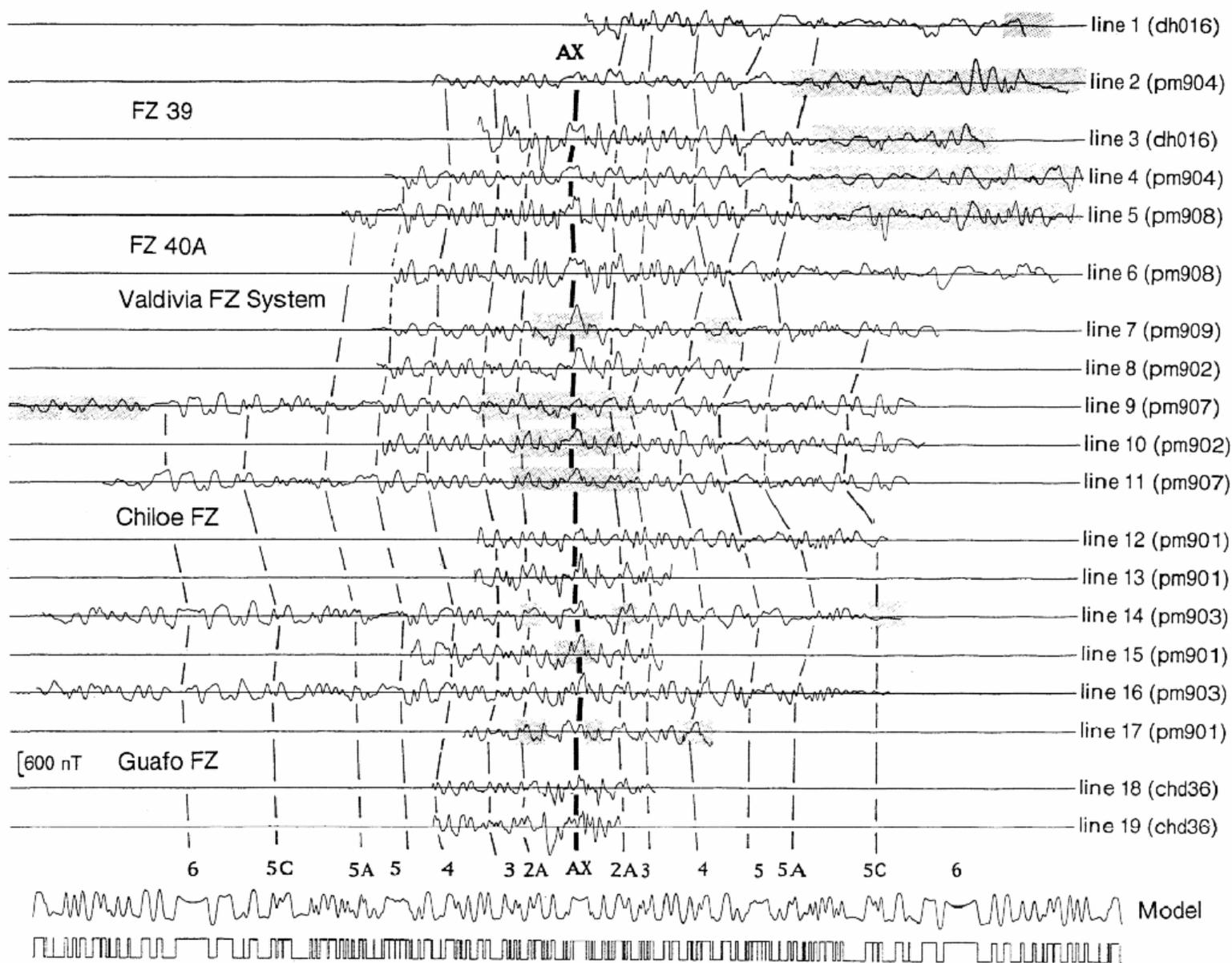
TEBBENS ET AL.: CHILE RIDGE TECTONIC FRAMEWORK



MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA

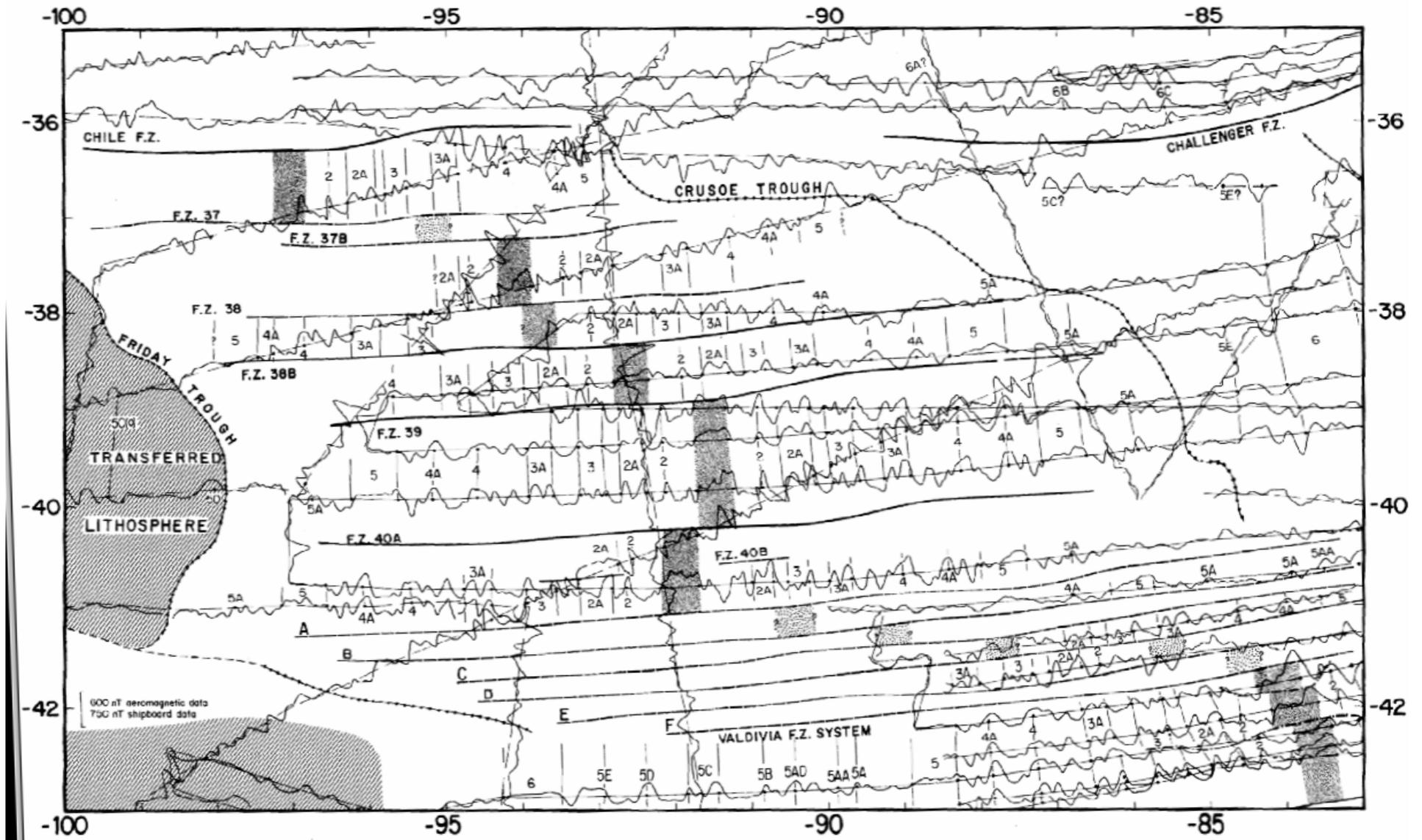
12,038

TEBBENS ET AL.: CHILE RIDGE TECTONIC FRAMEWORK



MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA

Interpretación tectónica



MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA

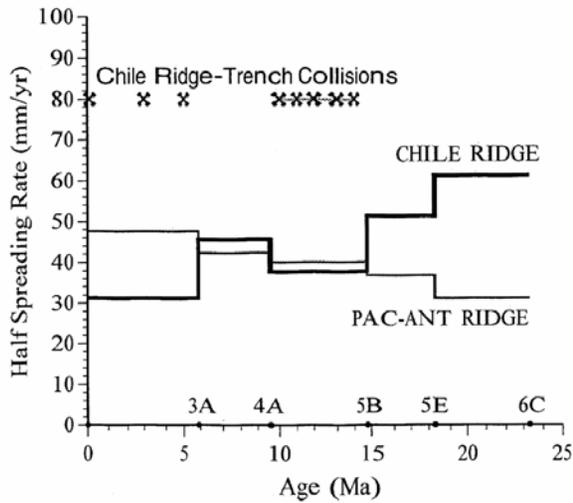
Interpretación tectónica



Figure 14. Tectonic interpretation of the Chile ridge. The 1990 LDEO-NRL aeromagnetic survey tracks are shown in light

Implicancias:

Cinemática



Reconstrucción de placas

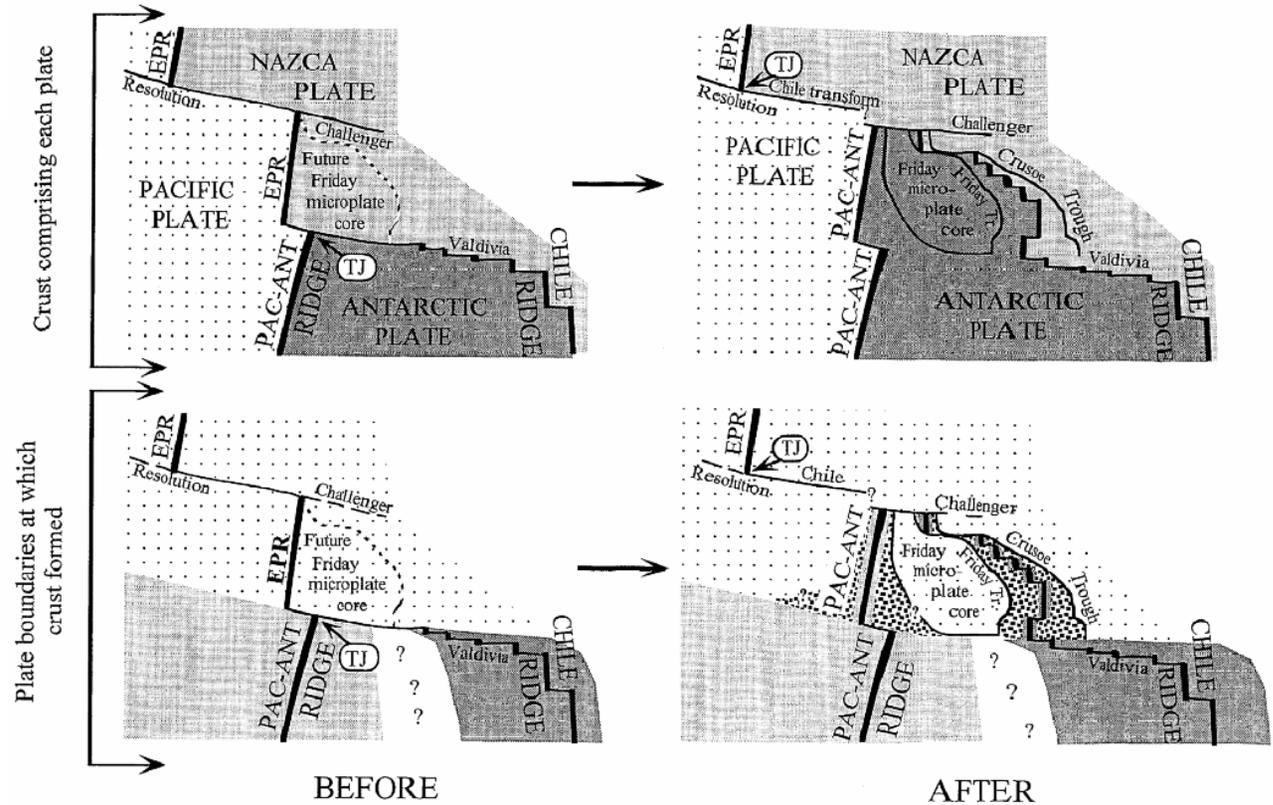
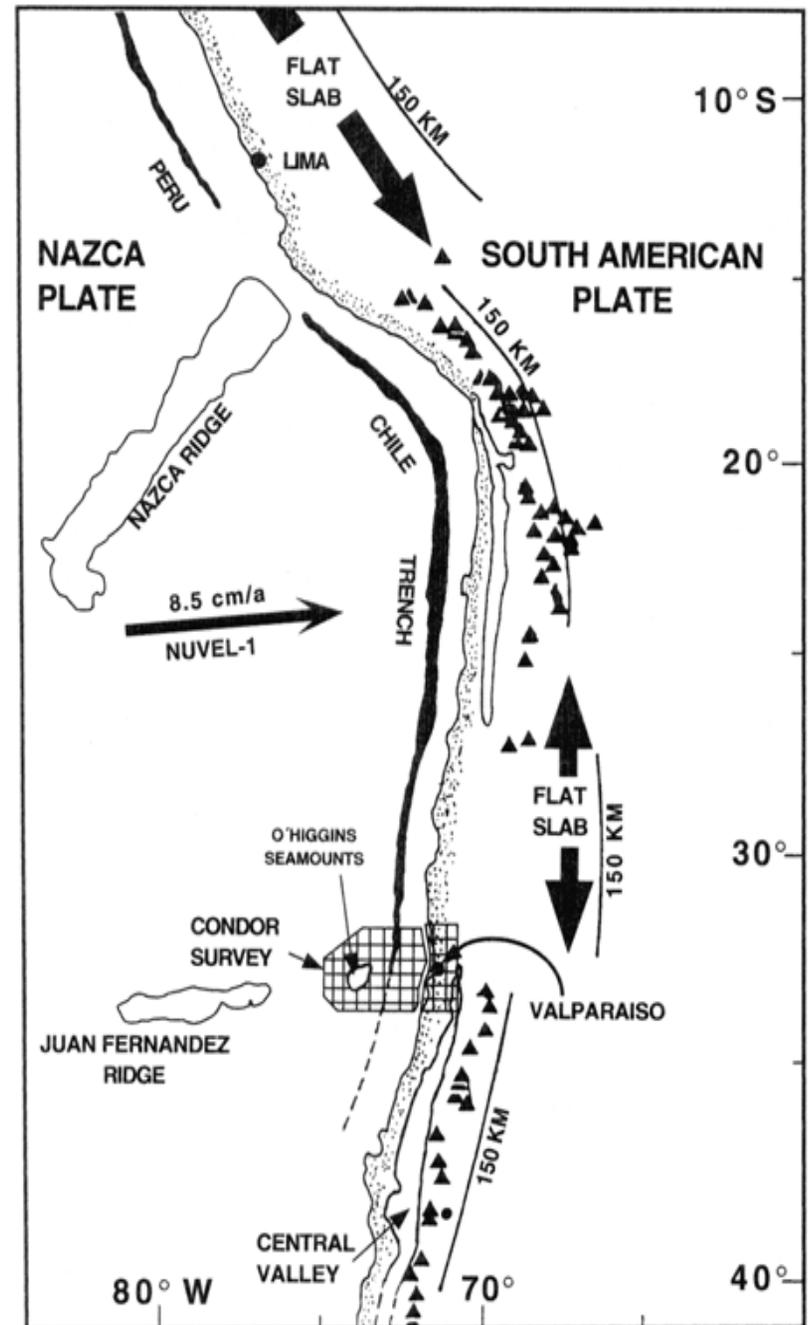


Figure 13. Schematic plate reconstruction (left) before and (right) after the chron 5A plate boundary

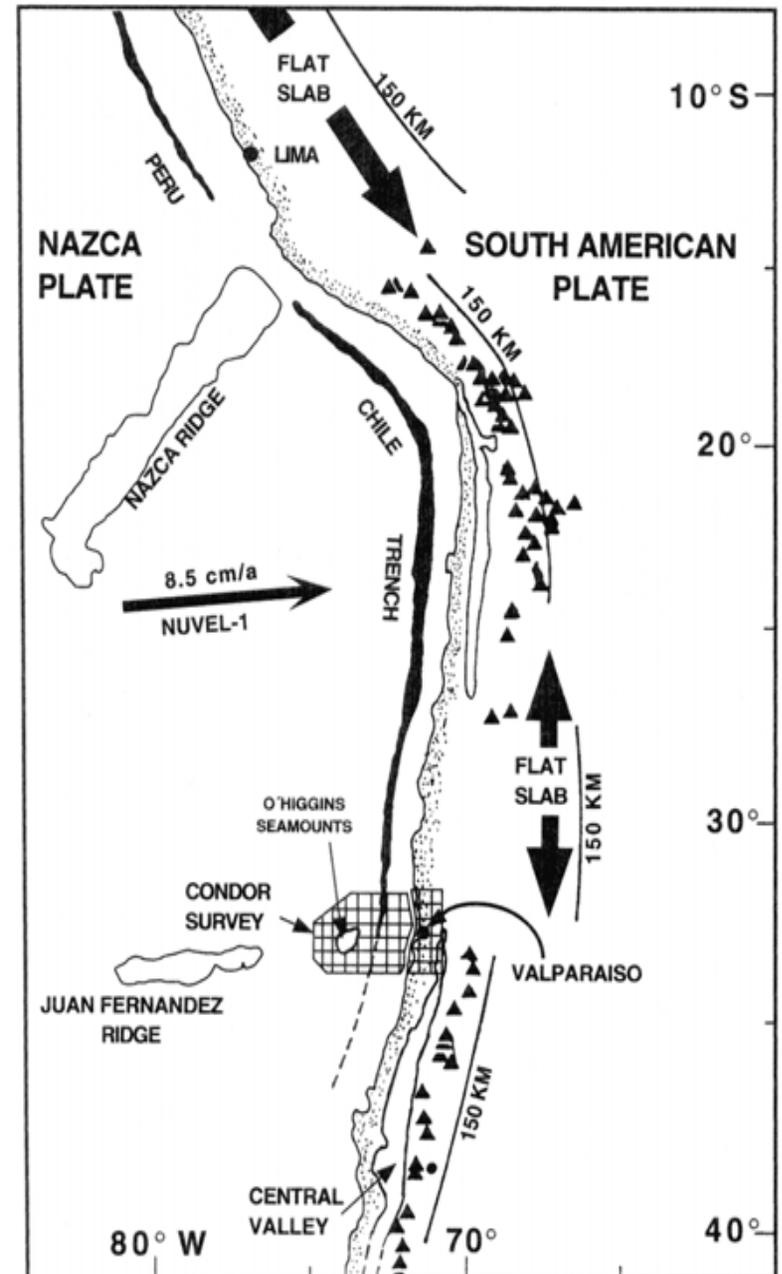
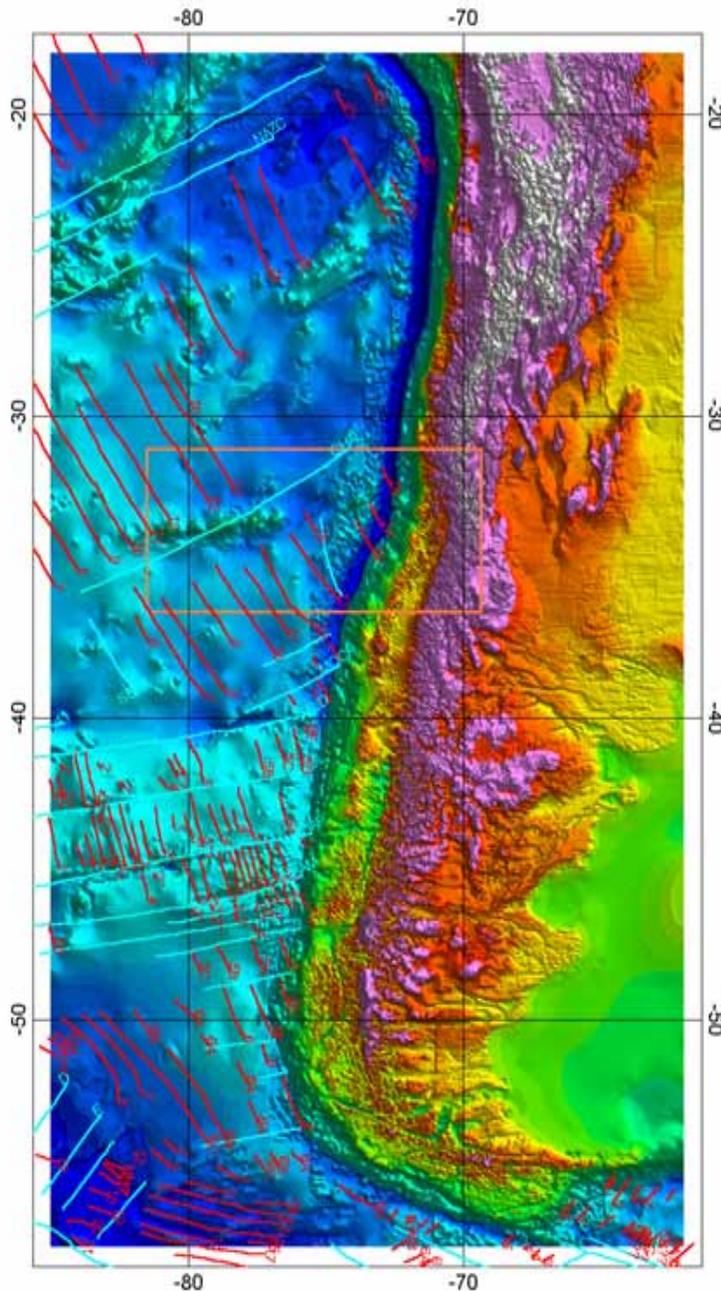
MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA

PROYECTO CONDOR: MAGNETISMO EN CORTEZA OCEANICA ASOCIADA A LA COLISION DE LA DORSAL DE JUAN FERNANDEZ

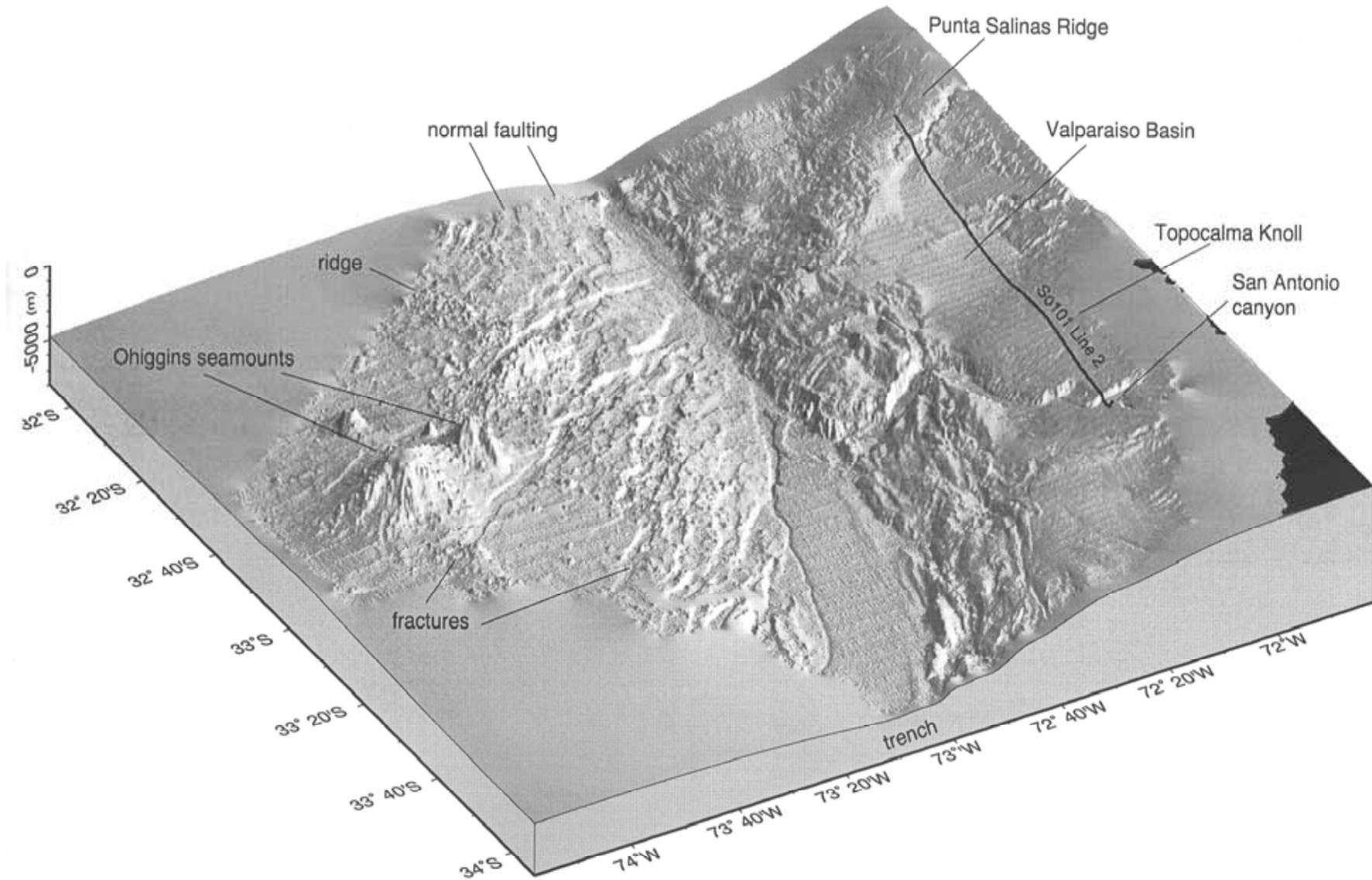


MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA

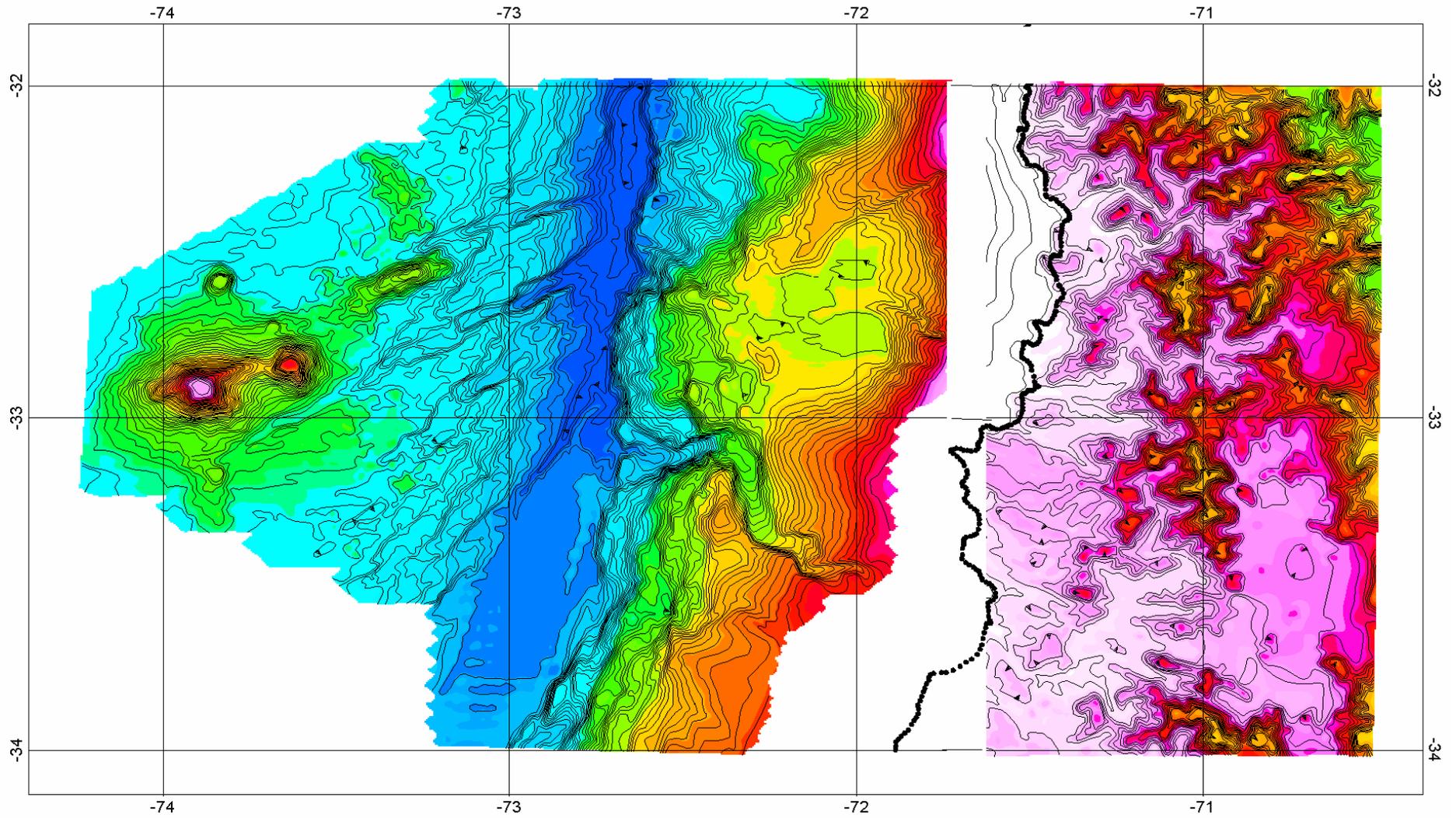
AREA DE TRABAJO



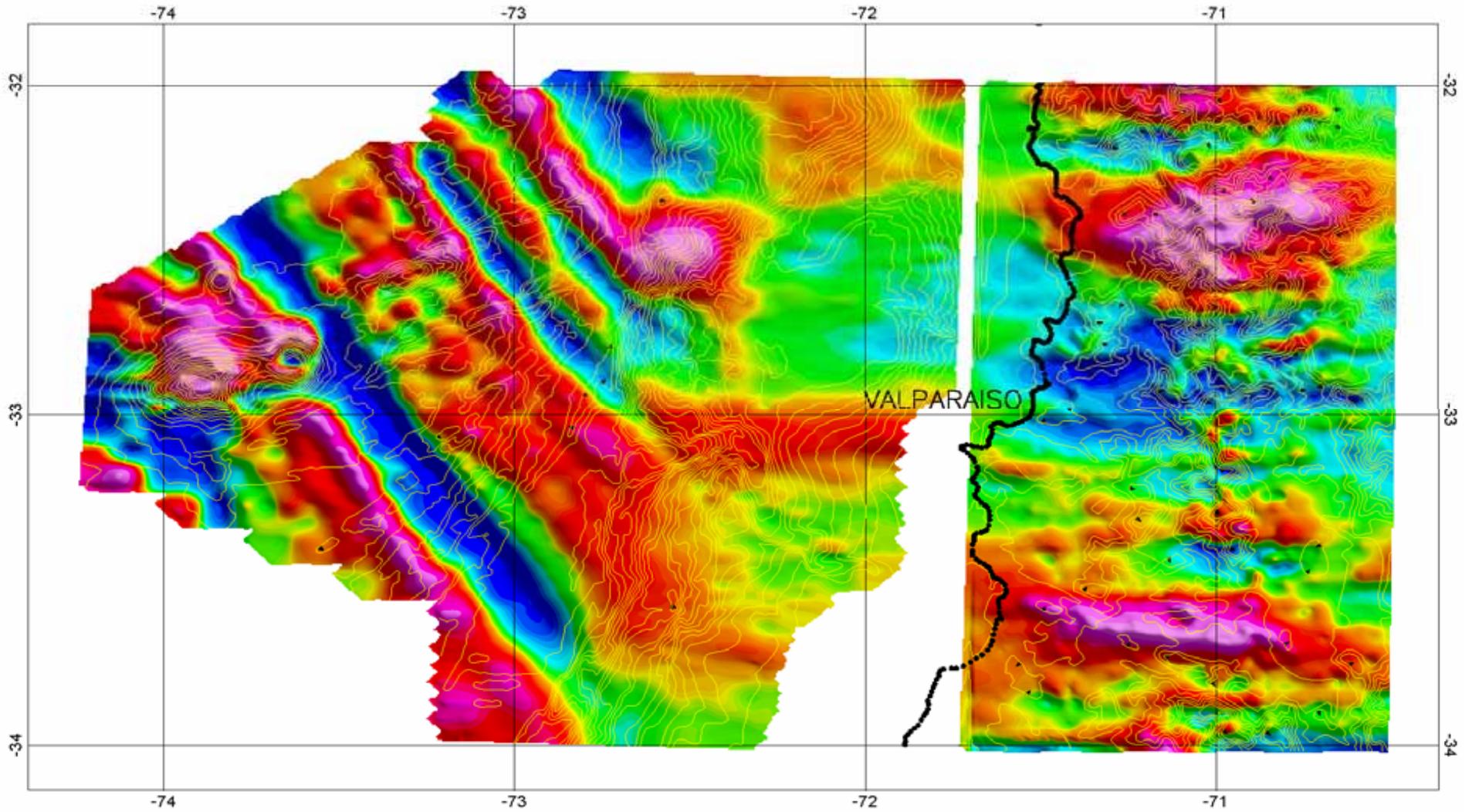
MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA



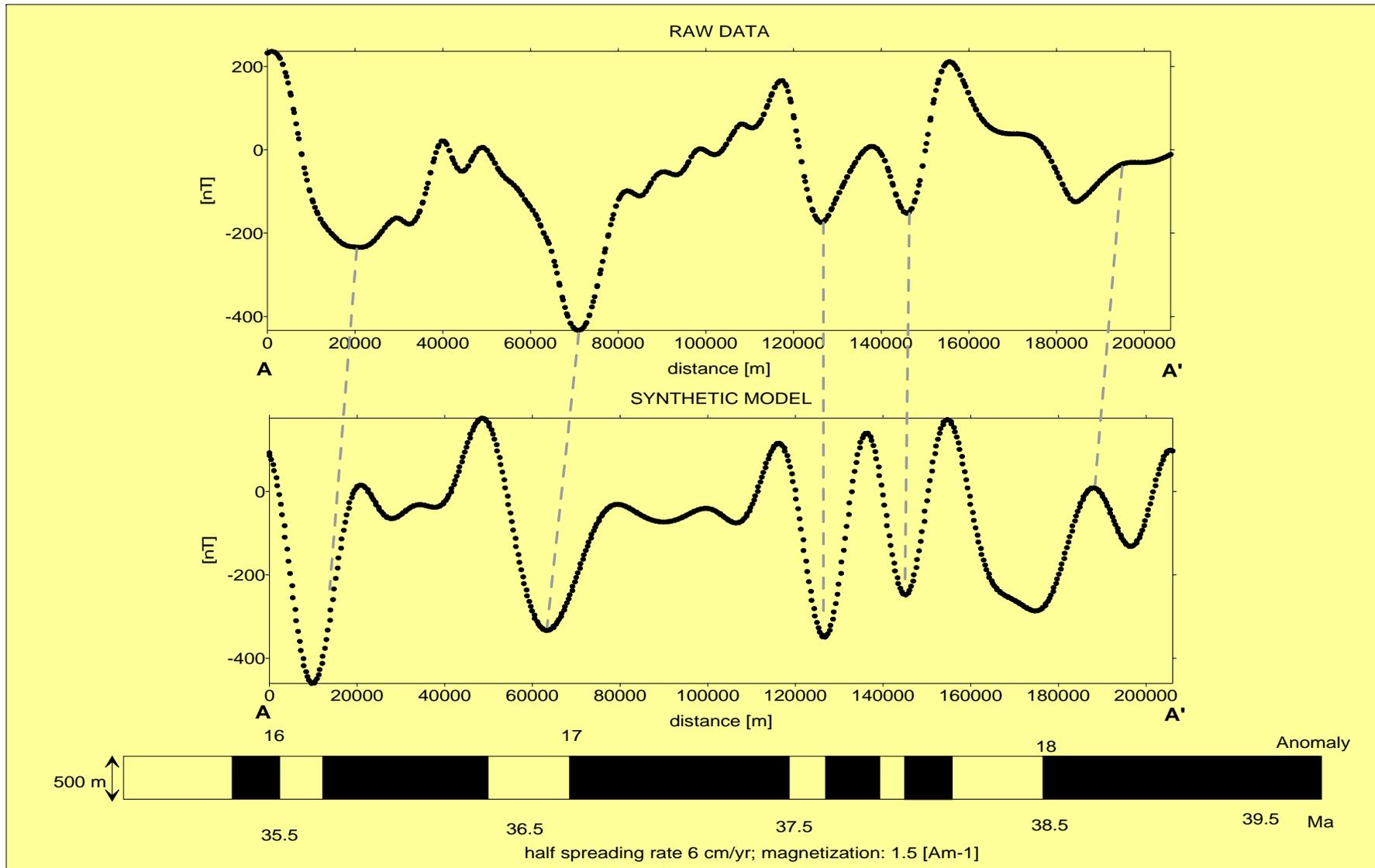
MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA



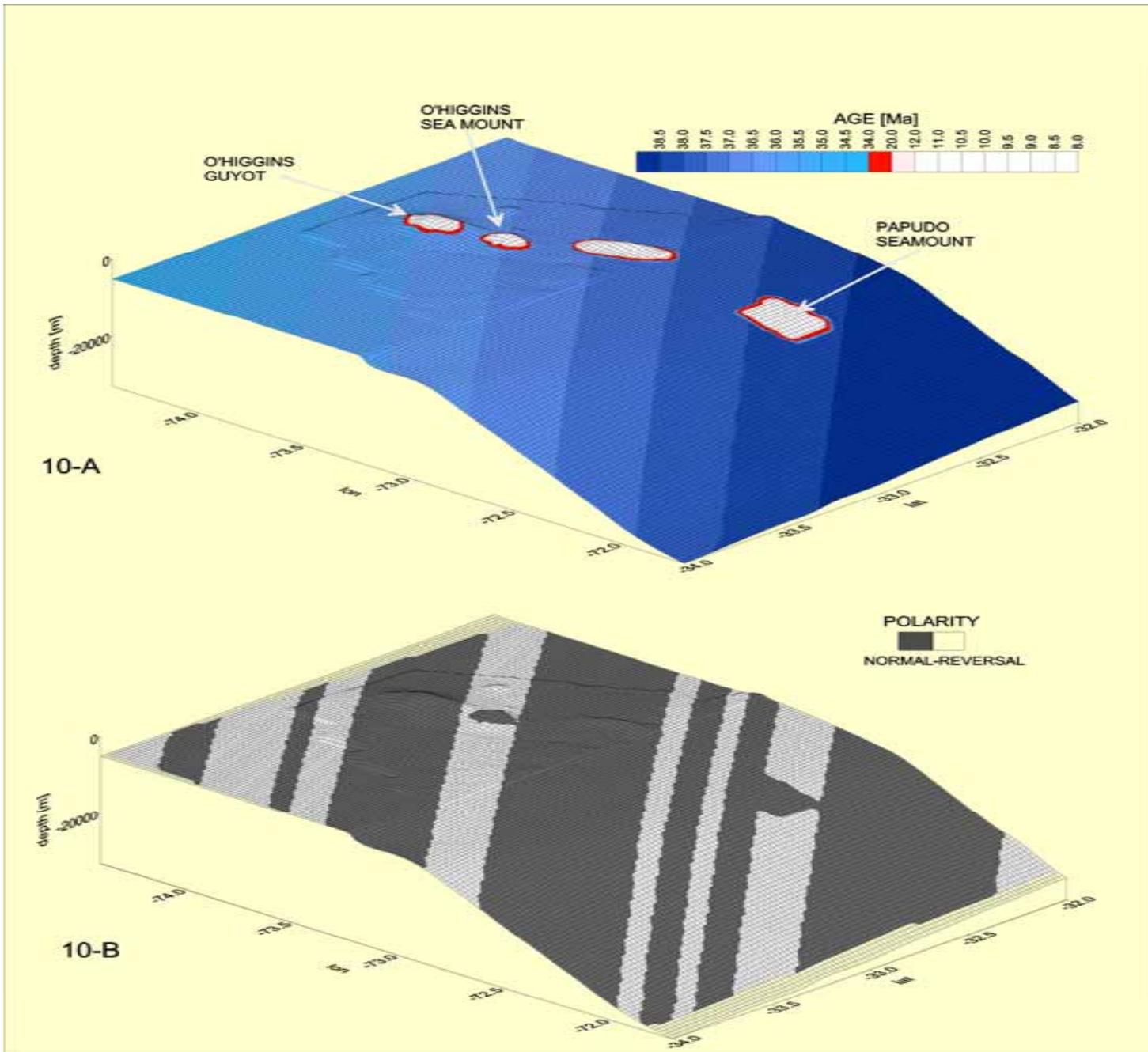
MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA



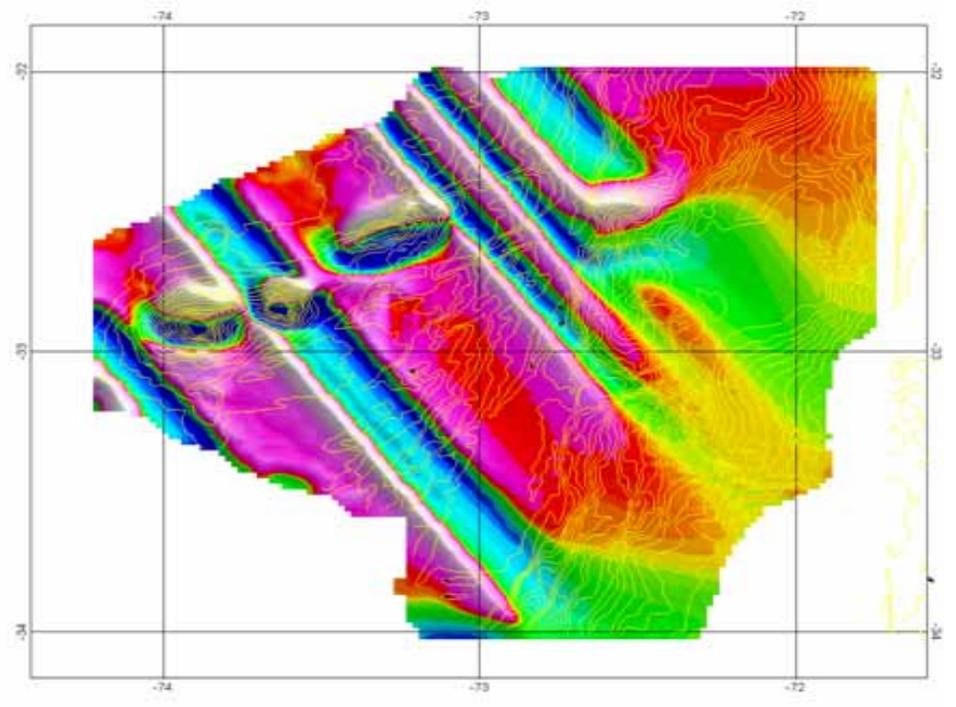
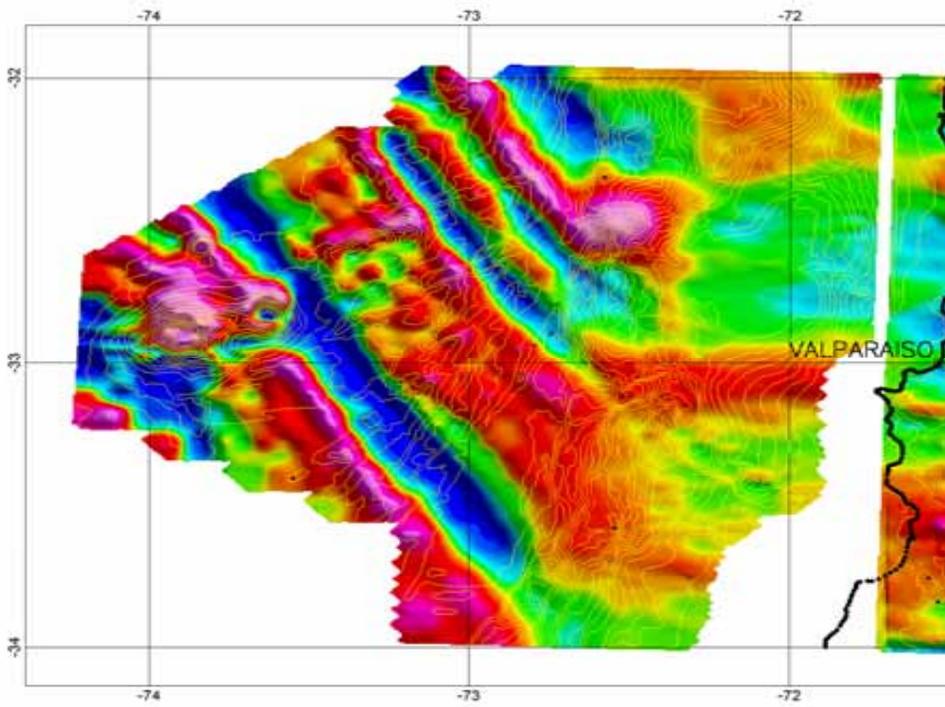
MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA



MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA

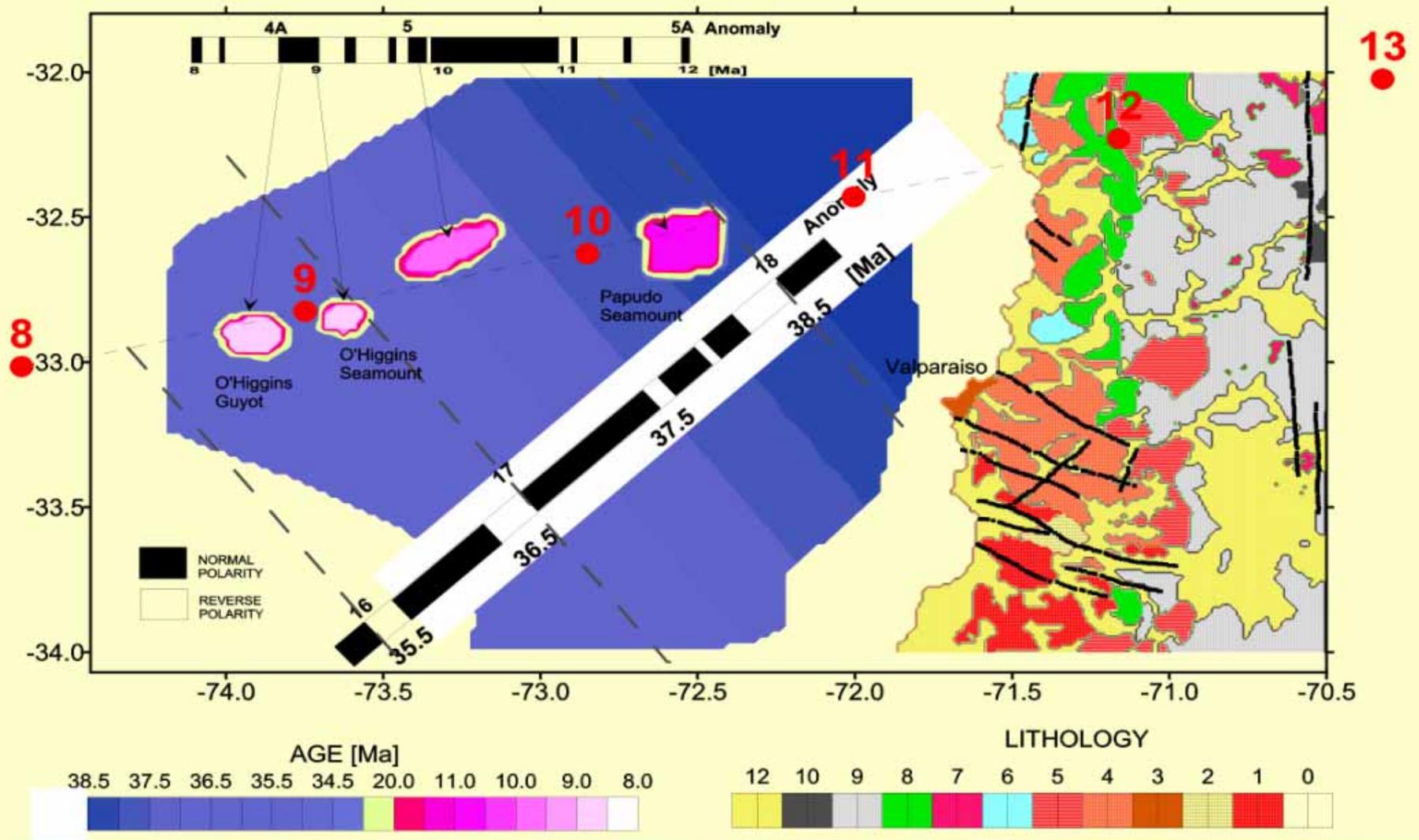


MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA



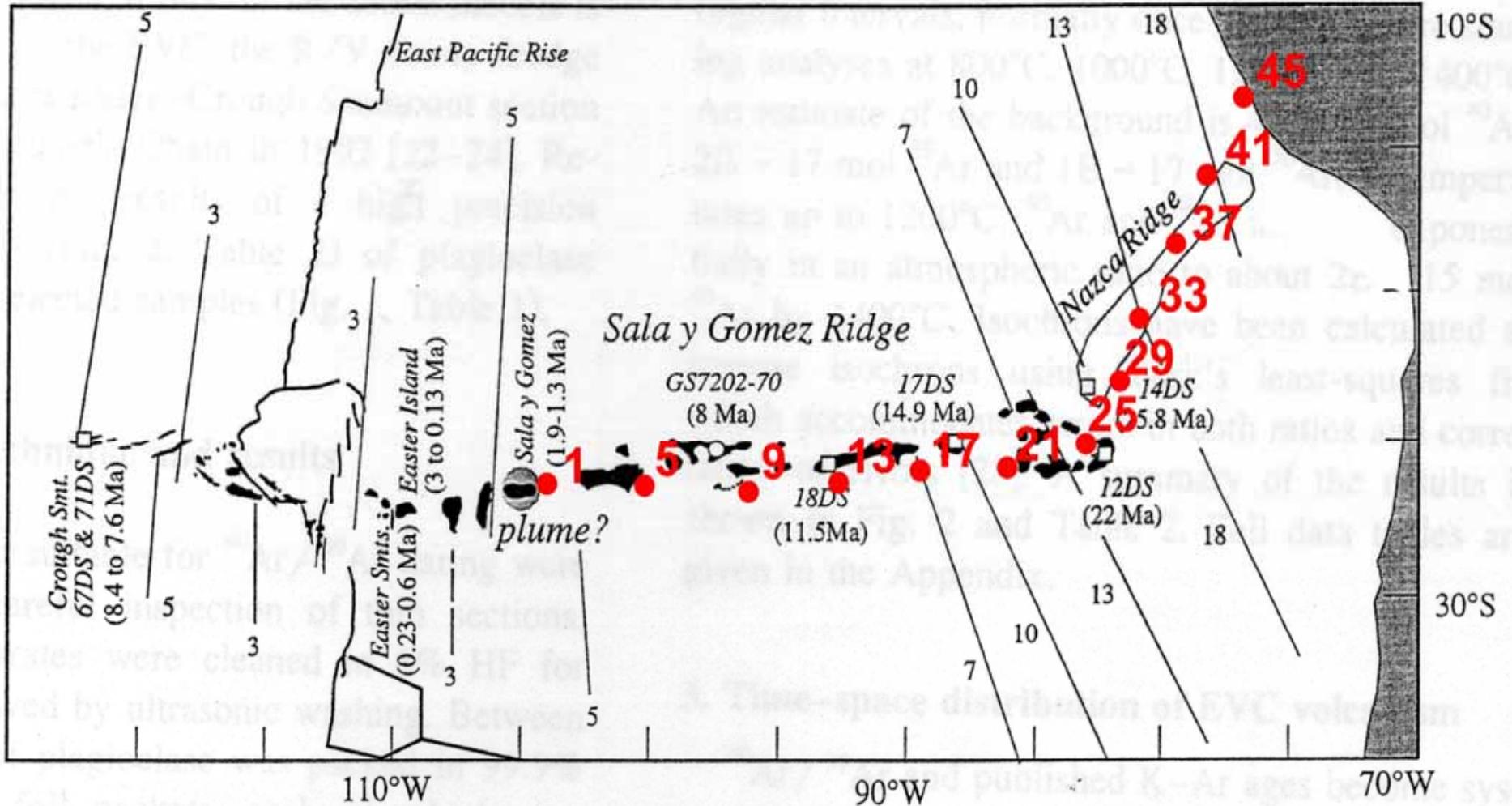
MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA

GEOLOGIC FRAMEWORK

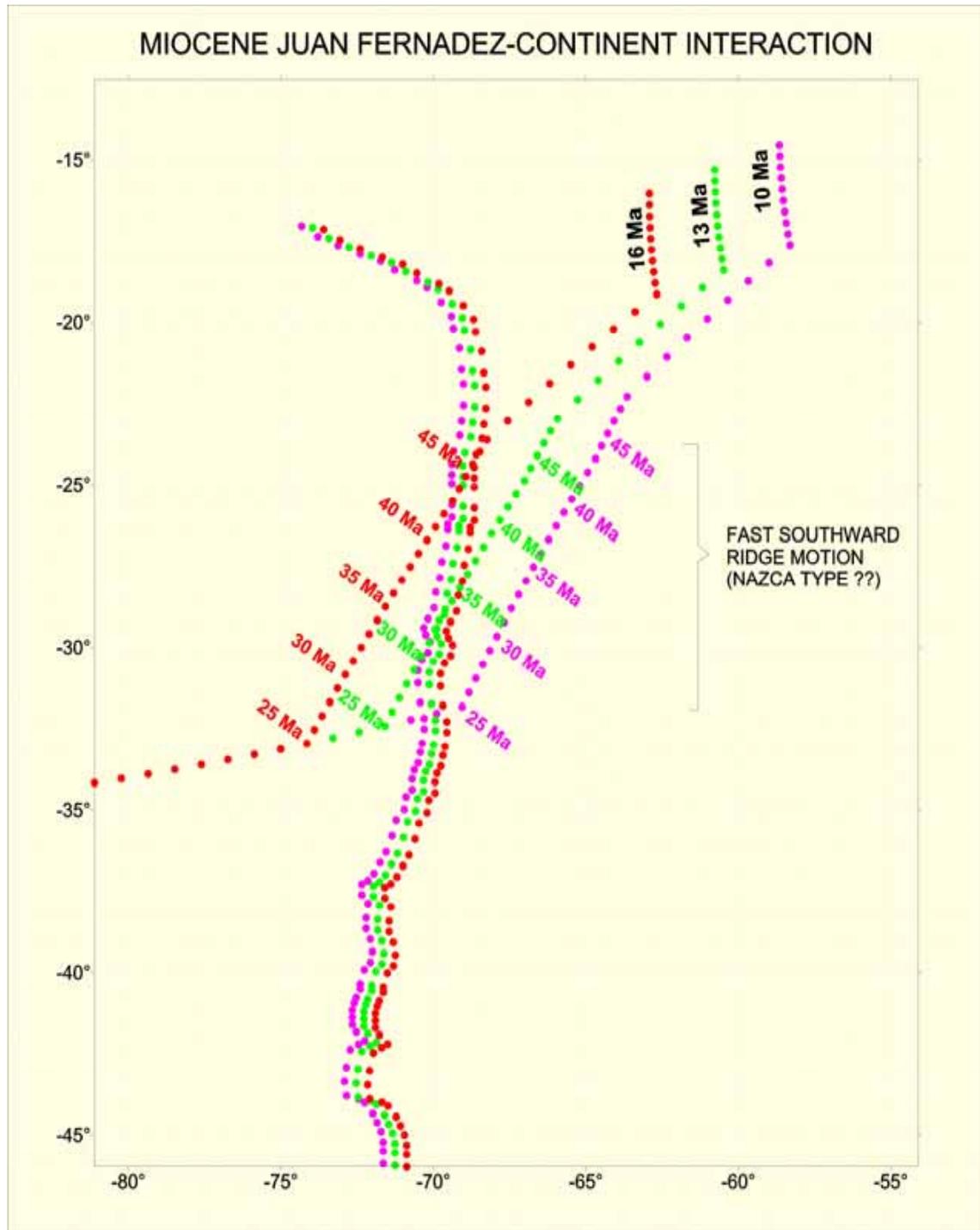


MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA

NAZCA RIDGE TIMING (O'CONNOR ET AL, 1995) AND PREDICTED TIMING FROM (GORDON AND JURDY 1986)



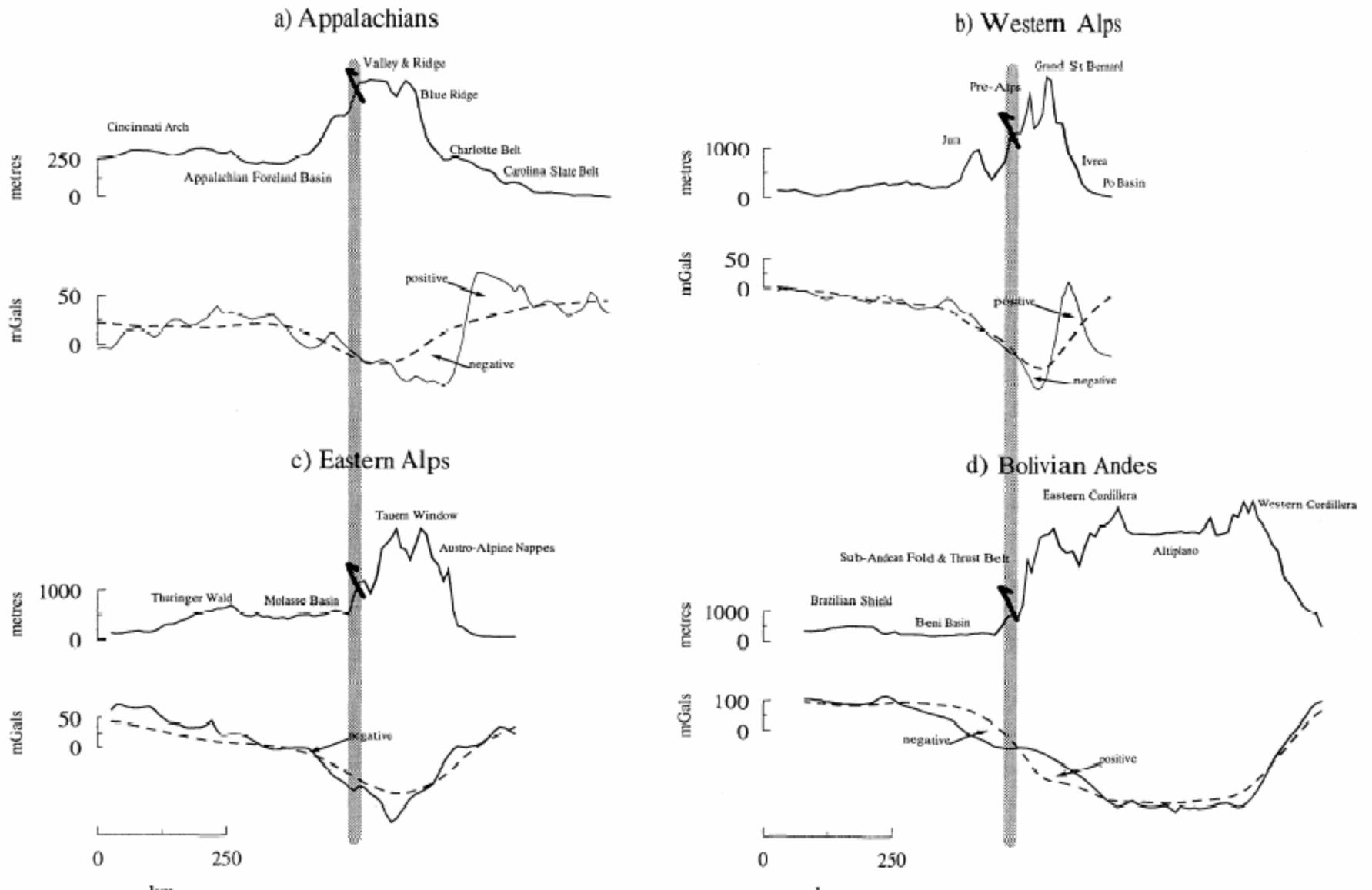
MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA



ANALISIS FLEXURAL: GRAVEDAD

MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA

ANALISIS FLEXURAL MEDIANTE LA COMBINACION DE GRAVEDAD Y RELIEVE, STEWART & WATTS, 1997

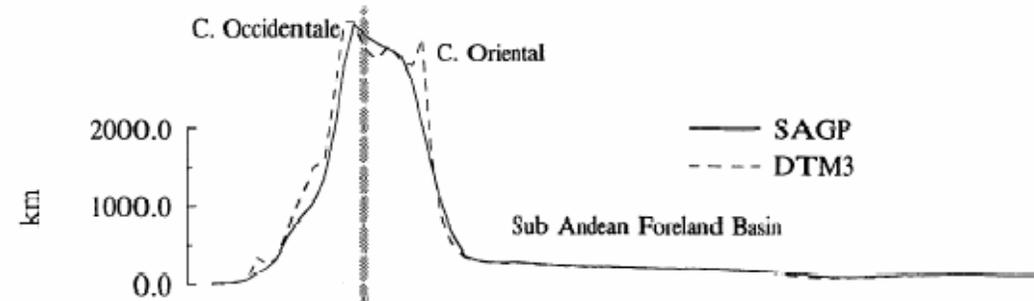


MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA

ANALISIS FLEXURAL MEDIANTE LA COMBINACION DE GRAVEDAD Y RELIEVE

Profile 19 – Ecuador

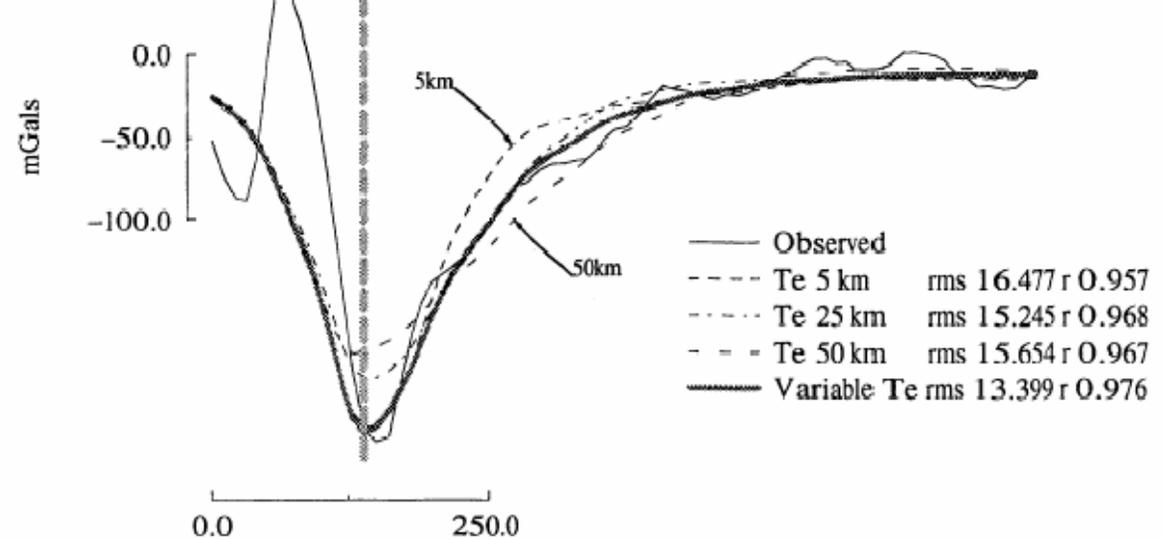
a) Topography



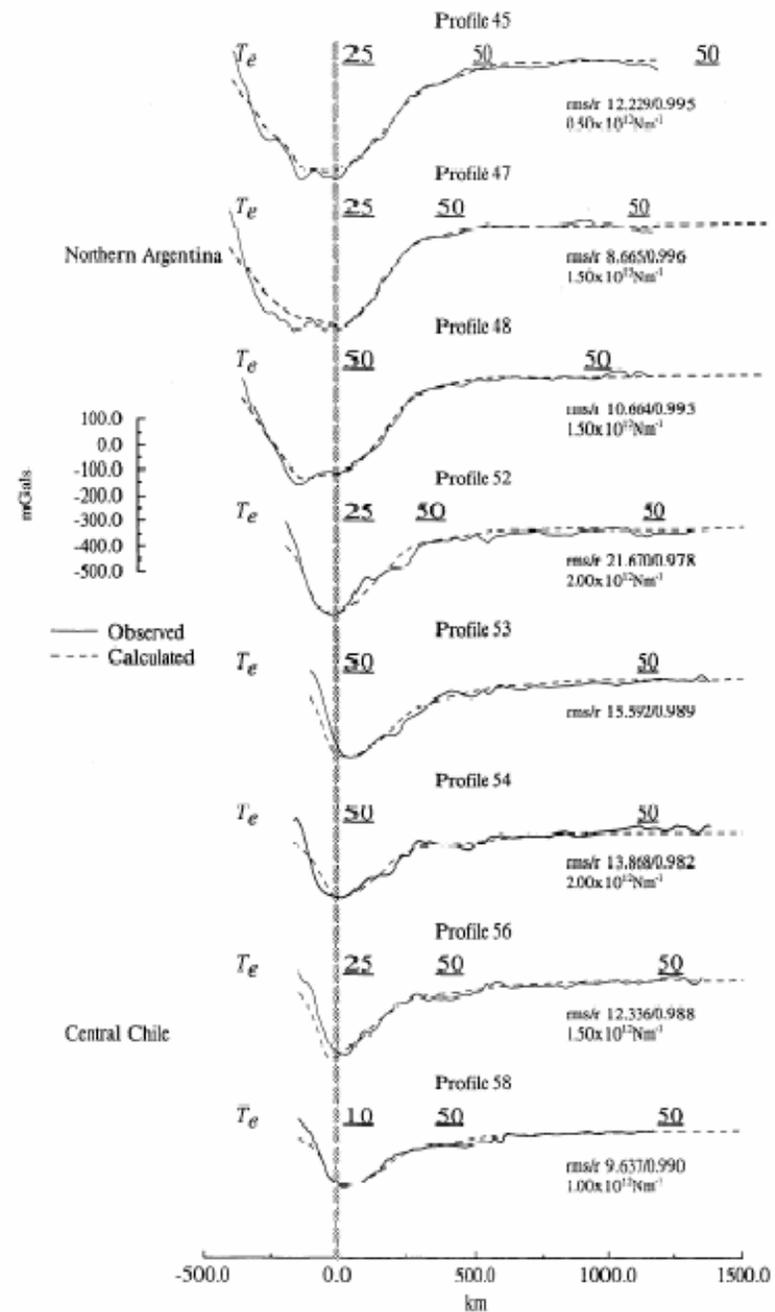
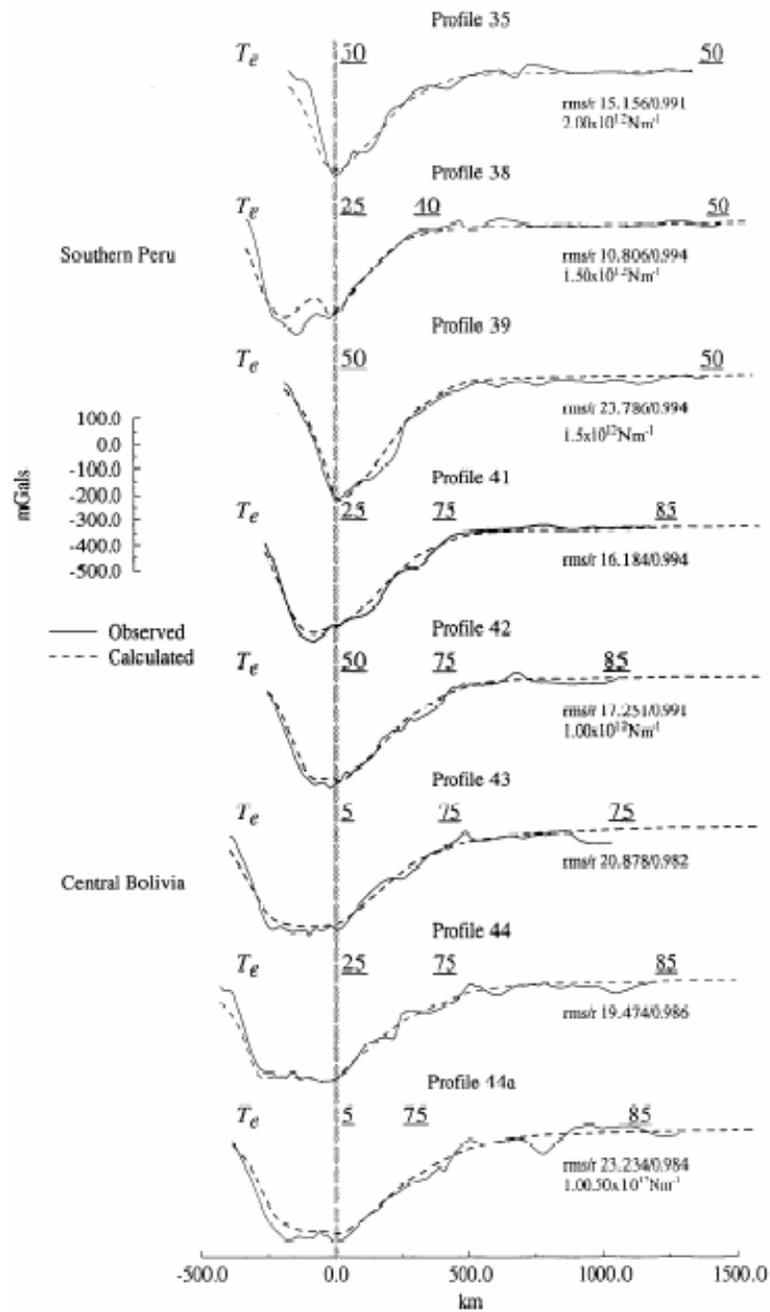
b) Te Variation



c) Gravity

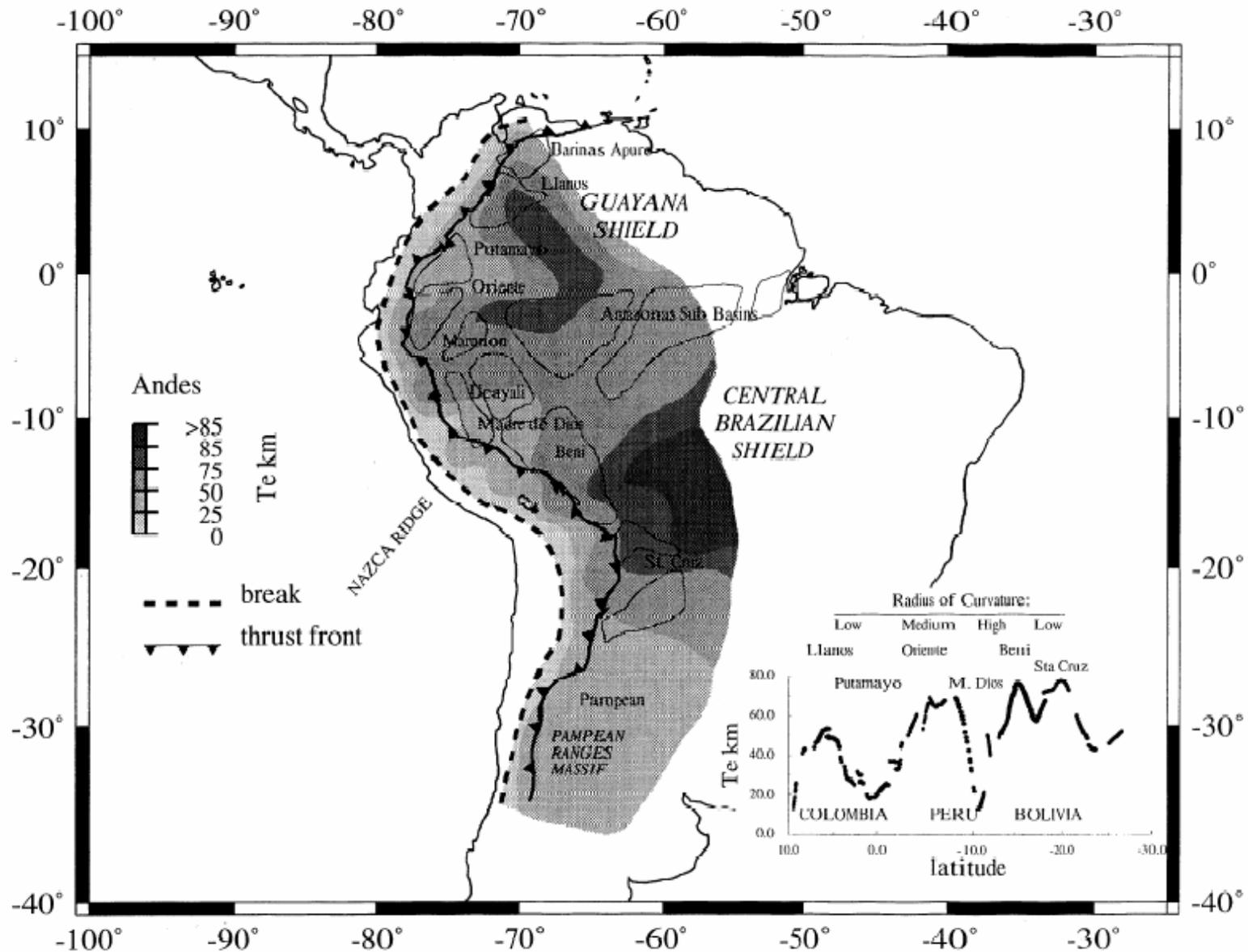


MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA



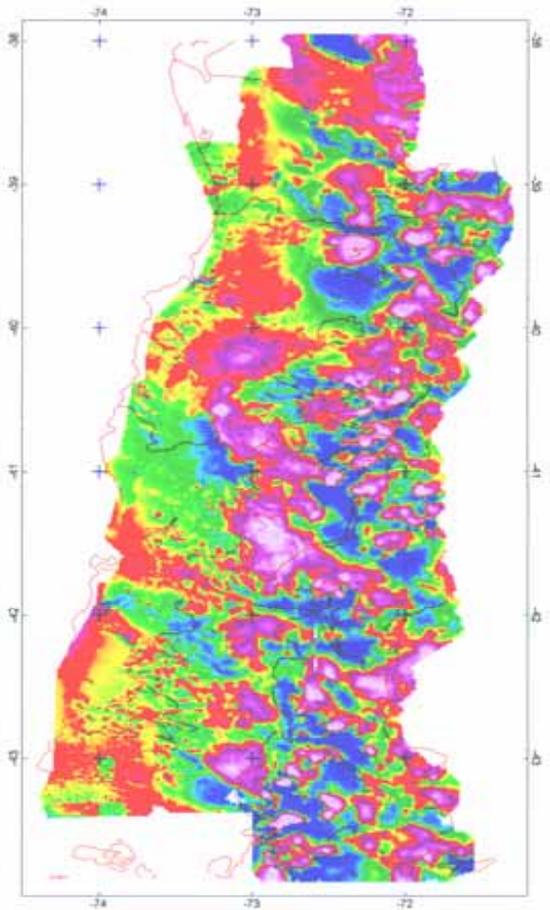
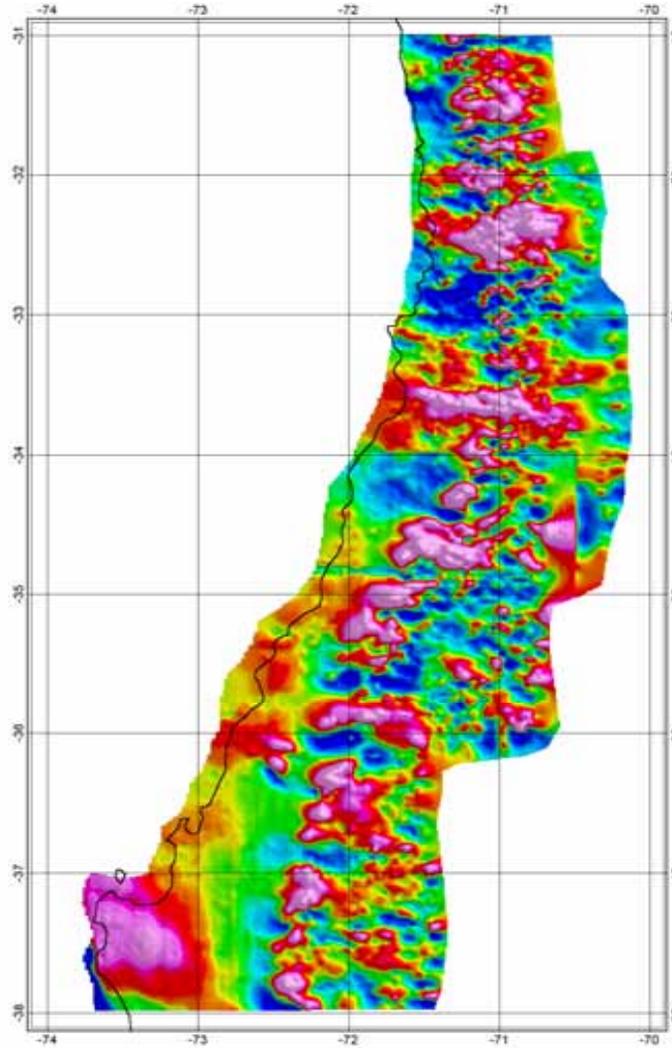
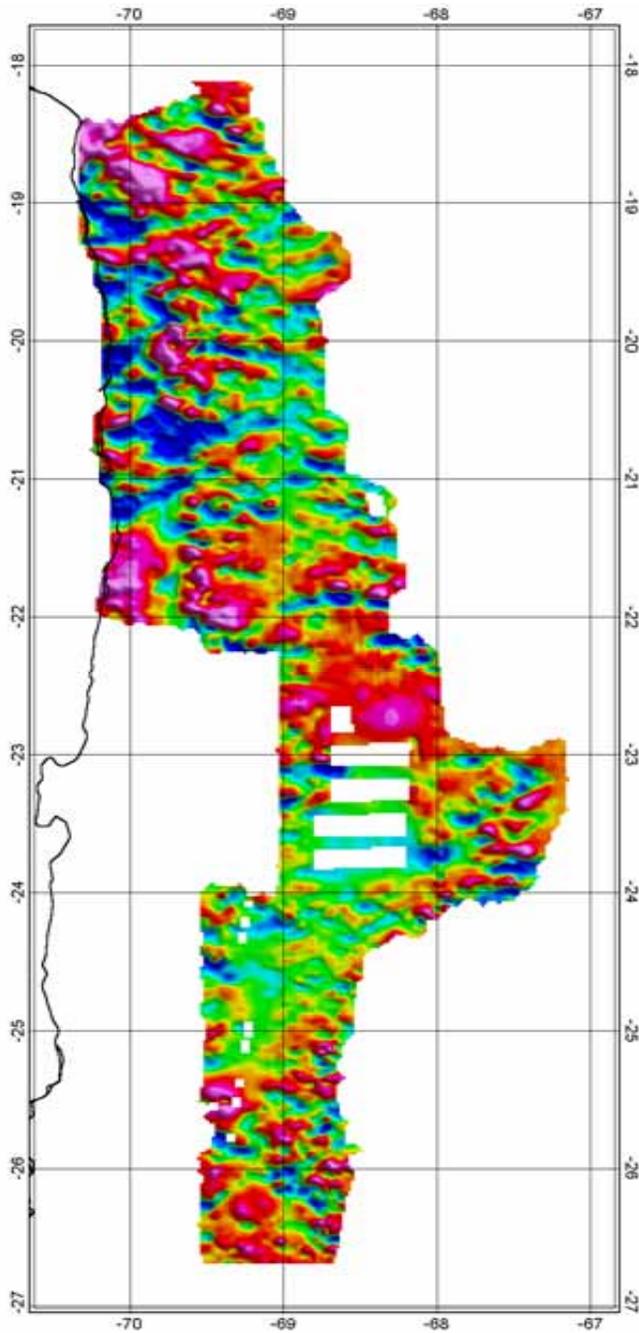
MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA

ESTIMACION DE ESPESOR ELASTICO EN SUD-AMERICA

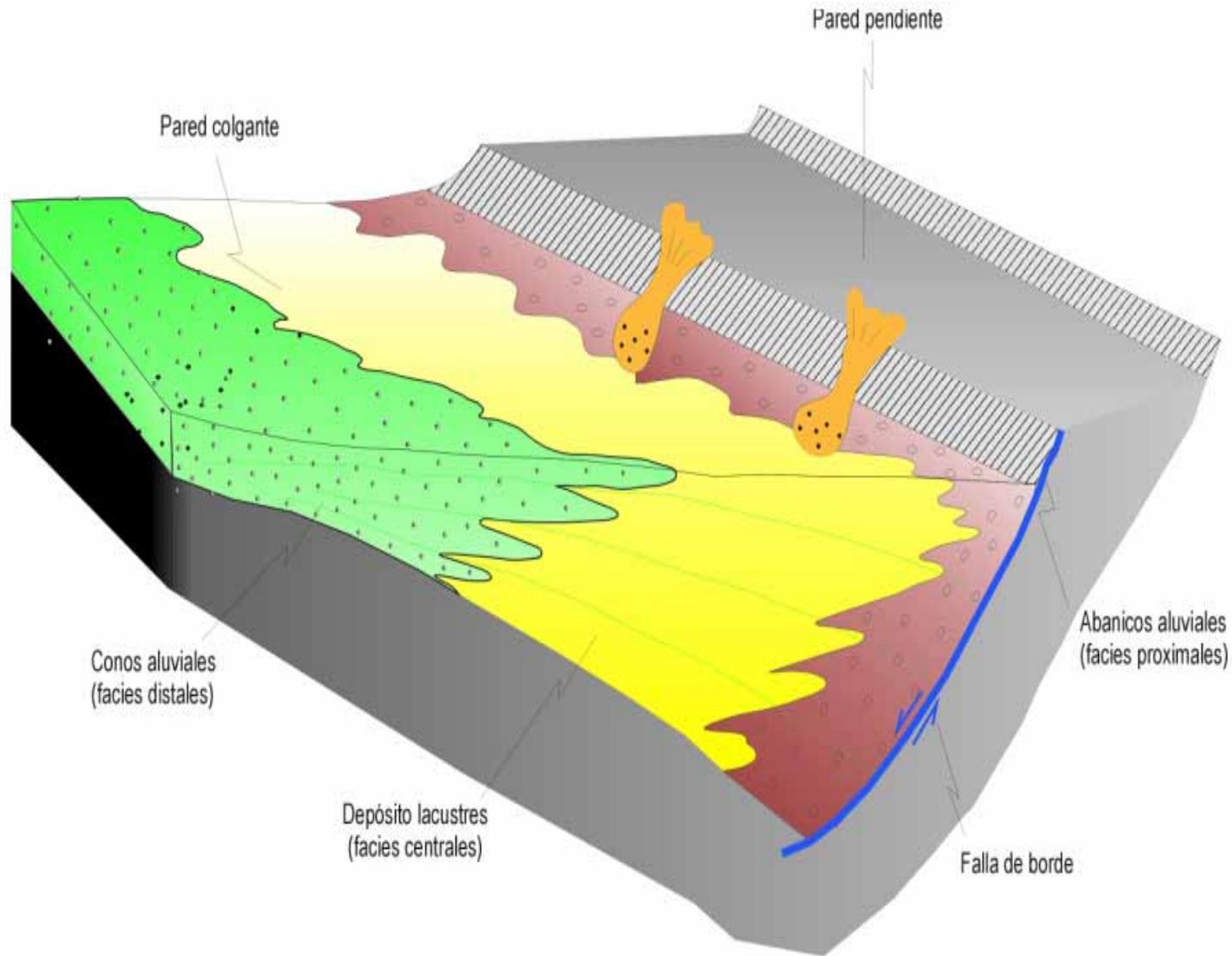


MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA

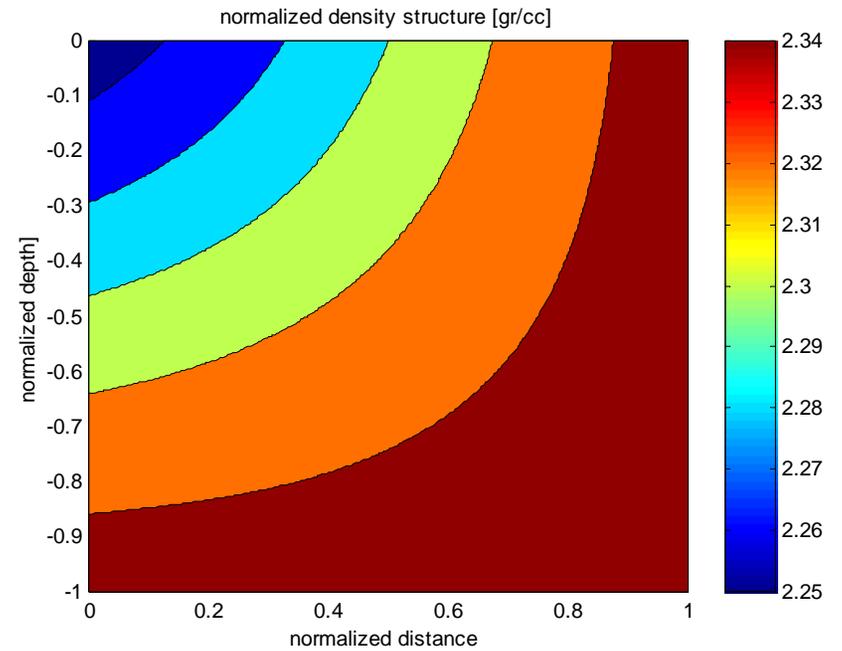
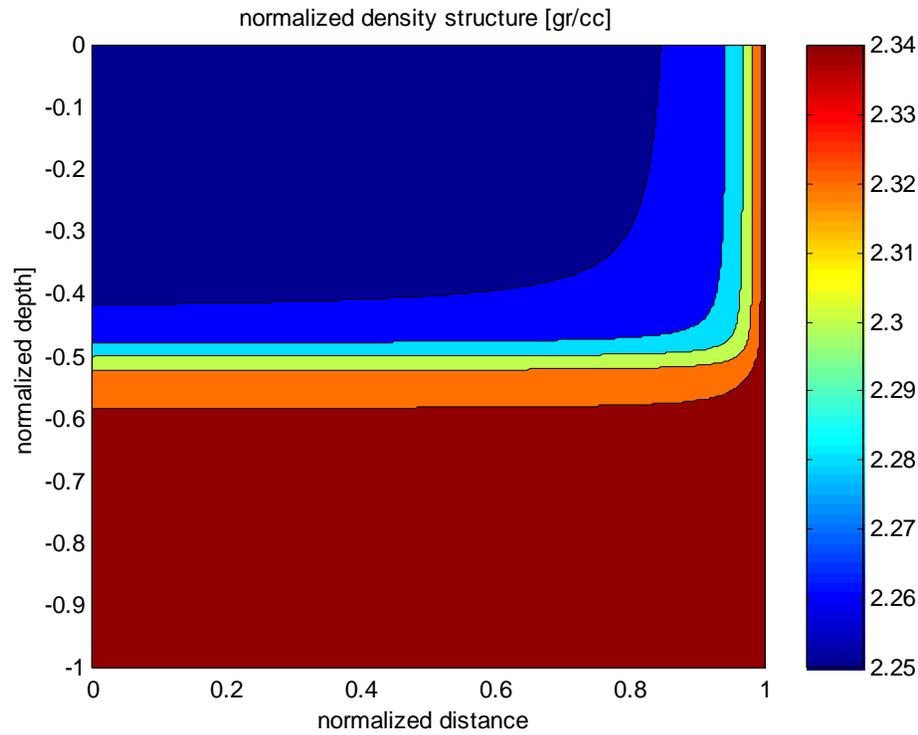
EXPLORACION CARTA MAGNETICA



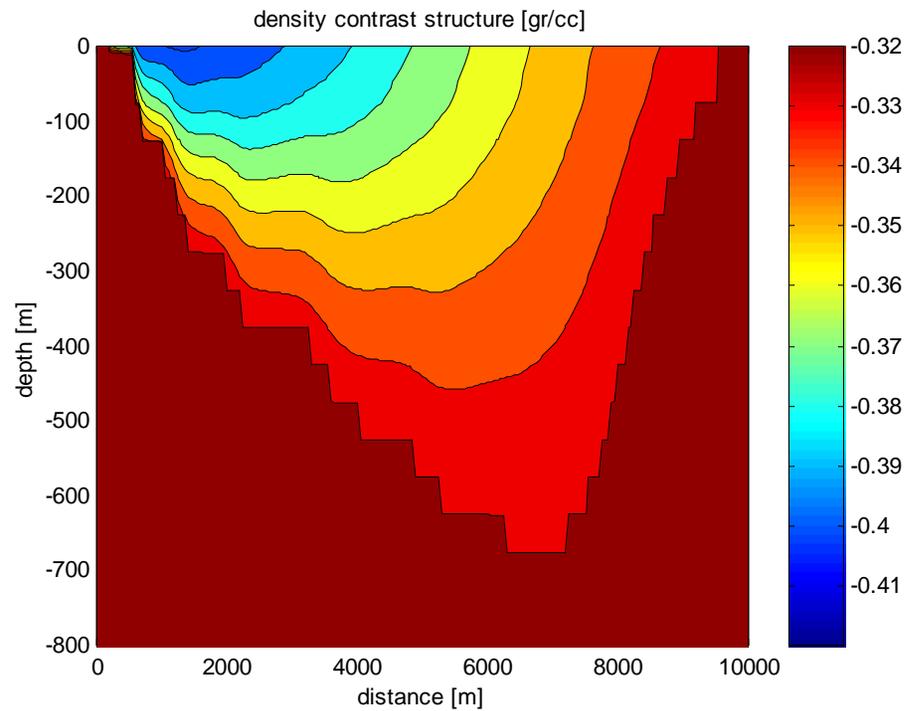
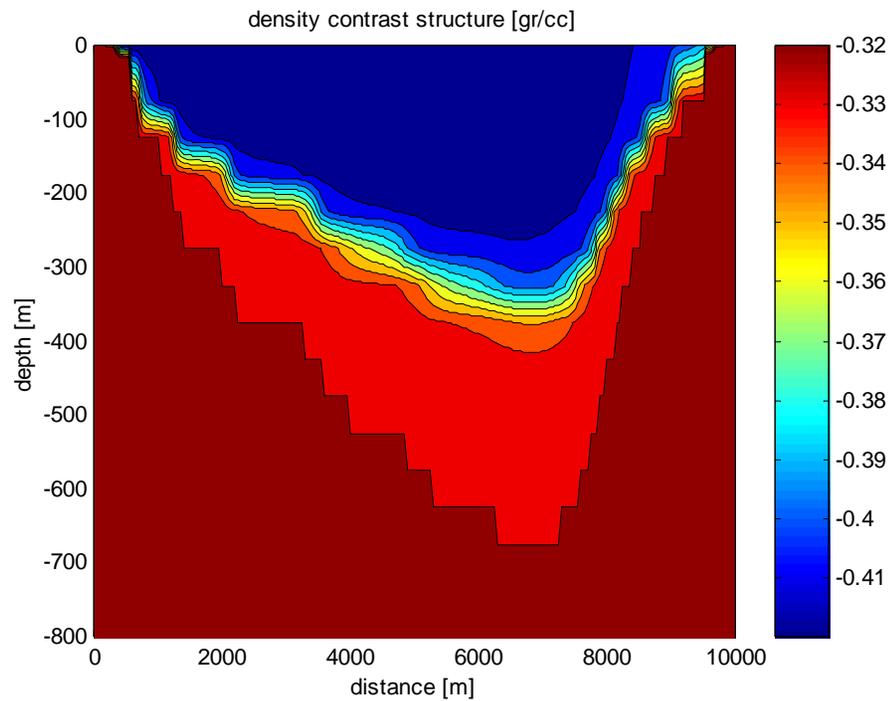
GRAVEDAD EN CUENCAS BASIN&RANGE



FUNCION DE DENSIDAD GENERALIZADA

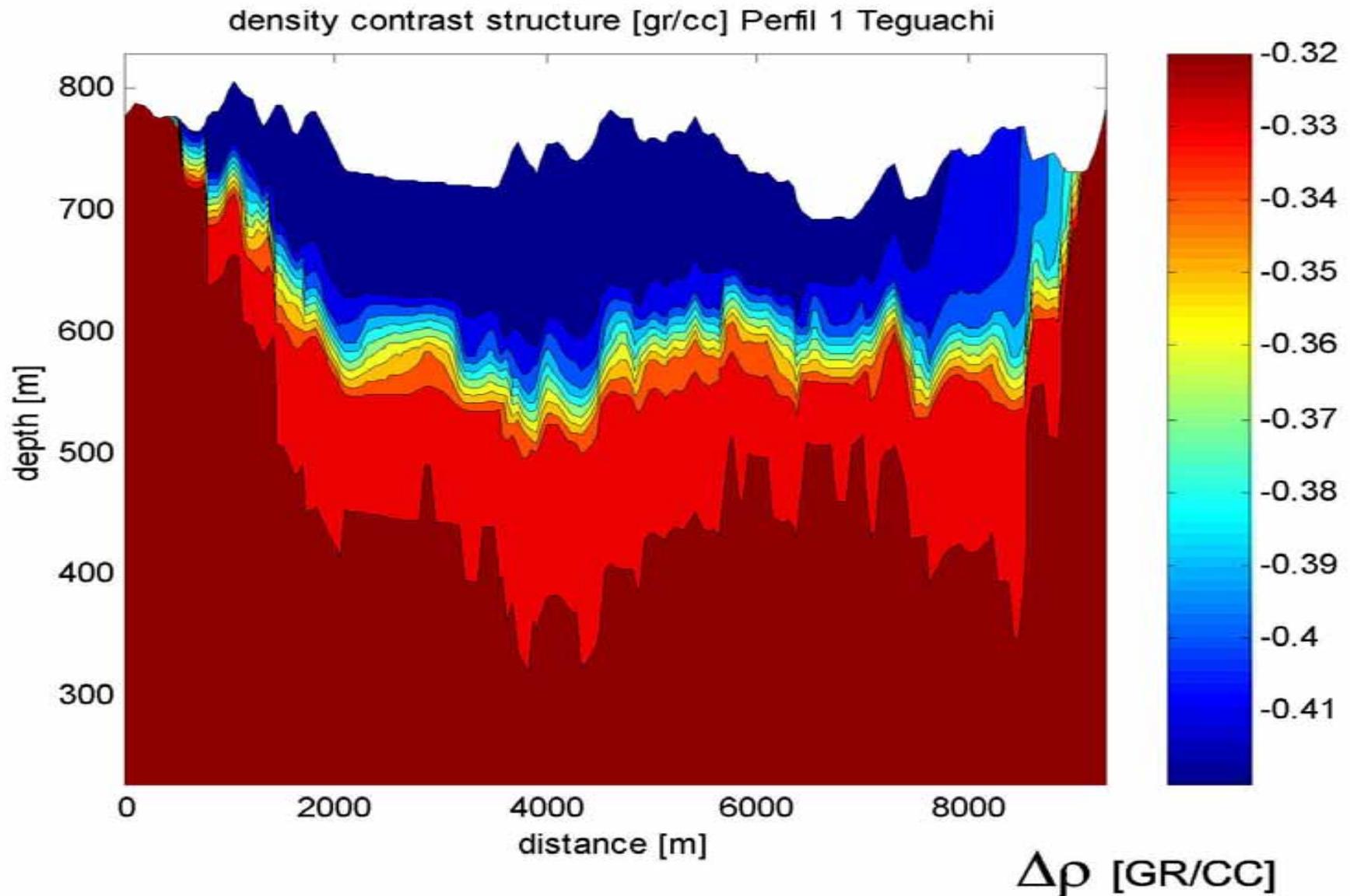


DISTRIBUCION DE DENSIDAD EN AMBIENTES DE CUENCAS TIPO BASIN & RANGE

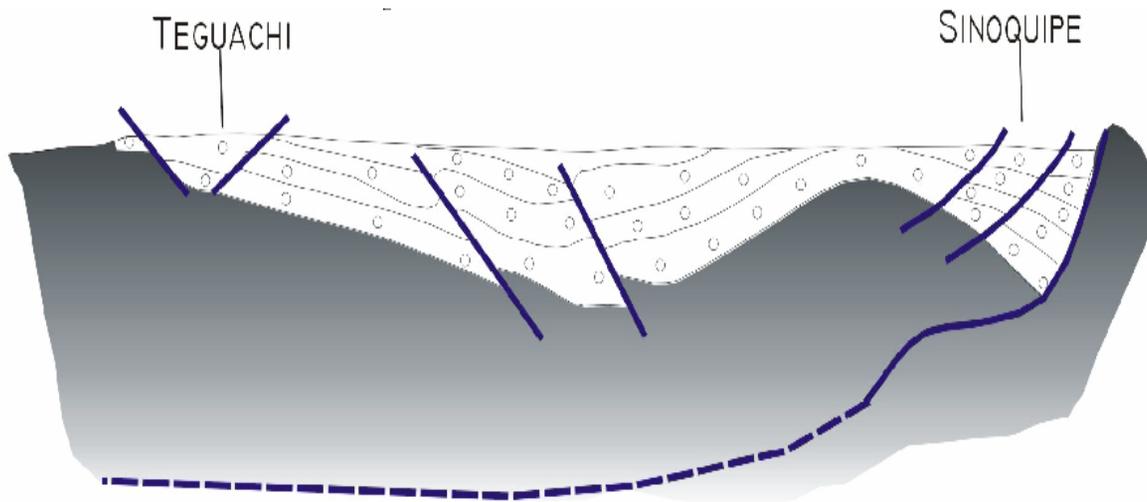
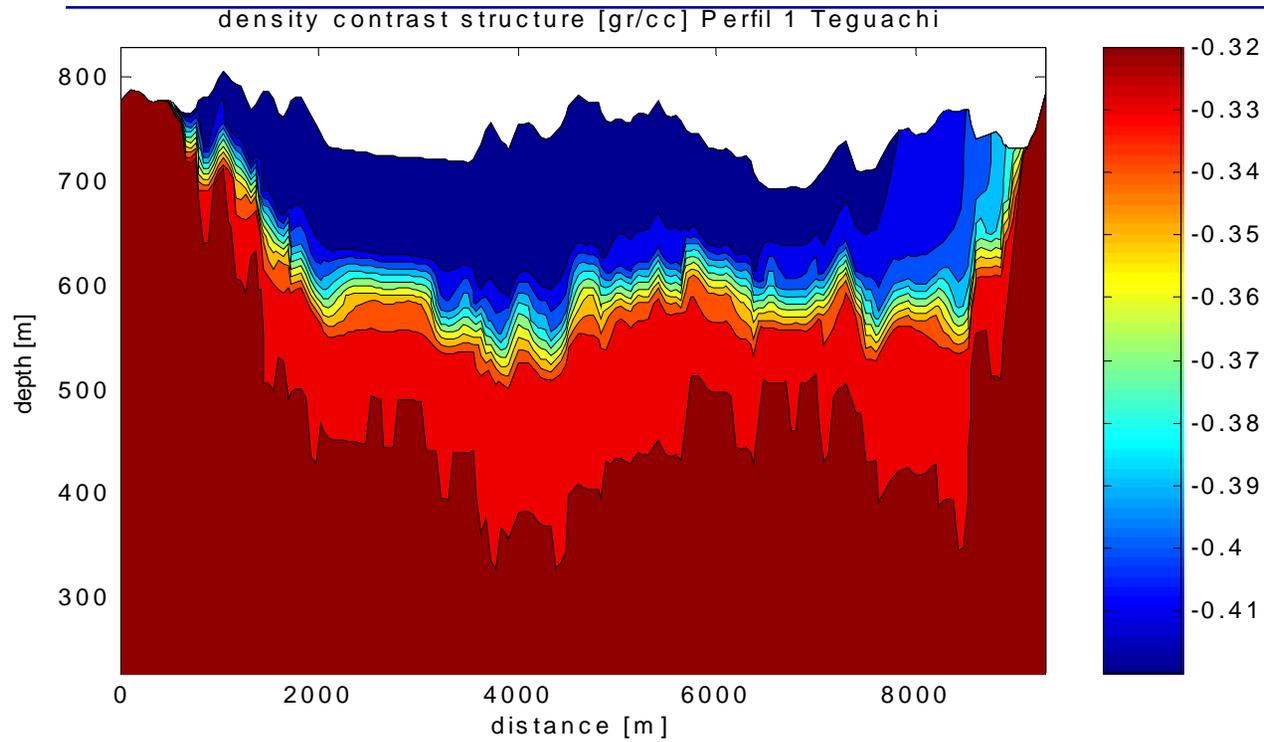


MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA

FUNCION DE DENSIDAD EN TEGUACHI (MEXICO)



MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA



**COMPARACION
MODELO DE DENSIDAD
CON SECCION
ESTRUCTURAL EN
TEGUACHI**

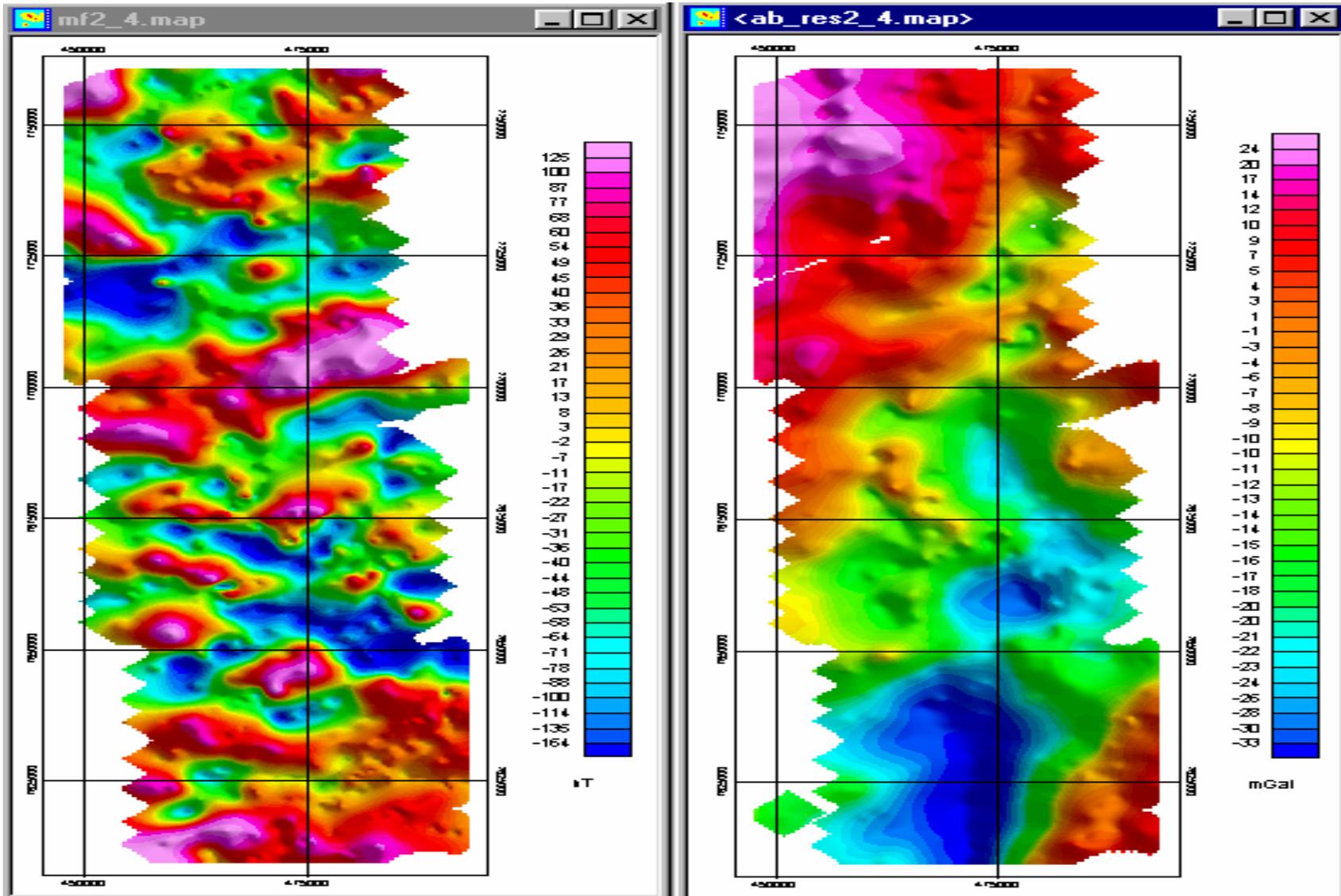
EXPLORACION NORTE CHILE

MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA

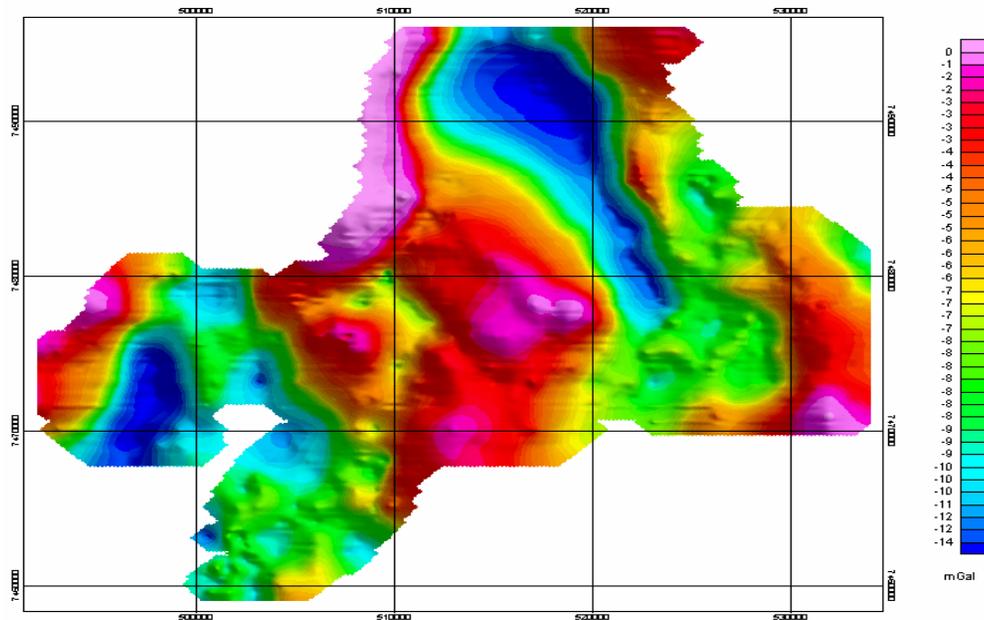
PAMPA DEL TAMARUGAL SUR

MAGNETISMO: anomalías de alta frecuencia (volcánico/intrusivo) y sistema estructural NE

GRAVEDAD: desarrollo de cuencas en flanco sur oriental cortada por sistema estructural evidenciado en magnetismo



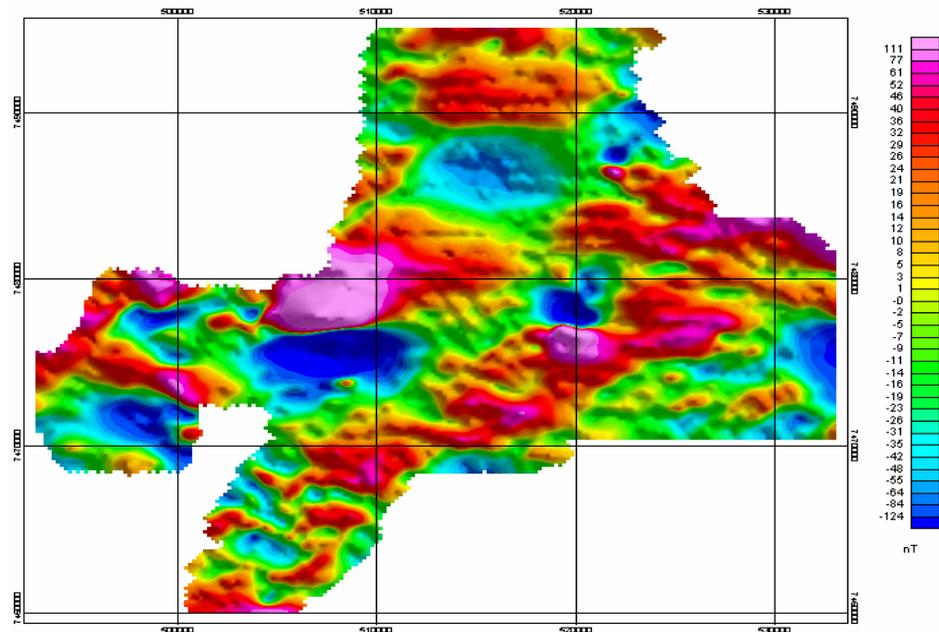
MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA



PAMPA DE LIMON VERDE

GRAVEDAD:

cuenca de mas de 1000m en flanco norte; sistema estructural NS que coincide con ramal de falla oeste en sector occidental

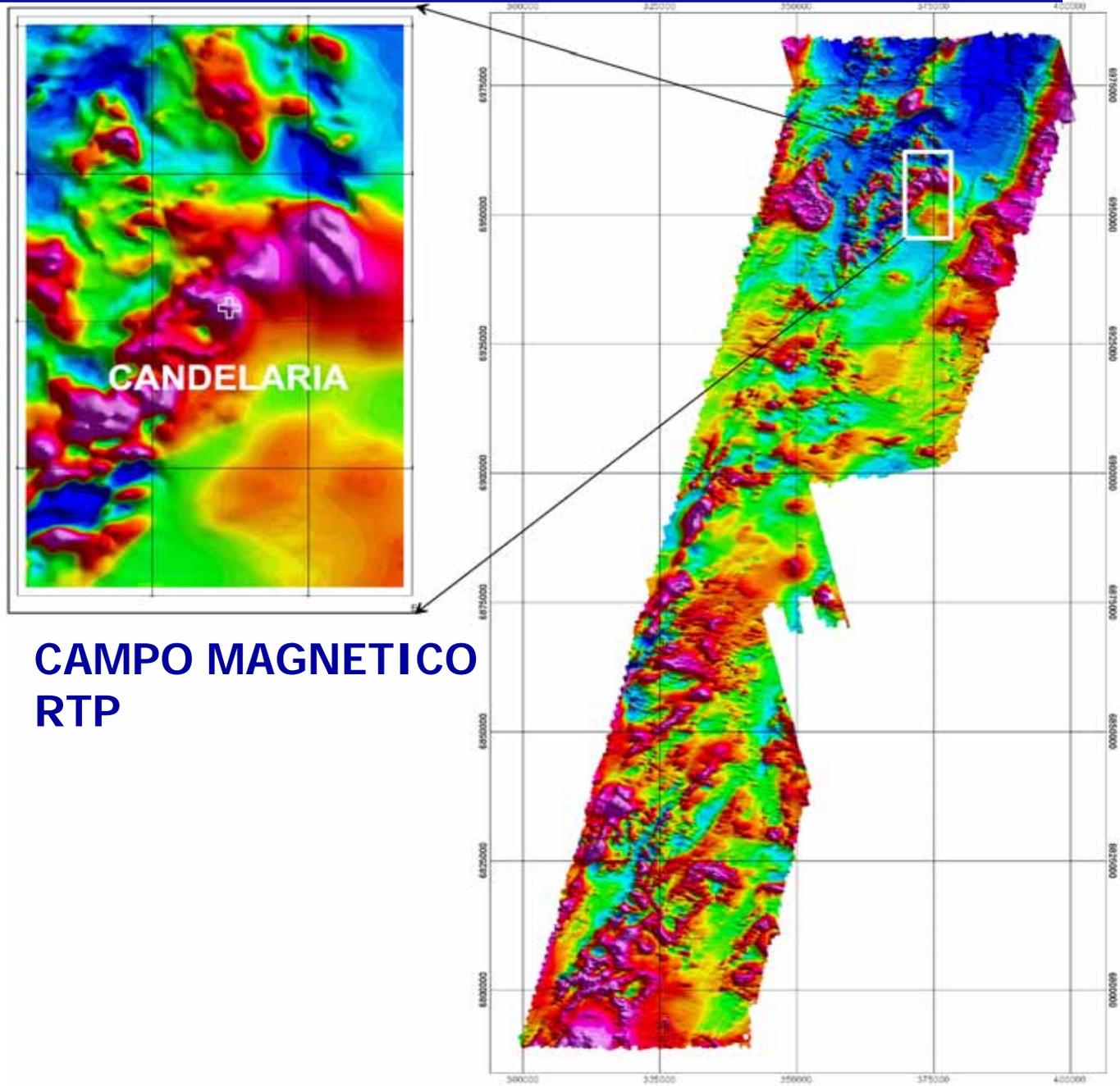


MAGNETISMO:

anomalías de mas alta frecuencia asociada a cuerpos mas someros; anomalía de baja frecuencia sobre cuenca gravimetrica (relleno magnético?)

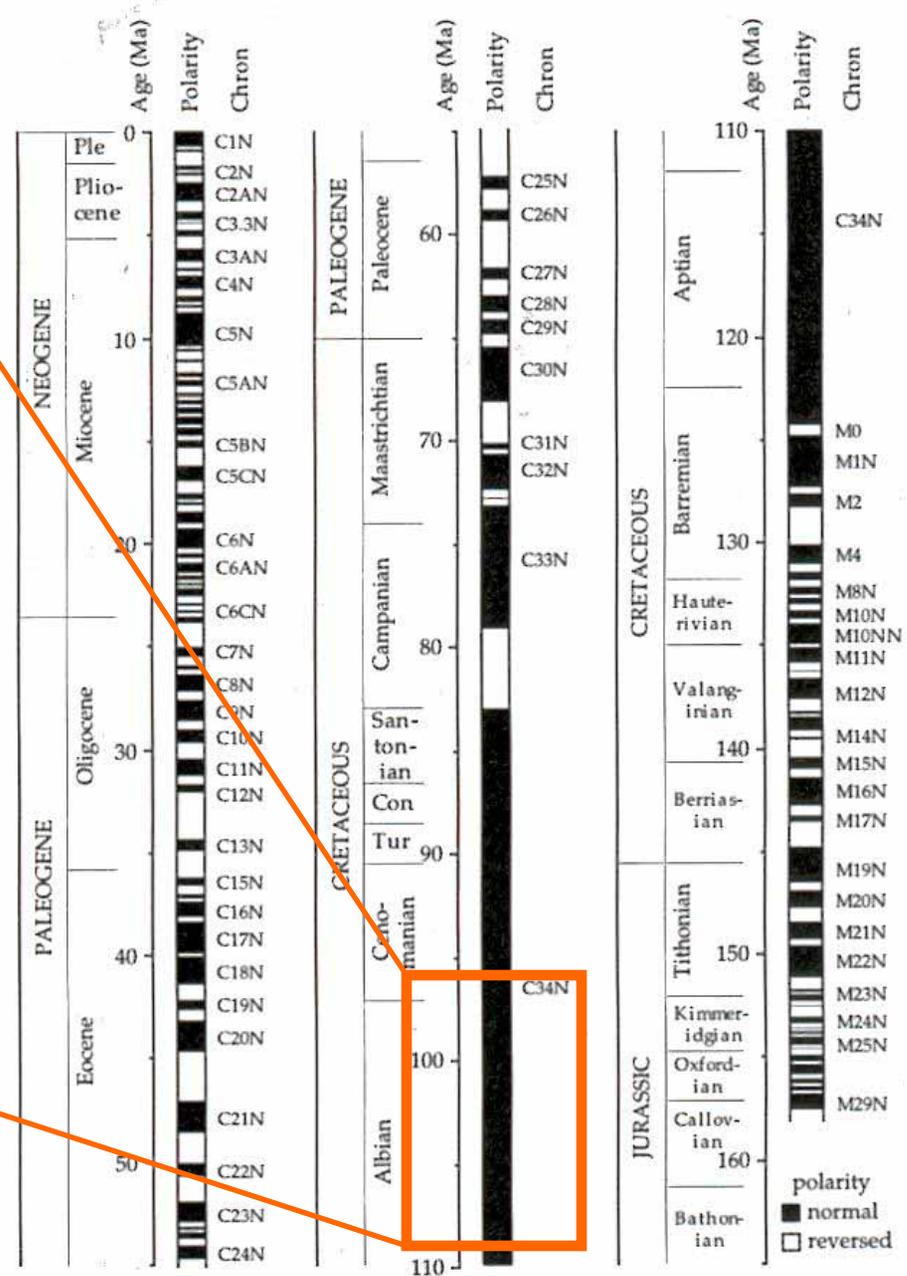
MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA

**DESCRIPCION
GEOFISICA
CANDELARIA
(MODELO TIPO)**

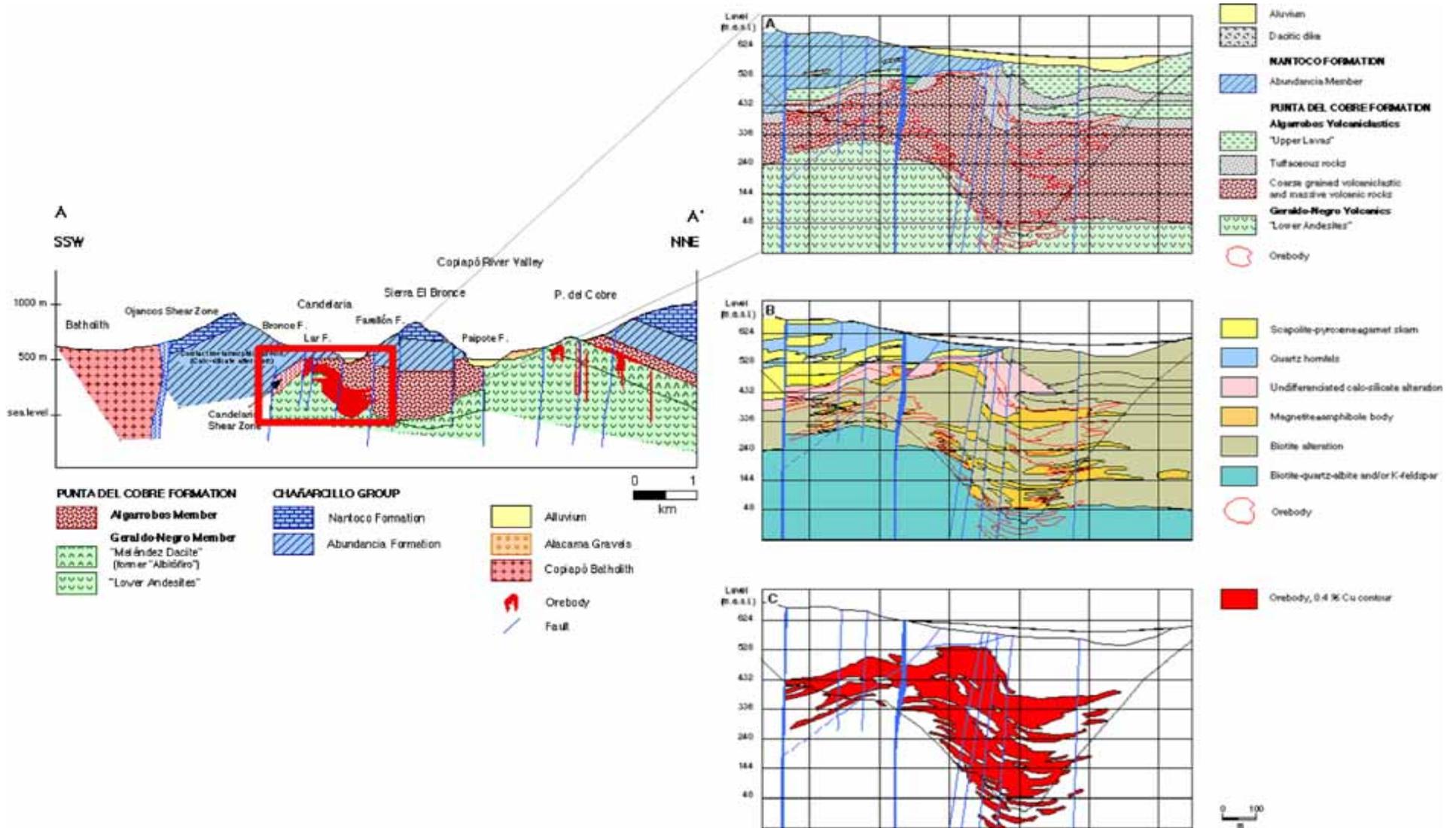


**CAMPO MAGNETICO
RTP**

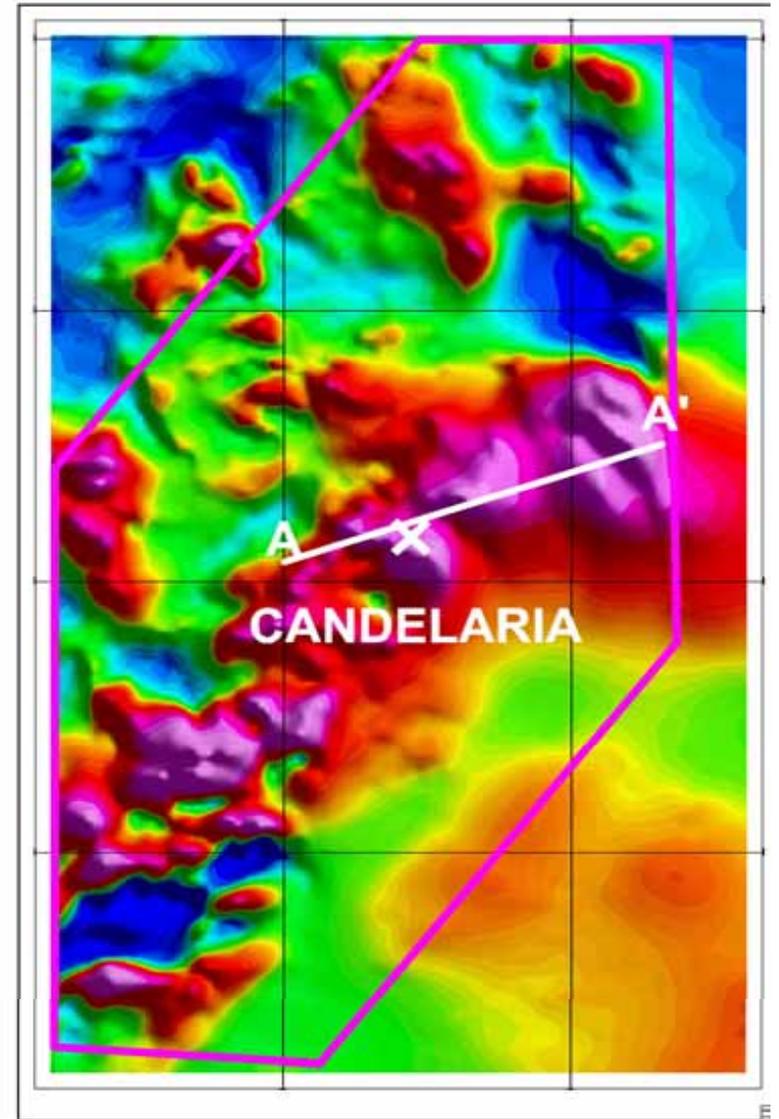
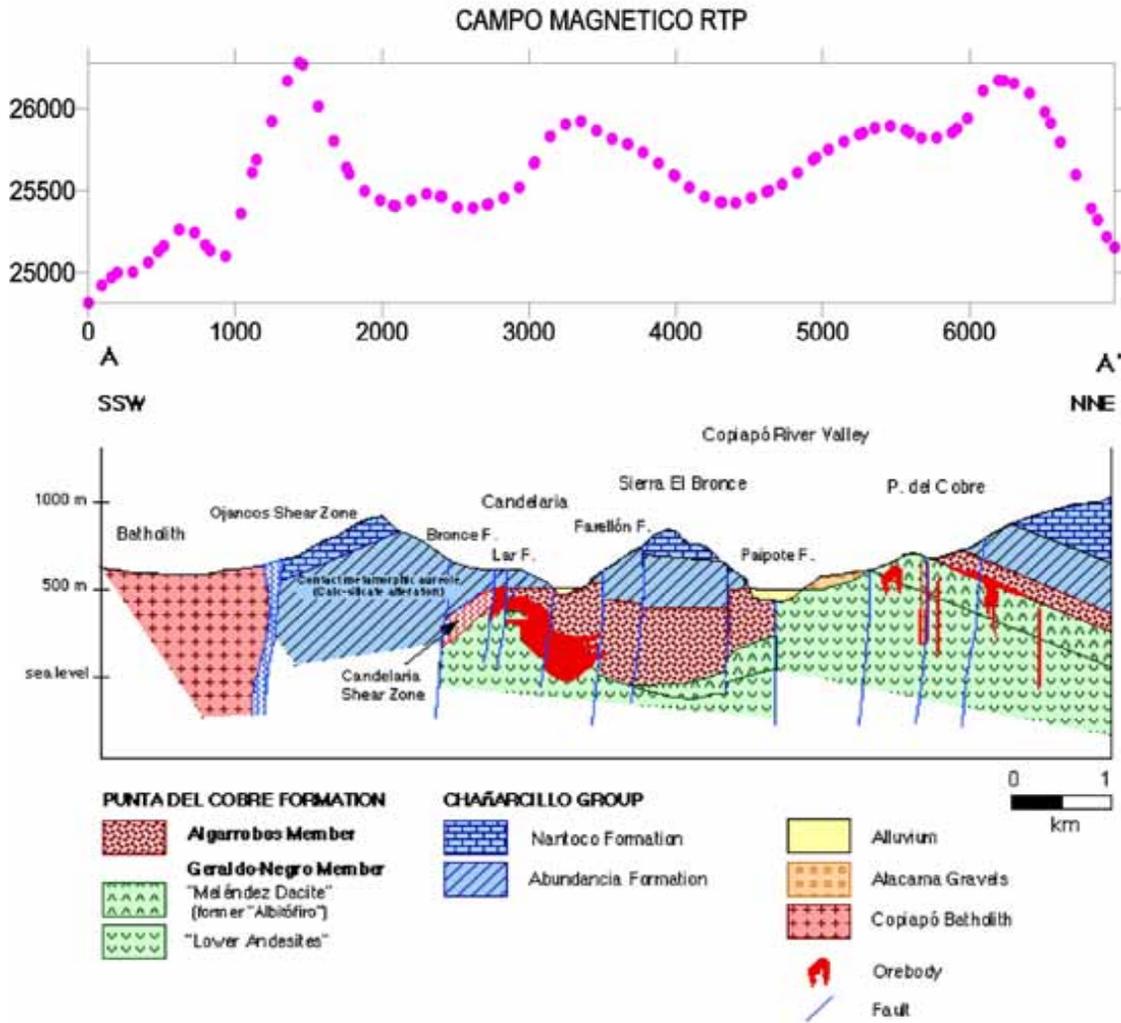
MAGNETIZACION DE LAS ROCAS DURANTE LOS EVENTOS MAGMATICOS Y DE ENRIQUECIMIENTO DURANTE EL PERIODO QUIETO DEL CRETACICO => MAGNETIZACION EN LA DIRECCION DEL CAMPO ACTUAL



ESTRATIGRAFIA Y ALTERACION

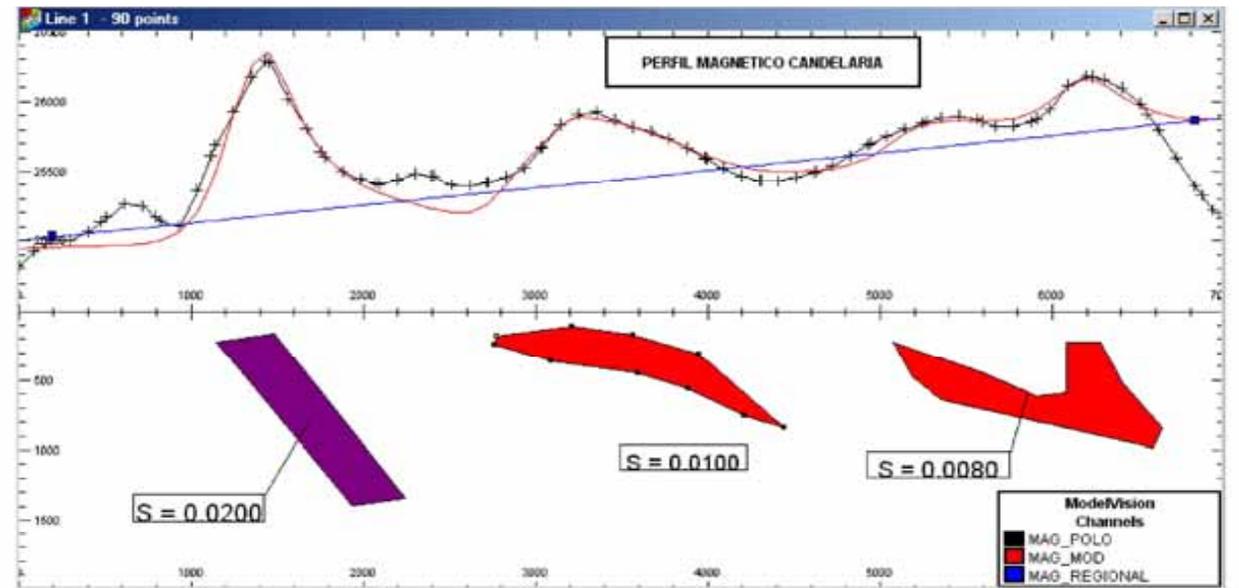


SECCION GEOLOGICA V/S RTP

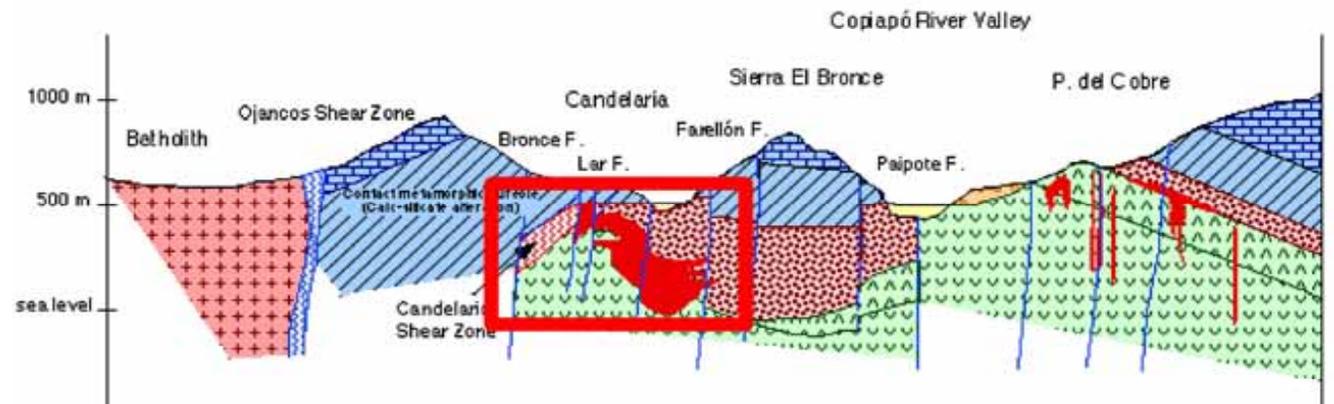


MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA

MODELACION MAGNETICA



A SSW A' NNE



PUNTA DEL COBRE FORMATION

- Algarrobo Member
- Geraldo Negro Member "Meléndez Dacite" (former "Albitófiro")
- "Lower Andesites"

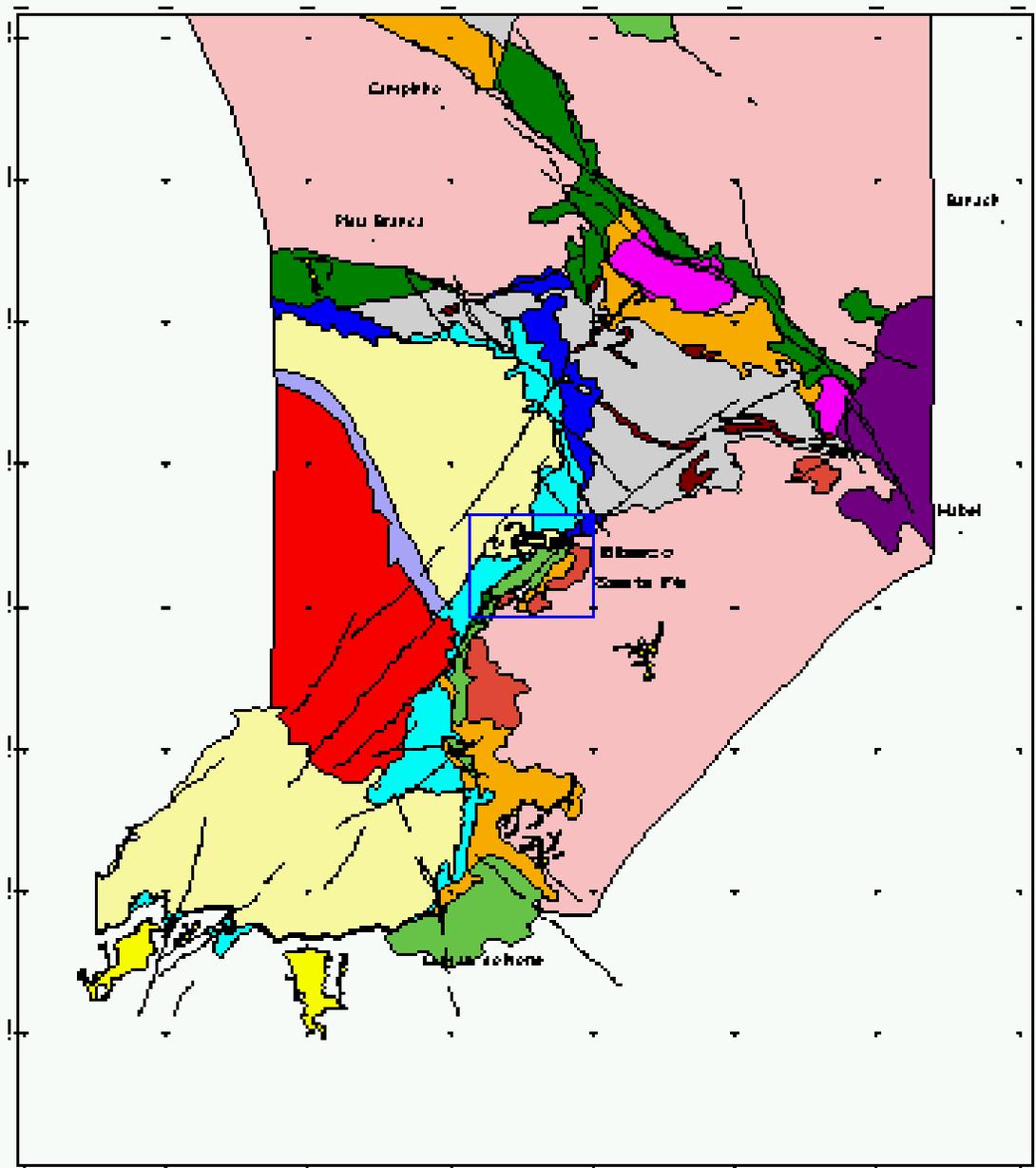
CHAÑARCILLO GROUP

- Naranco Formation
- Abundancia Formation

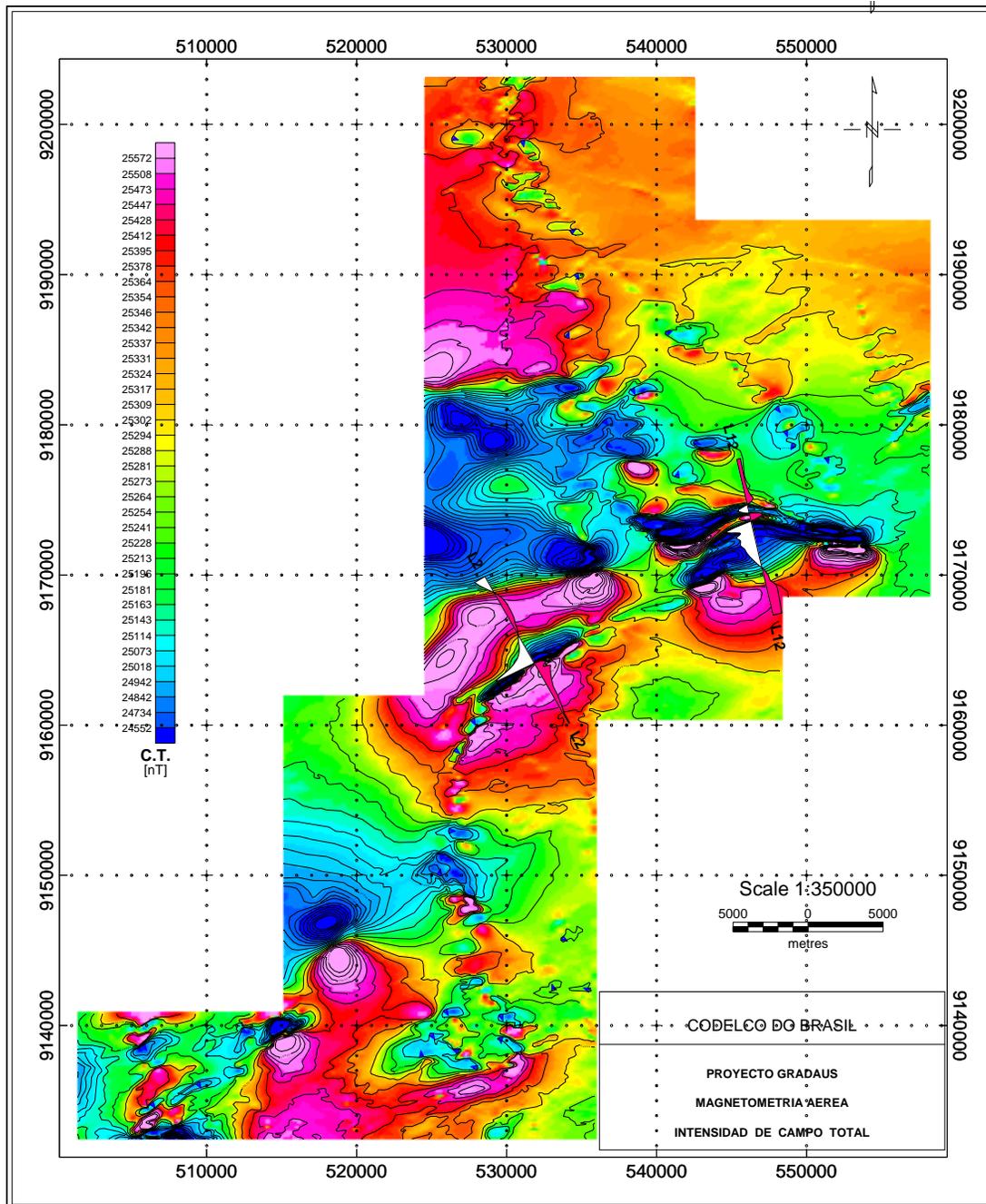
- Alluvium
- Atacama Gravels
- Copiapó Balhdith
- Orebody
- Fault

0 1 km

**EXPLORACION
BRASIL:
Ambientes de
borde cratónico**



MÓDULO II.- GEOFISICA DE POTENCIAL DESCRIPTIVA



**EXPLORACION
BRASIL: CAMPO
MAGNETICO**

**AMBIENTES
CRATÓNICOS DE
ROCAS MAFICAS CON
GRAN CONTRASTE
MAGNÉTICO**

MODULO 3: TEORIA DE POTENCIAL

Campos

Se definen dos tipos de campos:

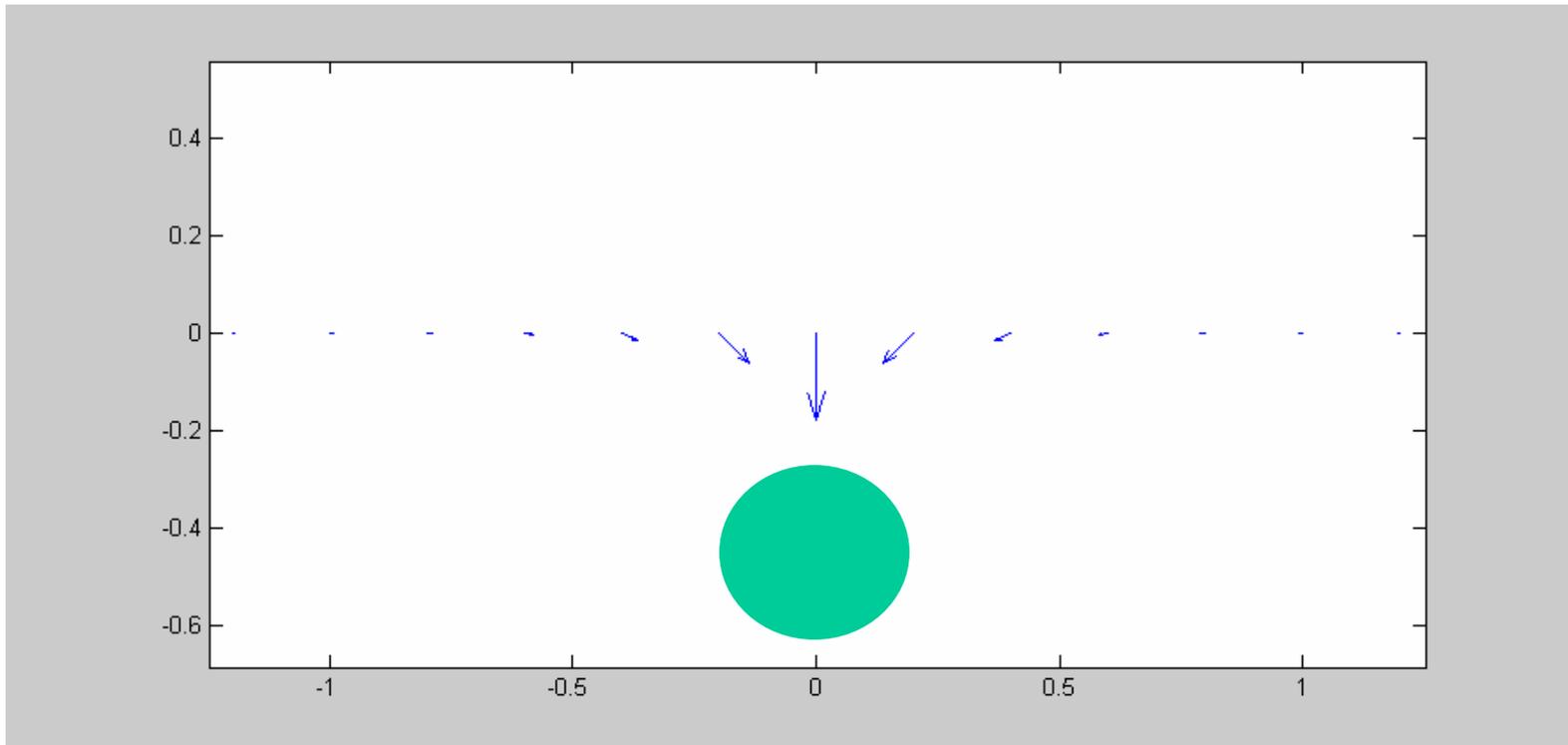
- campo de material: que caracterizan una propiedad física en el espacio (densidad, magnetización, temperatura)
- campo de fuerza: fuerza actuando en una determinada posición en el espacio y tiempo (gravedad, magnetismo, campo eléctrico)

Los campos pueden ser escalares (campo gravimétrico g_z) o bien vectoriales (campo magnético)

Campos

Los campos vectoriales pueden expresarse en términos de las líneas de campo o líneas de flujo. Por ejemplo el campo gravitacional:

$$g(P) = -G \frac{m}{r^2} \hat{r}$$



Campos

Se puede demostrar que si la función F es un campo vectorial continuo entonces las líneas de campo se pueden expresar como la integración de las ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}$$

Ejercicio: demostrar esta afirmación

ENERGIA TRABAJO Y POTENCIAL

La energía cinética utilizada para mover una partícula en un campo de fuerza es definida como el trabajo efectuado por el campo de fuerza.

La segunda ley de Newton nos indica que:

$$\lambda F = m \frac{d}{dt} v$$

Tal que al multiplicar por v (velocidad) a ambos lados se obtiene:

$$Fv = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} v^2 = \frac{d}{dt} E$$
$$\Rightarrow (E - E_o) = \int_{t_o}^{t_1} F \cdot v dt' = \int_{p_o}^{p_1} F \cdot ds = W(p_o, p_1)$$

ENERGIA TRABAJO Y POTENCIAL

El trabajo efectuado depende de la trayectoria seguida entre los puntos P_0 y P_1 .

Un campo de fuerzas se dice conservativo si el trabajo es independiente de la trayectoria seguida.

Si ese es el caso entonces para el trabajo en una dimensión:

$$\int_{P_0}^{P_1} F \cdot ds = \int_{x_0}^{x_1} F \cdot dx = W(x_0, x_1)$$
$$\Rightarrow F_x = \frac{\partial W}{\partial x}$$

ENERGIA TRABAJO Y POTENCIAL

La expresión anterior se puede generalizar para 3-D tal que:

$$\vec{F} = \left[\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right] = \nabla W$$

La derivada del trabajo en cualquier dirección es igual a la componente de fuerza en esa dirección. En consecuencia cualquier cualquier campo de fuerzas cuya función trabajo tiene derivadas es un campo conservativo.

El potencial ϕ asociado a un campo vectorial se define como el trabajo hecho a favor o en contra del campo dependiendo de la naturaleza de la fuerza:

ENERGIA TRABAJO Y POTENCIAL

Fuerzas de atracción (gravedad):

$$\vec{F} = \nabla \phi$$

Fuerzas de repulsión (electrostática):

$$\vec{F} = -\nabla \phi$$

El potencial se define como el trabajo efectuado para traer una dada partícula desde el infinito hasta su posición actual:

$$\phi = \int_{\infty}^P F \cdot ds$$

ENERGIA TRABAJO Y POTENCIAL

Definición:

Superficie equipotencial, superficie en la cual el potencial se mantiene constante

$$\phi(x, y, z) = \text{constante}$$

Funciones armonicas: Mas adelante veremos que la siguiente ecuación diferencial (de Laplace) tiene importantes implicancias en la teoria de potencial. Esta ecuación presenta la siguiente forma:

$$\nabla^2 \phi = 0$$

Si cumple esta relación se dice que esta función es armonica (y puede ser resuelta con funciones sinusoidales)

POTENCIAL: Consecuencias

En la presentación anterior se definió la función potencial en campos de fuerzas conservativos, ahora se revisará una serie de características que son fundamentales para el tratamiento posterior de la teoría de potencial

Identidades de Green:

Considerar dos funciones U y V continuas y diferenciables en primer orden en un espacio R cerrado. Además considerar que U presenta una segunda derivada continua en la frontera R . Definiendo:

$$A = V \nabla U$$

POTENCIAL: Consecuencias

Entonces:

$$\int_R \nabla \cdot A dv = \int_R \nabla \cdot (V \nabla U) dv$$
$$= \int_R [\nabla V \cdot \nabla U + V \nabla^2 U] dv$$

Usando el teorema de divergencia, la integral del lado izquierdo se puede reducir a una integral de superficie en el entorno R:

$$\int_R \nabla \cdot A dv = \int_S A \cdot \hat{n} dS = \int_S V \nabla U \cdot \hat{n} dS = \int_S V \frac{\partial U}{\partial n} dS$$

POTENCIAL: Consecuencias

Entonces se obtiene la primera identidad de Green:

$$\int_R \left[\nabla V \cdot \nabla U + V \nabla^2 U \right] dv = \int_S V \frac{\partial U}{\partial n} dS$$

Si la función U es armónica y $V=1$ (constante), entonces:

$$\int_S \frac{\partial U}{\partial n} dS = 0$$

Si la función U es armónica el flujo nulo a través de la frontera implica la ausencia de fuente al interior del dominio:

POTENCIAL: Consecuencias

$$\int_R [\nabla V \cdot \nabla U + V \nabla^2 U] dv = \int_S V \frac{\partial U}{\partial n} dS$$

Si la función U es armonica y $V=U$, entonces:

$$\int_R (\nabla U)^2 dv = \int_S U \frac{\partial U}{\partial n} dS$$

Si la función U es nula en la frontera entonces se cumple que es nula al interior donde U es constante. Se puede demostrar ademas que si hay dos potenciales $U_1(S) = U_2(S)$ entonces U_1 y U_2 son identicos. En otras palabras la condicion interior esta determinada por las condiciones de borde.

POTENCIAL: Consecuencias

Segunda identidad de Green:

Si se intercambian U y V en la primera identidad de Green y se resta a esta:

$$\int_R [U \nabla^2 V - V \nabla^2 U] dv = \int_S \left[U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS$$

Que corresponde a la Segunda identidad de Green:

POTENCIAL: Consecuencias

Tercera identidad de Green:

Considerar $V=1/r$ en segunda identidad de Green (r es la distancia entre los puntos P y Q):

$$\int_R \left[U \nabla^2 \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \nabla^2 U \right] dv = \int_S \left[U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS$$

Se demuestra que al integrar c/r a Q se obtiene 3a Identidad de Green:

$$U(P) = -\frac{1}{4\pi} \left[\int_R \frac{\nabla^2 U}{r} dv + \int_S \left[U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS \right]$$

POTENCIAL: Consecuencias

Tercera identidad de Green:

Si U es armónico:

$$U(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left[U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right] dS$$

MODULO 4: MODELACION DIRECTA

Gravedad

El potencial gravitatorio se define como:

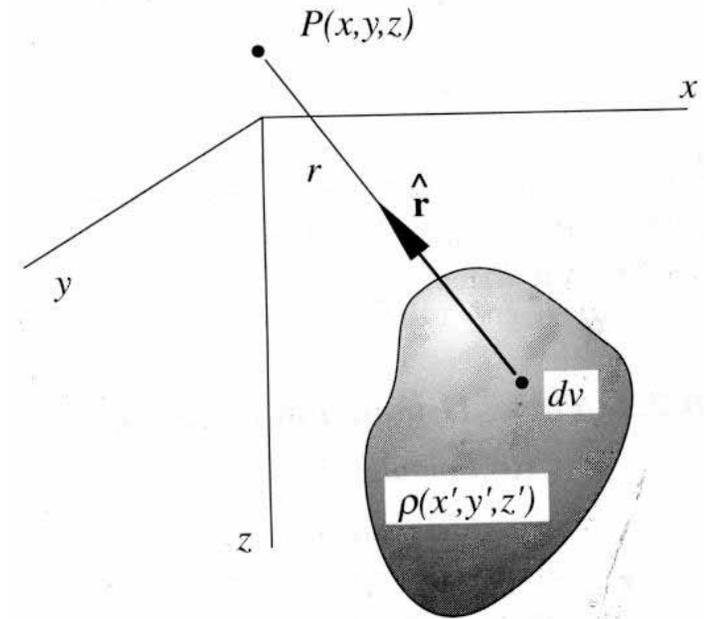
$$U(P) = G \int_V \frac{\rho}{r} dv$$

Tal que la aceleración de gravedad se puede escribir como:

$$g(P) = \nabla U = -G \int_V \frac{\rho}{r^2} \hat{r} dv$$

o en particular en dirección de z:

$$g(P) = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial z} = -G \int_{x'} \int_{y'} \int_{z'} \rho(x', y', z') \frac{(z - z')}{r^3} dx' dy' dz'$$



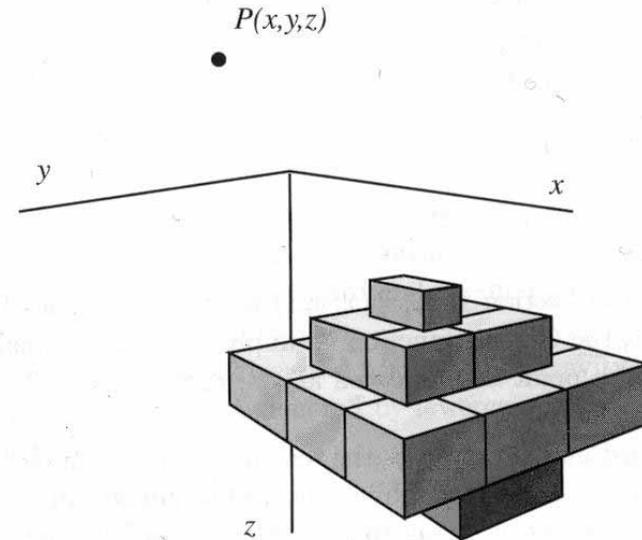
Gravedad

Donde la distancia observador-fuente r es:

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

A) PRISMAS RECTANGULARES

Para prismas rectangulares centrados en el origen a una profundidad z' , que pueden aproximar un cuerpo irregular (Plouff, 1975):



$$g = G\rho \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \frac{z'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} dx' dy' dz'$$

Gravedad

A) PRISMAS RECTANGULARES

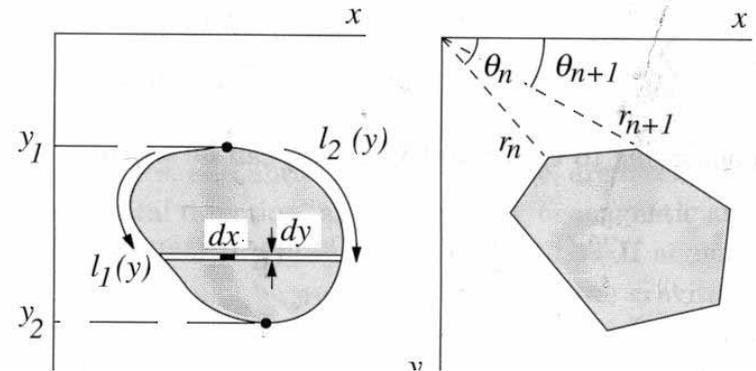
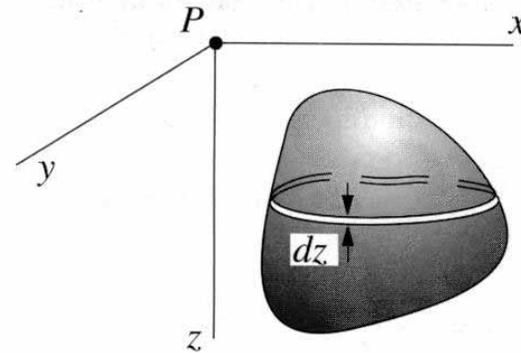
Integrando en los límites correspondientes del prisma:

$$g = G\rho \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \mu_{ijk} \left[\begin{array}{l} z_k \operatorname{atan} \frac{x_i y_j}{z_k R_{ijk}} - x_i \log(R_{ijk} + y_j) \\ - y_j \log(R_{ijk} + x_i) \end{array} \right]$$
$$R_{ijk} = \sqrt{x_i^2 + y_j^2 + z_k^2}; \quad \mu_{ijk} = (-1)^i (-1)^j (-1)^k$$

Gravedad

B) LAMINAS DE PLANTA VARIABLE

Para cuerpos de forma irregular Talwani & Ewing proponen separar la integral de volumen en una integración de línea en planta para luego efectuar la integración c/r a z como una sumatoria de la secuencia de laminas horizontales.



$$g = G\rho \int_{z'} z' dz' \int_{x'} \int_{y'} \frac{dx' dy'}{\underbrace{\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}}_{\Gamma(z')}} = G\rho \int_{z'} z' \Gamma(z') dz'$$

Gravedad

B) LAMINAS DE PLANTA VARIABLE

La integral $\Gamma(z')$ se resuelve mediante una integración de línea (teorema de Stokes):

$$\oint A \cdot dl = \int_s (\nabla \times A) \cdot \hat{n} ds$$

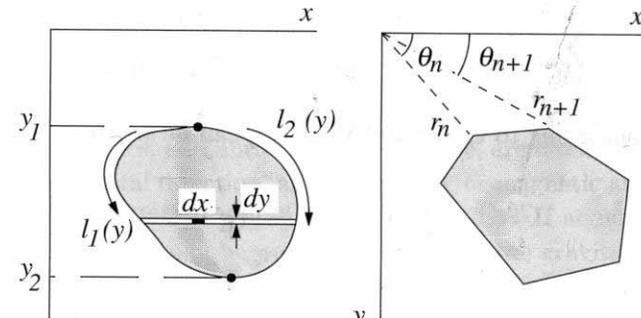
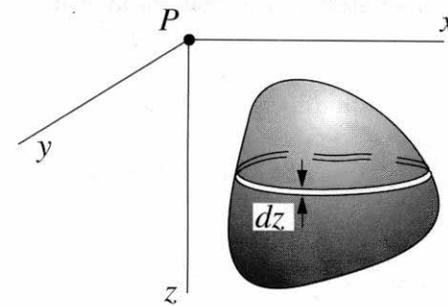
En la integral anterior esta transformación de Stokes se resuelve como:

$$A = \frac{x'}{(y'^2 + z'^2) \cdot (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2}}; dl = dy'$$

Gravedad

B) LAMINAS DE PLANTA VARIABLE

Discretizando entonces en trazos rectos, la integral de línea se expresa como:



$$\Gamma(z') = \sum_{m=1}^M \int_{y_m}^{y_{m+1}} \frac{x' dy'}{(y'^2 + z'^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2}}$$

Gravedad

B) LAMINAS DE PLANTA VARIABLE

Esta integral se resuelve para los M segmentos del perímetro de la planta del cuerpo para la profundidad z' :

$$\Gamma(z') = \sum_{m=1}^M \left[\text{atan}(\Omega_{m+1}) - \text{atan}(\Omega_m) \right]$$

$$\Omega_m = \frac{z'(\beta_m y_m - \alpha_m z'^2)}{x_m \left[(1 + \alpha_m^2) z'^2 + \beta_m^2 \right] - (\alpha_m^2 z'^2 + \beta_m^2) \sqrt{x_m^2 + y_m^2 + z'^2}}$$

$$\Omega_{m+1} = \frac{z'(\beta_m y_{m+1} - \alpha_m z'^2)}{x_{m+1} \left[(1 + \alpha_m^2) z'^2 + \beta_m^2 \right] - (\alpha_m^2 z'^2 + \beta_m^2) \sqrt{x_{m+1}^2 + y_{m+1}^2 + z'^2}}$$

$$x' = \alpha_m y' + \beta_m; \quad \alpha_m = \frac{x_{m+1} - x_m}{y_{m+1} - y_m}; \quad \beta_m = \frac{x_m y_{m+1} - x_{m+1} y_m}{y_{m+1} - y_m}$$

Gravedad

B) LAMINAS DE PLANTA VARIABLE

Finalmente la integración según z' se resuelve subdividiendo el volumen en láminas de espesor dh a una profundidad h_i :

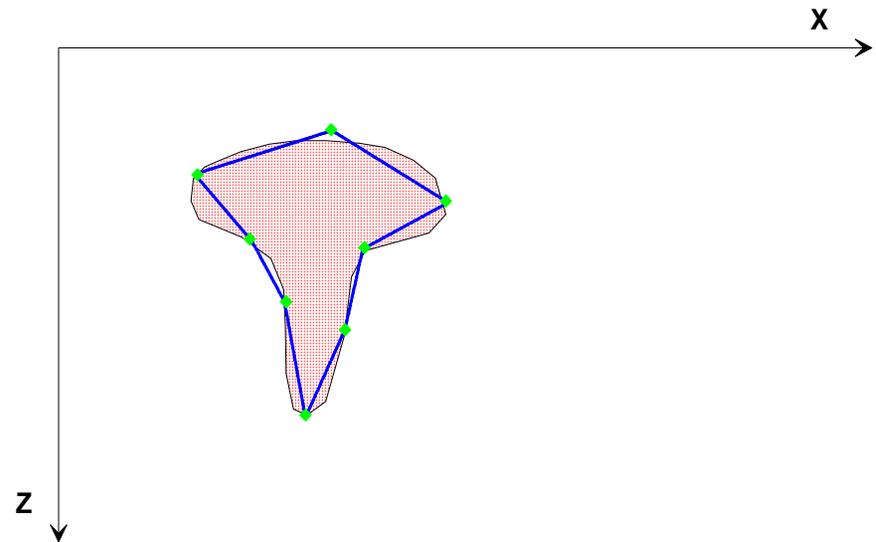
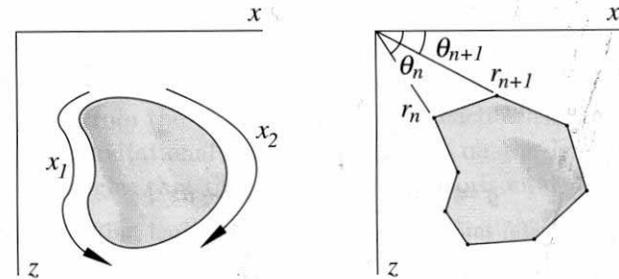
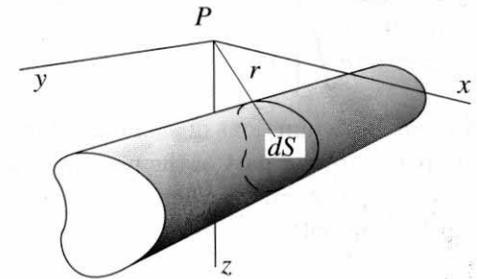
$$g = G\rho\Delta h \sum_{n=1}^N h_n \cdot \Gamma(z', h_n) = \sum_{n=1}^N h_n \left\{ \sum_{m=1}^M \left[\text{atan}(\Omega_{m+1,n}) - \text{atan}(\Omega_{m,n}) \right] \right\}$$

Gravedad

C) MODELACION 2-D

Para cuerpos que se extienden en forma infinita en una dirección (p.ej cuencas sedimentarias elongadas en dirección del rumbo), la integral de volumen se transforma en una integral de superficie (integrando entre - y + infinito en dirección y' : potencial logarítmico), cuya gravedad corresponde a:

$$g = 2G\rho \iint_S \frac{z' dx' dz'}{x'^2 + z'^2}$$



Gravedad

C) MODELACION 2-D

Esta integral de superficie puede tambien expresarse como una integral de línea mediante la aplicación del teorema de stokes:

$$g = 2G\rho \iint_S \frac{z' dx' dz'}{x'^2 + z'^2} = 2G\rho \oint \operatorname{atan} \left[\frac{x'}{z'} \right] dz'$$

Esta integral de línea se discretiza en trazos rectos que simulan en forma aproximada la geometría del cuerpo anómalo:

$$g = 2G\rho \sum_{n=1}^N \frac{\beta_n}{1 + \alpha_n^2} \left[\log \frac{r_{n+1}}{r_n} - \alpha_n (\theta_{n+1} - \theta_n) \right]$$
$$x' = \alpha_n z' + \beta_n; \quad \alpha_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{z_{n+1} - z_n}; \quad \beta_n = x_n - \alpha_n z_n$$
$$r_n = \sqrt{x_n^2 + z_n^2}; \quad \theta_n = \operatorname{atan}(z_n / x_n)$$

MAGNETISMO

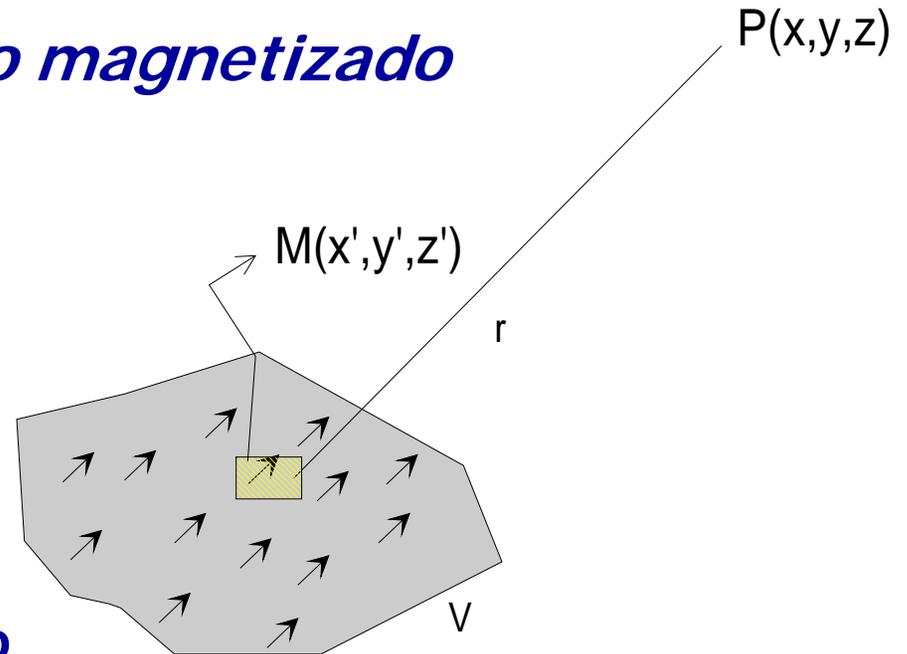
Potencial Magnético en cuerpo magnetizado de forma arbitraria

Un cuerpo magnetizado de volumen V puede ser discretizado en dipolos magnéticos cuya distancia dipolar sea considerablemente superior a la distancia entre el punto de observación y la fuente. El potencial magnético diferencial de cada dipolo al interior del volumen V corresponde a:

$$A = M(r') \frac{\cos \theta}{r^2} = -M(r') \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right)$$

En consecuencia el potencial magnético de todo el volumen V se expresa como:

$$A(r) = - \int_V M(r') \cdot \nabla \left(\frac{1}{|r-r'|} \right) dv'$$



MÓDULO IV.- Modelación directa

Si la magnetización es uniforme no depende del volumen de integración y puede ser ubicada fuera de la integral en conjunto con el operador gradiente:

$$A(r_o) = -M(r_o) \cdot \nabla \int_V \left(\frac{1}{|r-r_o|} \right) dv$$

La expresión anterior permite establecer una importante relación entre el potencial magnético y gravitatorio para el caso de distribuciones homogéneas de densidad y magnetización:

$$A(r_o) = -\frac{M(r_o)}{G\rho(r_o)} \cdot \nabla U \quad (\text{Relación de Poisson}).$$

$$\text{Fuerza gravitacional } F = \frac{Gm}{r^2} = -\nabla U \Rightarrow U(r) = \frac{Gm}{r}$$

o bien para una distribución en un volumen dado :

$$U(r_o) = G \int_V \frac{dm}{|r-r_o|} = G \int_V \frac{\rho dv}{|r-r_o|} = G\rho \int_V \frac{dv}{|r-r_o|} \quad (\text{densidad constante})$$

Relación de Poisson:

$$A(r_o) = -\frac{M(r_o)}{G\rho(r_o)} \cdot \nabla U$$

Si pensamos en una carga magnética distribuida en un volumen de integración:

$$A(r) = \int_V M(r) \cdot \nabla \left[\frac{1}{|r - r_o|} \right] dv$$
$$\Rightarrow H = -\nabla A = \nabla \int_s M(r) \cdot \nabla \left[\frac{1}{|r - r_o|} \right] dv$$

Si la dirección de magnetización es la misma en todo el volumen de integración entonces:

$$M \cdot \nabla = M \frac{\partial}{\partial \alpha} \Rightarrow H = \nabla \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_s M(r) \frac{dv}{|r - r_o|}$$

Al igual que en gravimetría, es posible derivar una expresión similar del potencial magnético para cuerpos infinitamente extendidos en la dirección del rumbo. Utilizando la relación de Poisson se obtiene:

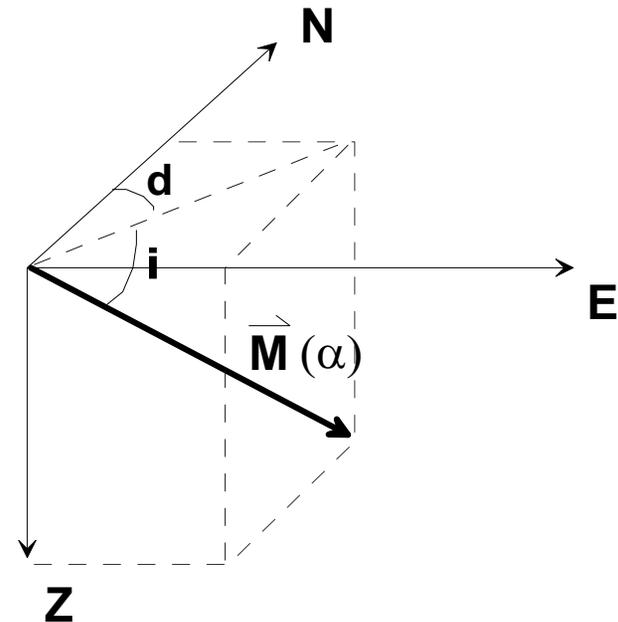
$$A(r) = -2M(r') \cdot \nabla \int_s \log\left(\frac{1}{|r - r'|}\right) ds'$$

Si la magnetización es constante, entonces podemos expresar el efecto magnético de un cuerpo de forma arbitraria como:

$$H(r_o) = M(r_o) \nabla \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_s \frac{dv}{|r - r_o|}$$

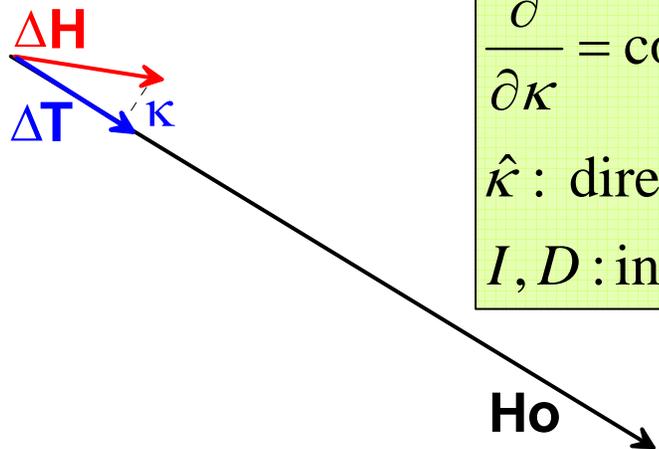
Donde α es la dirección de magnetización del cuerpo magnetizado:

La derivada direccional en dirección α se expresa en un sistema cartesiano como:



$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = \cos(i) \cdot \cos(d) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \cos(i) \cdot \sin(d) \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \sin(i) \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

En la práctica sin embargo el magnetómetro registra el campo magnético del cuerpo anómalo superpuesto al campo magnético terrestre, y por razones del principio físico utilizado para efectuar la medición del campo (ver recuadro), solo se registra la componente paralela al campo ambiente en el lugar de medición.



$$H = H_o + \Delta H, \quad \text{pero } \Delta H \ll H_o$$

$$\Rightarrow \Delta T \approx \Delta H \cdot \hat{k} = -\nabla A \cdot \hat{k} = -\frac{\partial A}{\partial \kappa}$$

$$\frac{\partial}{\partial \kappa} = \cos(I) \cdot \cos(D) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \cos(I) \cdot \sin(D) \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \sin(I) \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

\hat{k} : dirección del campo magnético terrestre,

I, D : inclinación y declinación del campo magnético

En caso de cuerpos magnetizados por inducción
($\alpha = \kappa; \Rightarrow M = \kappa' F_o$):

$$\Delta T(r_o) = \kappa' F_o \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \int_v \frac{1}{|r - r_o|} dv$$

Para el caso de vectores no coincidentes (remanencia pura):

$$\Delta T(r_o) = M \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \kappa} \int_v \frac{1}{|r - r_o|} dv$$

En el caso mas general:

$$M = M_o + \kappa' F_o$$

EJEMPLO: MODELACION MAGNETICA DE DIQUE VERTICAL

En el capítulo de gravedad se demostró que la integral de volumen:

$$\int_v \frac{1}{|r - r_o|} dv$$

Puede expresarse como una integral de superficie bajo el supuesto que el cuerpo presenta simetría cilíndrica (se extiende infinitamente en dirección del rumbo):

$$\int_v \frac{1}{|r - r_o|} dv = 2 \int_s \log\left(\frac{1}{|r - r_o|}\right) ds$$

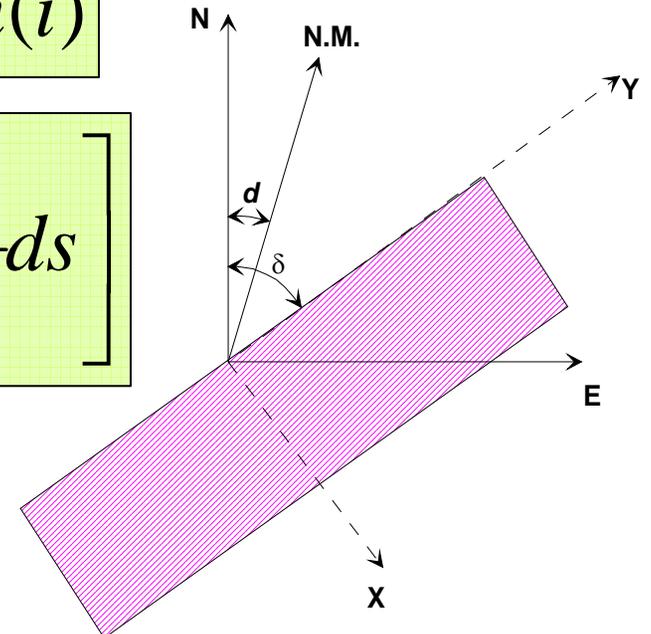
En consecuencia el potencial magnético en dos dimensiones se expresa como:

$$A(r_o) = -2M \cdot \nabla \int_s \log\left(\frac{1}{|r-r_o|}\right) ds$$

$$A(r_o) = -2M \left[\alpha_x \frac{\partial}{\partial x} \int_s \log\left(\frac{1}{|r-r_o|}\right) ds + \alpha_z \frac{\partial}{\partial z} \int_s \log\left(\frac{1}{|r-r_o|}\right) ds \right]$$

$$\alpha_x : \cos(i) \cdot \cos(d - \delta); \quad \alpha_z : \sin(i)$$

$$A(r_o) = -2M \left[\alpha_x \int_s \frac{x}{|r-r_o|^2} ds + \alpha_z \int_s \frac{z}{|r-r_o|^2} ds \right]$$



El campo magnético total se expresa entonces como:

$$\Delta T = -\nabla A(r_o) \cdot \hat{K} = - \left[\kappa_x \frac{\partial A}{\partial x} + \kappa_z \frac{\partial A}{\partial z} \right]$$

$$\kappa_x : \cos(I) \cdot \cos(D - \delta); \quad \kappa_z : \sin(I)$$

$$\Delta T = 2M \left\{ \begin{array}{l} \kappa_x \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha_x \int_s \frac{x}{|r-r_o|} ds + \alpha_z \int_s \frac{z}{|r-r_o|} ds \right] + \\ \kappa_z \frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha_x \int_s \frac{x}{|r-r_o|} ds + \alpha_z \int_s \frac{z}{|r-r_o|} ds \right] \end{array} \right\}$$

MÓDULO IV.- Modelación directa

$$\Delta T = 2M \left\{ \begin{array}{l} \kappa_x \left[\alpha_x \int_s \frac{z^2 - x^2}{|r - r_o|^4} ds + \alpha_z \int_s \frac{-2 \cdot x \cdot z}{|r - r_o|^4} ds \right] + \\ \kappa_z \left[\alpha_x \int_s \frac{-2 \cdot x \cdot z}{|r - r_o|^4} ds + \alpha_z \int_s \frac{x^2 - z^2}{|r - r_o|^4} ds \right] \end{array} \right\}$$

$$\Delta T = 2M \left\{ \kappa_x [\alpha_x U_{xx} + \alpha_z U_{xz}] + \kappa_z [\alpha_x U_{xz} - \alpha_z U_{xx}] \right\}$$

$$U_{xx} = \int_s \frac{z^2 - x^2}{|r - r_o|^4} ds; \quad U_{xz} = \int_s \frac{-2 \cdot x \cdot z}{|r - r_o|^4} ds$$

Si el cuerpo esta magnetizado por inducción:

$$\alpha_x = \kappa_x = \cos(i) \cdot \cos(d - \delta)$$

$$\alpha_z = \kappa_z = \sin(i)$$

$$\Delta T = 2M \left\{ \begin{array}{l} U_{xx} \left[\cos^2(i) \cdot \cos^2(d - \delta) - \sin^2(i) \right] + \\ 2 \cdot U_{xz} \left[\cos(i) \cdot \cos(d - \delta) \cdot \sin(i) \right] \end{array} \right\}$$

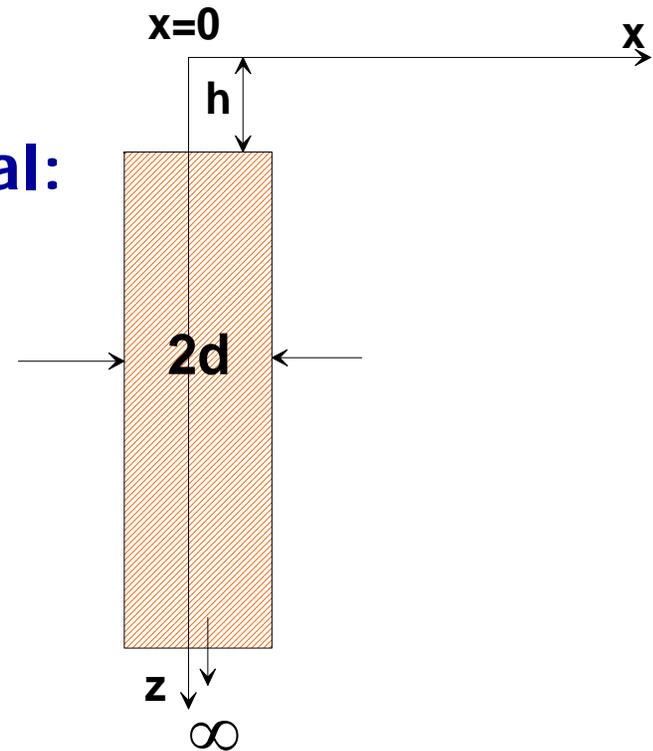
En consecuencia para resolver el campo total es necesario conocer los cosenos directores y las integrales:

$$U_{xx} = \int_s \frac{z^2 - x^2}{|r - r_o|^4} ds; \quad U_{xz} = \int_s \frac{-2 \cdot x \cdot z}{|r - r_o|^4} ds$$

Evaluando estas integrales para un punto x distinto del origen:

$$U_{xx} = \int_s \frac{z^2 - (x - x_o)^2}{[(x - x_o)^2 + z^2]^2} ds; \quad U_{xz} = \int_s \frac{-2 \cdot (x - x_o) \cdot z}{[(x - x_o)^2 + z^2]^2} ds$$

Para una geometría correspondiente a un dique vertical:



MÓDULO IV.- Modelación directa

$$U_{xz} = \int_{x=-d}^{x=d} dx \int_{z=h}^{z=\infty} \frac{-2 \cdot (x-x_o) \cdot z}{\left[(x-x_o)^2 + z^2 \right]^2} dz$$

Integrando c/r a z:

$$U_{xz} = \int_{x=-d}^{x=d} \frac{(x-x_o)}{\left[(x-x_o)^2 + h^2 \right]} dx$$

Integrando c/r a x:

$$U_{xz}(x_o) = \frac{1}{2} \log \left[(x-x_o)^2 + h^2 \right]_{-d}^{+d} = \frac{1}{2} \log \frac{(d+x_o)^2 + h^2}{(-d+x_o)^2 + h^2}$$

MÓDULO IV.- Modelación directa

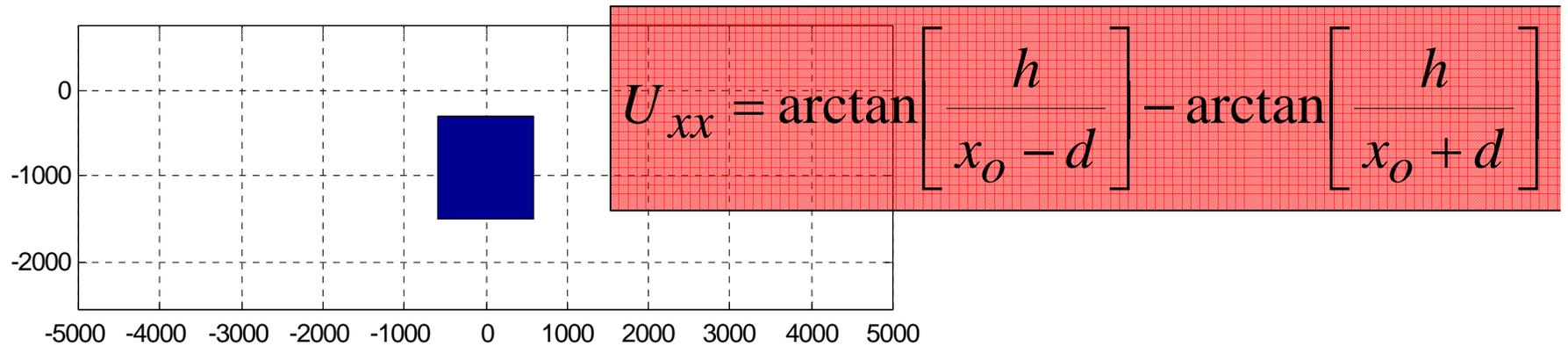
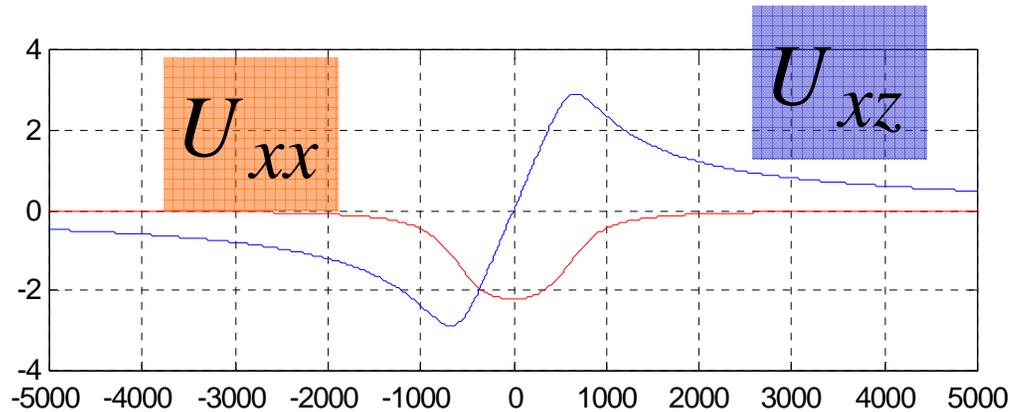
$$U_{xx} = \int_{-d}^d dx \int_h^{\infty} \frac{z^2 - (x-x_o)^2}{\left[(x-x_o)^2 + z^2 \right]^2} dz$$

Integrando c/r a x / z:

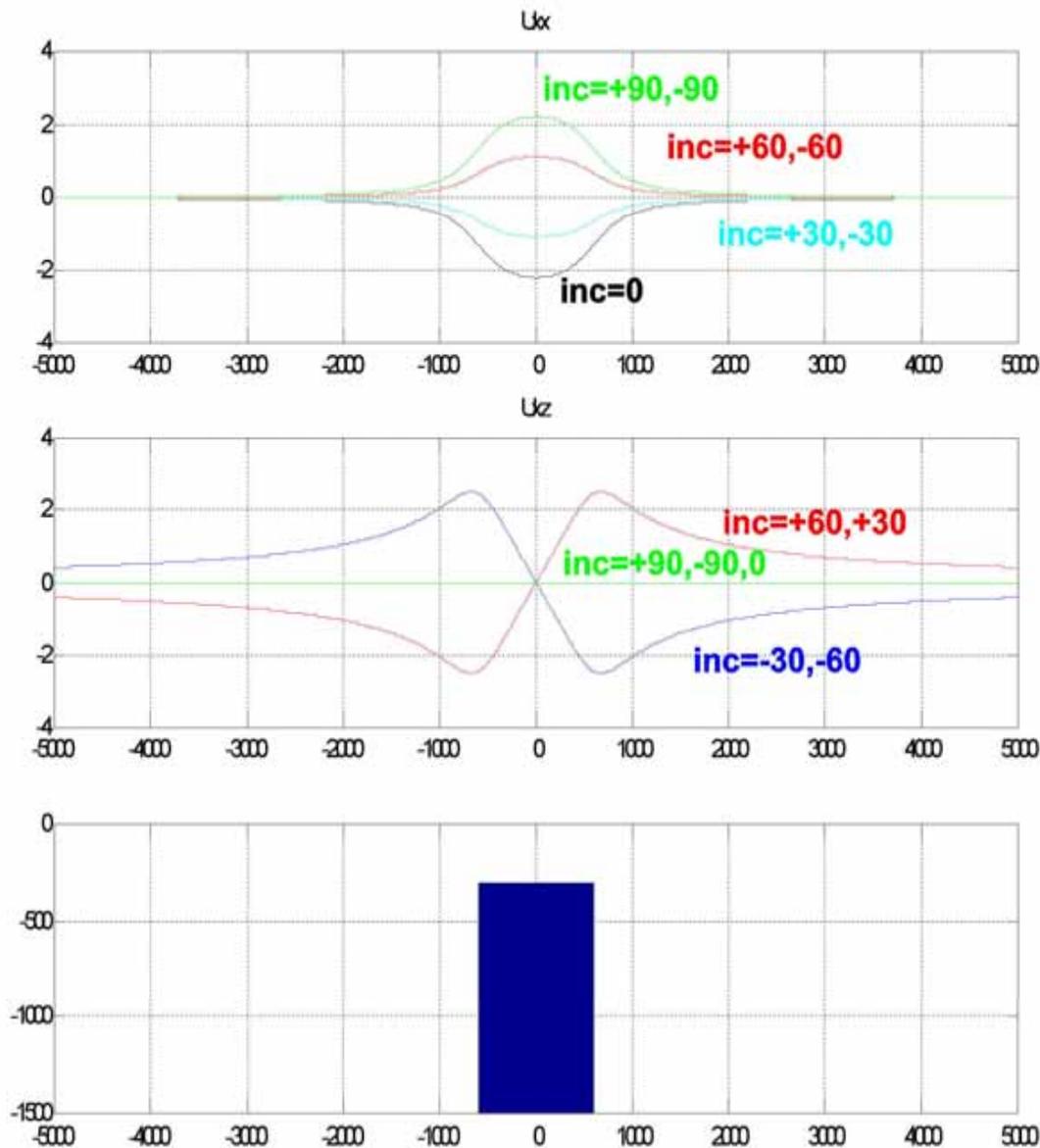
$$U_{xx} = \arctan \left[\frac{h}{x_o + d} \right] - \arctan \left[\frac{h}{x_o - d} \right]$$

MÓDULO IV.- Modelación directa

$$U_{xz}(x_o) = \frac{1}{2} \log \frac{(d + x_o)^2 + h^2}{(-d + x_o)^2 + h^2}$$



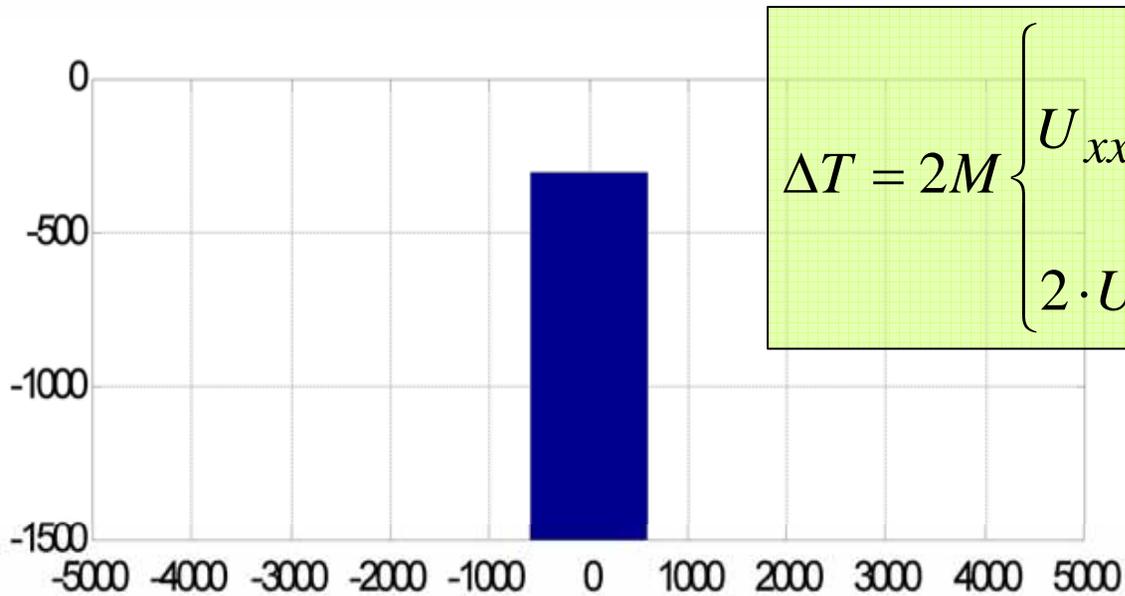
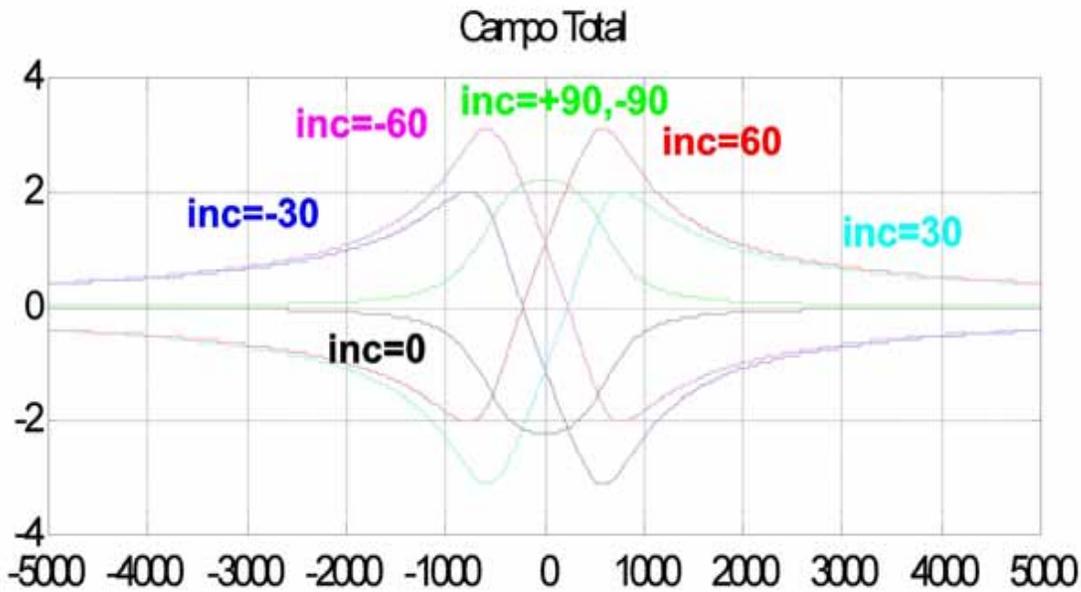
MÓDULO IV.- Modelación directa



Para variaciones del ángulo de inclinación vemos que la componente par es máxima en los polos y mínima en el ecuador.

A su vez la componente impar es nula en los polos y ecuador y dipolar antisimétrica para inclinaciones positivas y negativas

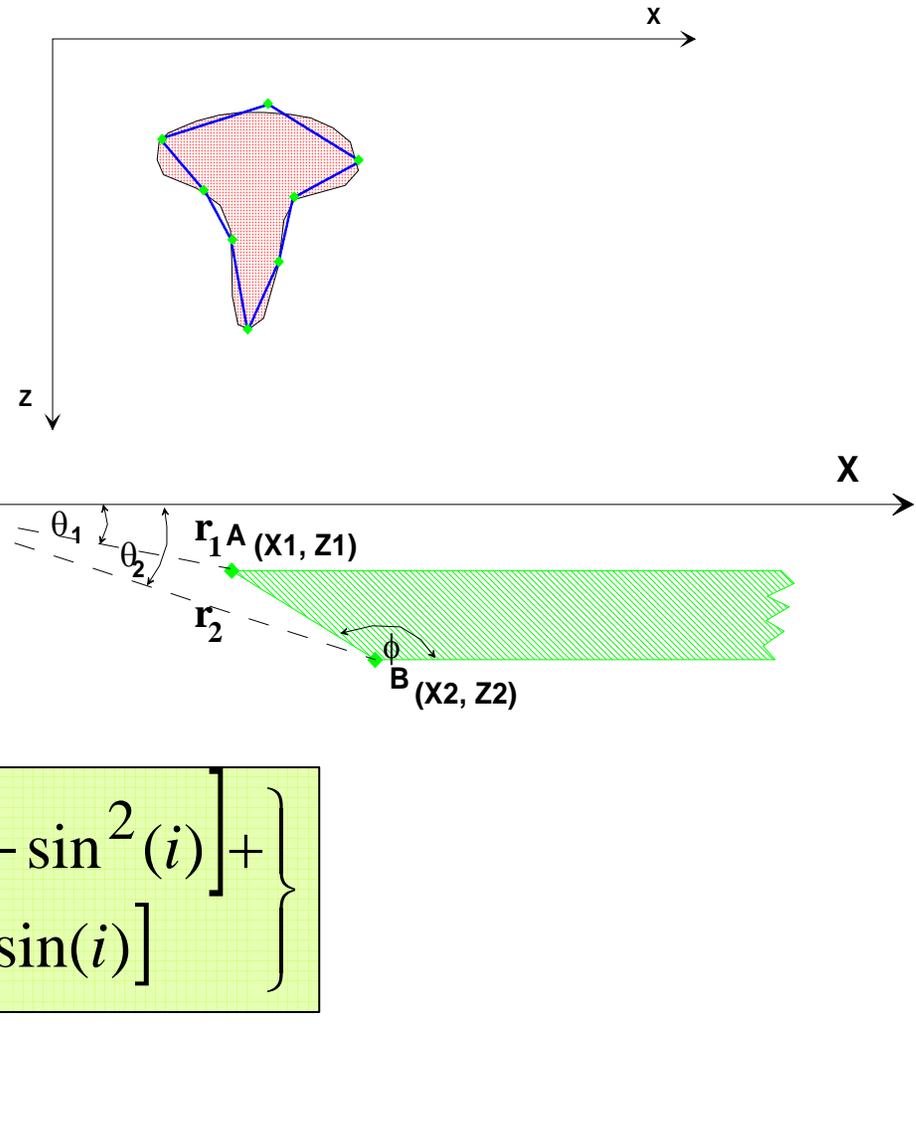
MÓDULO IV.- Modelación directa



$$\Delta T = 2M \left\{ U_{xx} \left[\begin{array}{l} \cos^2(i) \cdot \cos^2(d - \delta) \\ - \sin^2(i) \end{array} \right] + \right. \\ \left. 2 \cdot U_{xz} \left[\cos(i) \cdot \cos(d - \delta) \cdot \sin(i) \right] \right\}$$

MODELACION DE CUERPO 2-D DE FORMA ARBITRARIA (MODELO DE TALWANI): MAGNETISMO

Siguiendo el desarrollo expuesto para la modelación gravitatoria y la relación de Poisson, debemos discretizar el contorno del cuerpo en trazos rectos, de tal forma que el efecto gravitatorio de cada segmento es equivalente a la modelación de un dique horizontal:



$$\Delta T_l = 2M \left\{ U_{xx} \left[\cos^2(i) \cdot \cos^2(d - \delta) - \sin^2(i) \right] + \right. \\ \left. 2 \cdot U_{xz} \left[\cos(i) \cdot \cos(d - \delta) \cdot \sin(i) \right] \right\}$$

MÓDULO IV.- Modelación directa

Donde es necesario evaluar:

$$U_{xx} = \int_s \frac{z^2 - (x - x_o)^2}{\left[(x - x_o)^2 + z^2 \right]^2} ds; \quad U_{xz} = \int_s \frac{-2 \cdot (x - x_o) \cdot z}{\left[(x - x_o)^2 + z^2 \right]^2} ds$$

De acuerdo a los siguientes límites:

$$U_{xx} = \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{c+m \cdot z}^{\infty} \frac{z^2 - (x - x_o)^2}{\left[(x - x_o)^2 + z^2 \right]^2} dx$$

$$U_{xz} = \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{c+m \cdot z}^{\infty} \frac{-2 \cdot (x - x_o) \cdot z}{\left[(x - x_o)^2 + z^2 \right]^2} dz$$

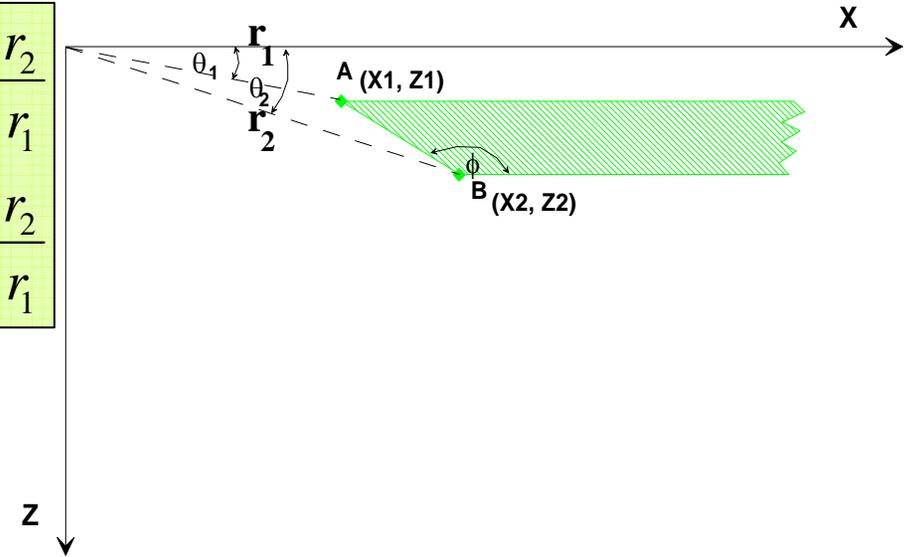
La solución de ambas integrales expresadas en términos de la geometría del dique horizontal es:

$$U_{xx} = (\theta_2 - \theta_1) \cdot \sin(\phi)^2 - \cos(\phi) \cdot \sin(\phi) \cdot \log \frac{r_2}{r_1}$$
$$U_{xz} = (\theta_2 - \theta_1) \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\phi) + \sin(\phi)^2 \cdot \log \frac{r_2}{r_1}$$

MÓDULO IV.- Modelación directa

$$U_{xx} = (\theta_2 - \theta_1) \cdot \sin(\phi)^2 - \cos(\phi) \cdot \sin(\phi) \cdot \log \frac{r_2}{r_1}$$

$$U_{xz} = (\theta_2 - \theta_1) \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\phi) + \sin(\phi)^2 \cdot \log \frac{r_2}{r_1}$$



O bien en forma compacta en términos de las coordenadas de ambos vértices:

$$U_{xx} = (\theta_2 - \theta_1) \cdot \frac{z_{21}^2}{x_{21}^2 + z_{21}^2} - \frac{z_{21} \cdot x_{21}}{x_{21}^2 + z_{21}^2} \cdot \log \frac{r_2}{r_1}$$

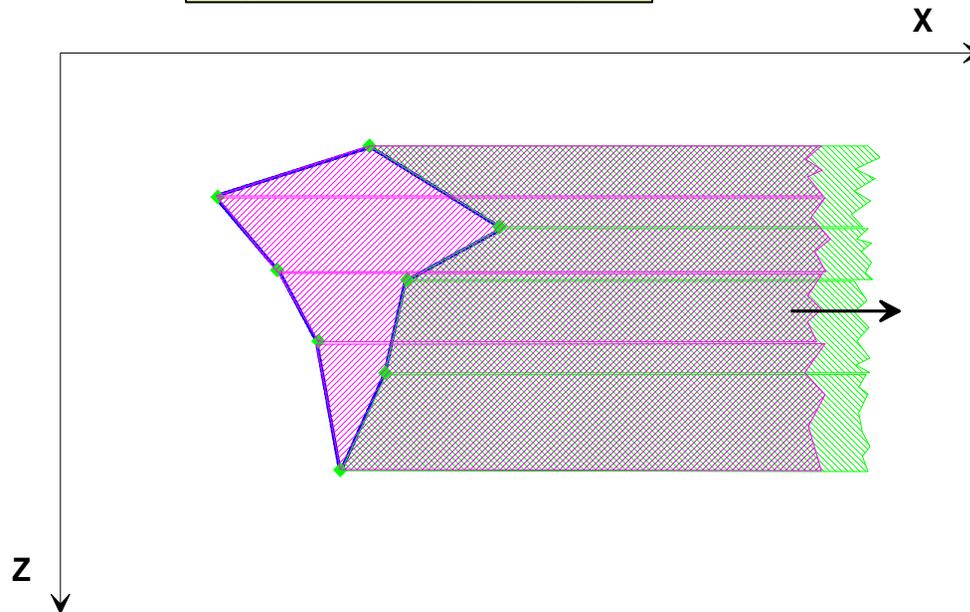
$$U_{xz} = (\theta_2 - \theta_1) \cdot \frac{z_{21} \cdot x_{21}}{x_{21}^2 + z_{21}^2} + \frac{z_{21}^2}{x_{21}^2 + z_{21}^2} \cdot \log \frac{r_2}{r_1}$$

$$x_{21} = x_2 - x_1; \quad z_{21} = z_2 - z_1; \quad r_1 = \text{sqrt}(x_1^2 + z_1^2); \quad r_2 = \text{sqrt}(x_2^2 + z_2^2)$$

MÓDULO IV.- Modelación directa

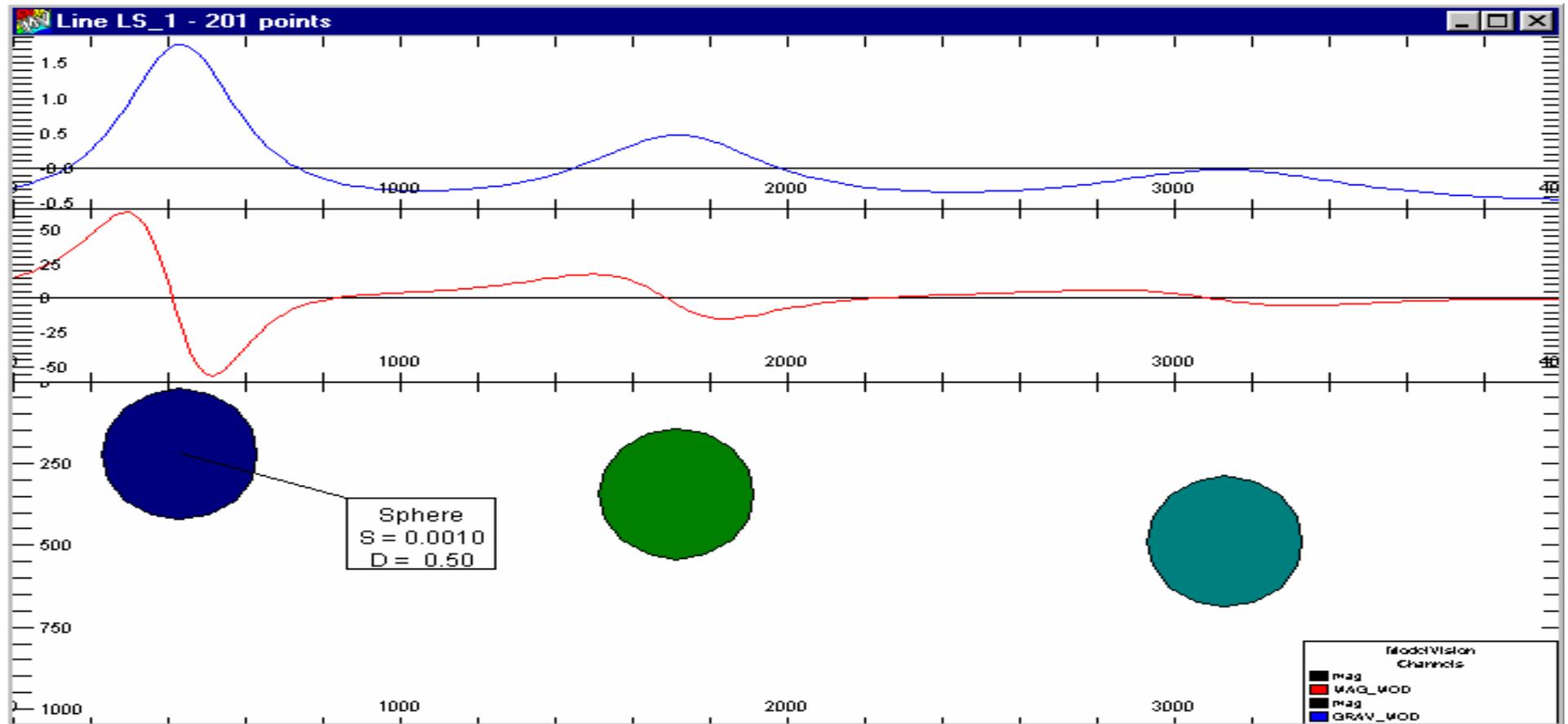
Al efectuar la suma de todos los segmentos del cuerpo que definen diques horizontales, se recupera una integral de línea correspondiente al cuerpo a modelar dado que las integrales del flanco derecho se suman con signo opuesto para descontar el aporte del cuerpo que se extiende hasta infinito (común para todos los diques horizontales) :

$$\Delta T_{tot} = \oint \Delta T_l$$



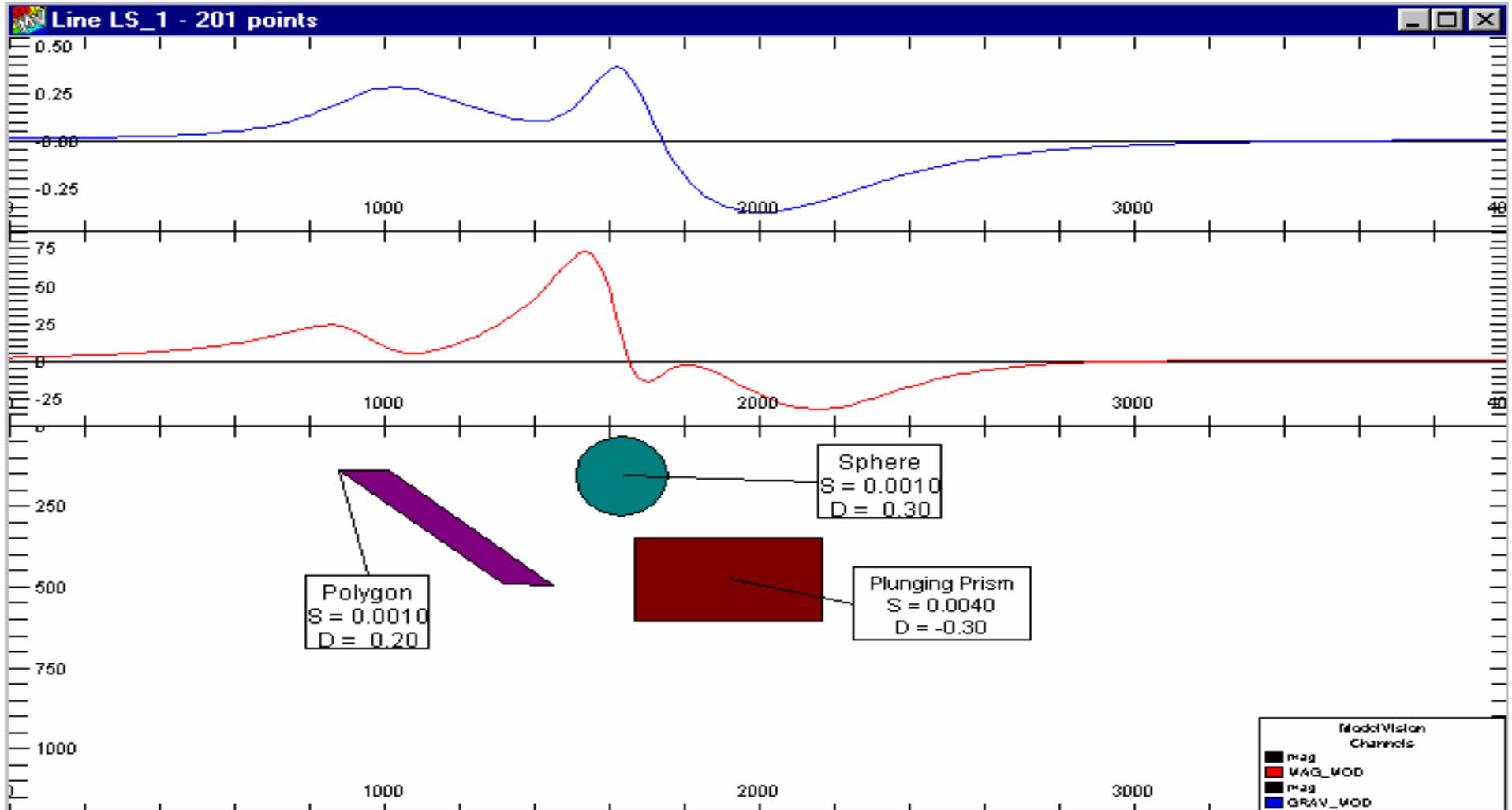
MÓDULO IV.- Modelación directa

- ANOMALIA MAGNÉTICA DIPOLAR
- ANOMALIA GRAVIMETRICA MONOPOLAR CENTRADA EN EL CUERPO
- DISMINUCIÓN DE AMPLITUD CON EL CUADRADO DE LA DISTANCIA EN GRAVEDAD Y EL CUBO DE LA DISTANCIA EN MAGNETISMO
- AUMENTO DE LONGITUD DE ONDA A MAYOR PROFUNDIDAD



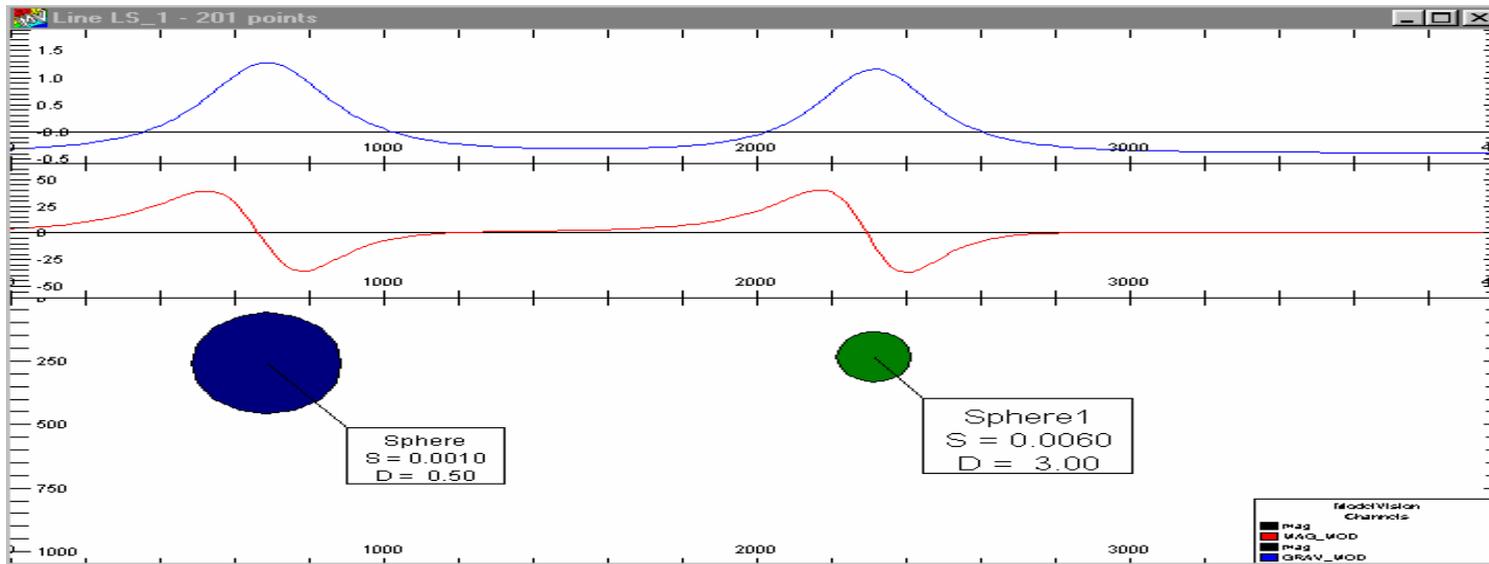
MÓDULO IV.- Modelación directa

ANOMALIA RESULTANTE DE LA SUPERPOSICION DE CUERPOS ANOMALOS ES IGUAL A LA SUMA DE LOS EFECTOS INDIVIDUALES

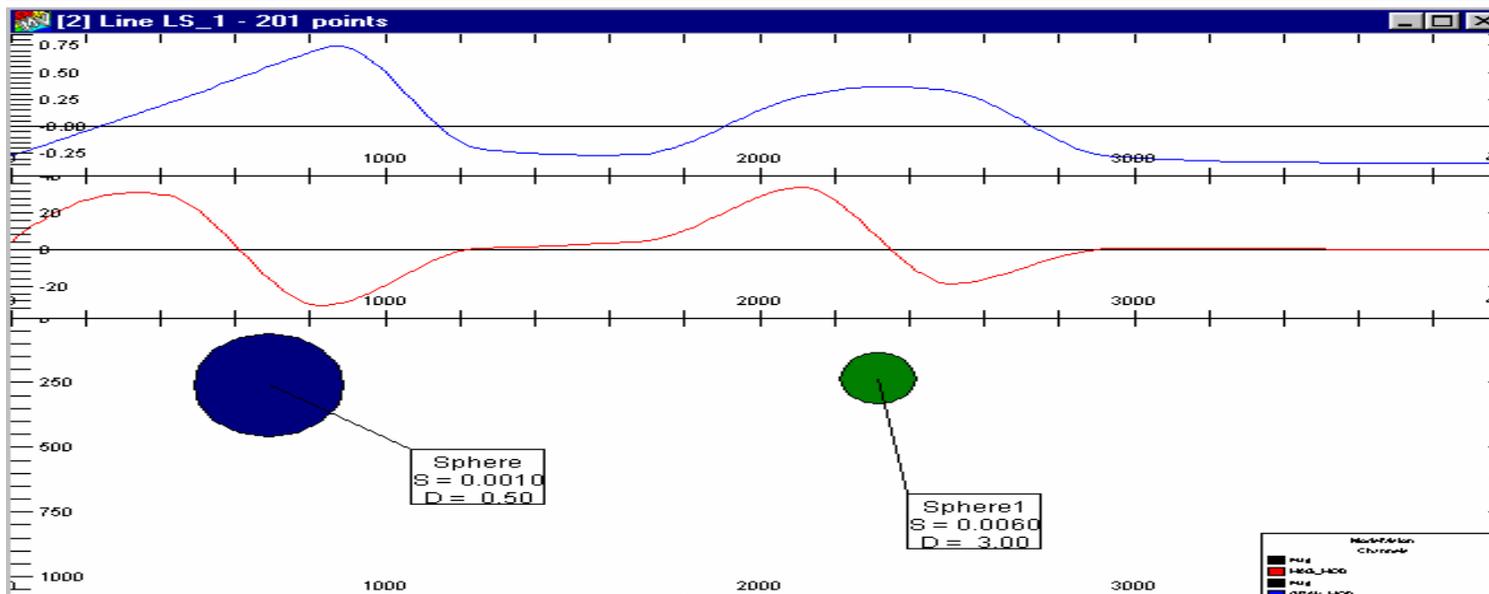


MÓDULO IV.- Modelación directa

TEORIA DE MUESTREO "ALIASING": AL MUESTREAR LA ANOMALIA CON UN INTERVALO INFERIOR AL TAMAÑO DEL CUERPO LA ANOMALIA NO ES RESUELTA EN FORMA COMPLETA



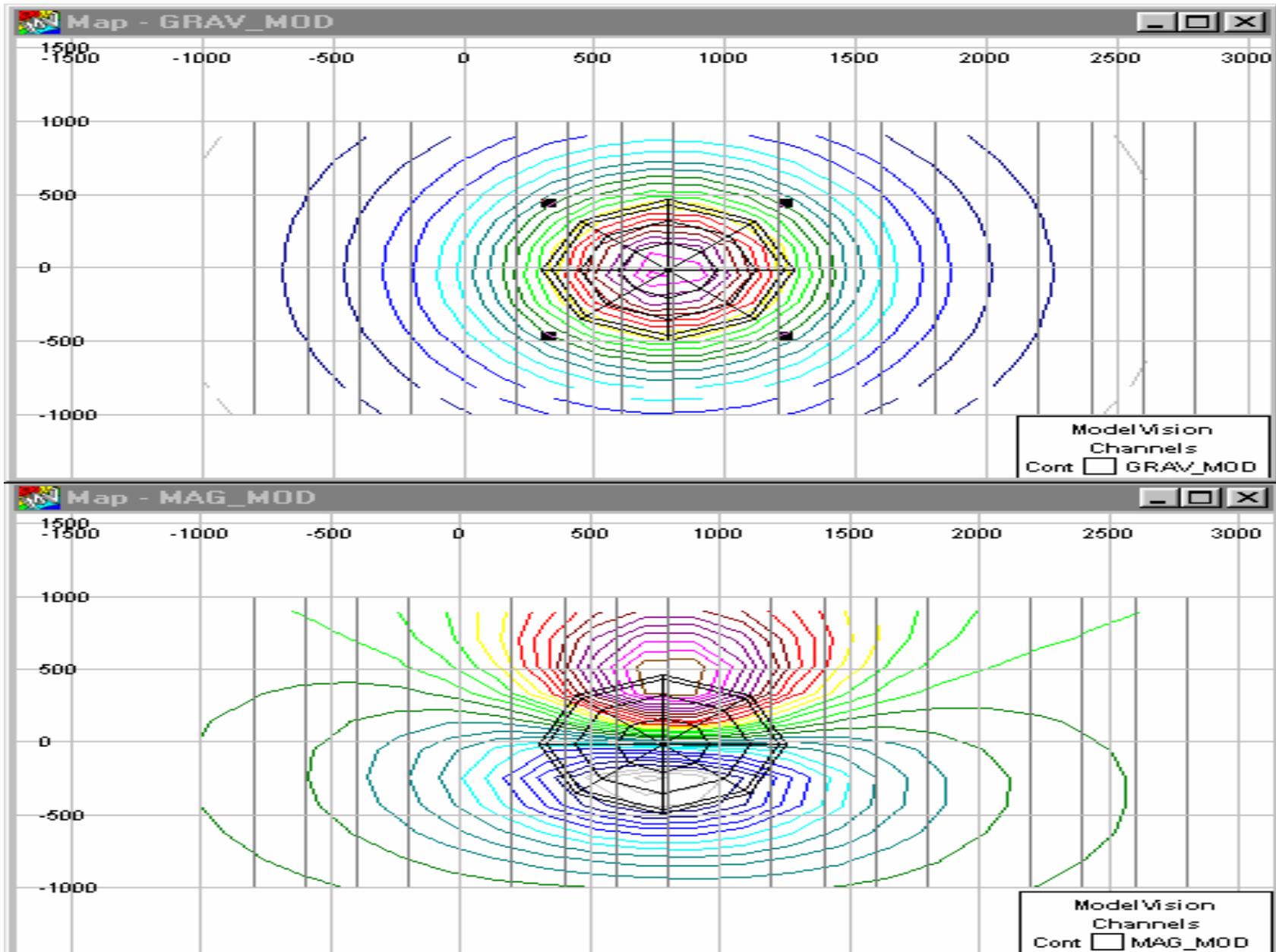
$DX=5M$



$DX=150M$

MÓDULO IV.- Modelación directa

•CUERPOS TRIDIMENSIONALES:



**MODULO 5: ANALISIS
DOMINIO DE LAS
FRECUENCIAS**

Introducción al Análisis de Fourier

La "*Transformada de Fourier*" de una función $f(x)$ se define como:

$$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

$k = 2\pi/\lambda \equiv$ "Número de Onda"

La "*Transformada de Fourier*" será en general una función compleja ($F(k) = \text{Re}F(k) + i \text{Im}F(k)$) y podrá ser escrita como:

$$F(k) = |F(k)| e^{i\Theta(k)} \quad \text{donde:}$$

$$|F(k)| = [(\text{Re}F(k))^2 + (\text{Im}F(k))^2]^{1/2} \quad \text{y} \quad \Theta(k) = \text{Tan}^{-1} \frac{\text{Im}F(k)}{\text{Re}F(k)}$$

La "*Transformada inversa*" de $f(x)$ será:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk$$

Algunas Propiedades de la Transformada de Fourier

- Es un operador lineal :

$$\Rightarrow \text{FT}[af(x)+bg(x)] = aF(k) + bG(k)$$

- Hermitiana:

$$\Rightarrow f(x) \text{ es real} \Leftrightarrow F(k) = F^*(-k) \quad (* \equiv \text{Complejo Conjugado})$$

- Un desplazamiento en el dominio del espacio (tiempo), equivale a un cambio de fase en el dominio de la frecuencia:

$$\Rightarrow f(x-x_0) \leftrightarrow F(k) e^{-ikx_0}$$

- Derivadas :

$$\text{FT}\left[\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right] = (ik)^n F(k)$$

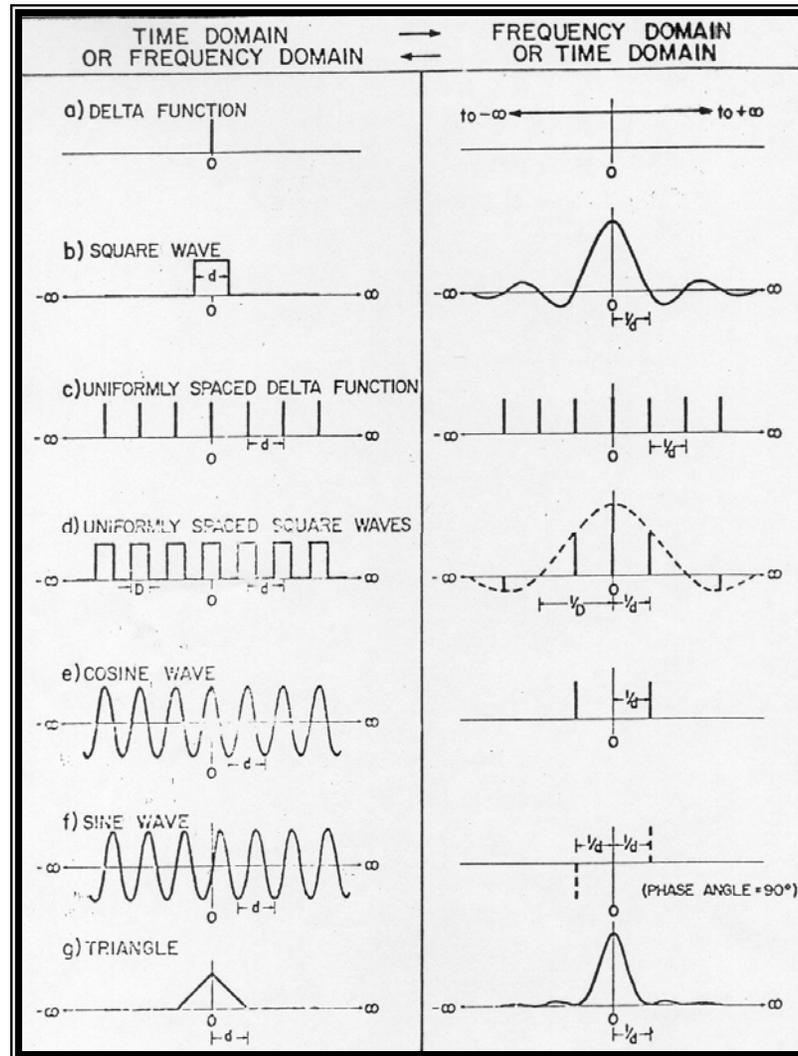
- Sistemas Lineales y Convolución :

$$f(x) \longrightarrow \boxed{h(x)} \longrightarrow g(x) = f(x) * h(x) \quad (* \equiv \text{Convolución})$$

En el dominio de las frecuencias, $G(k) = F(k)H(k)$

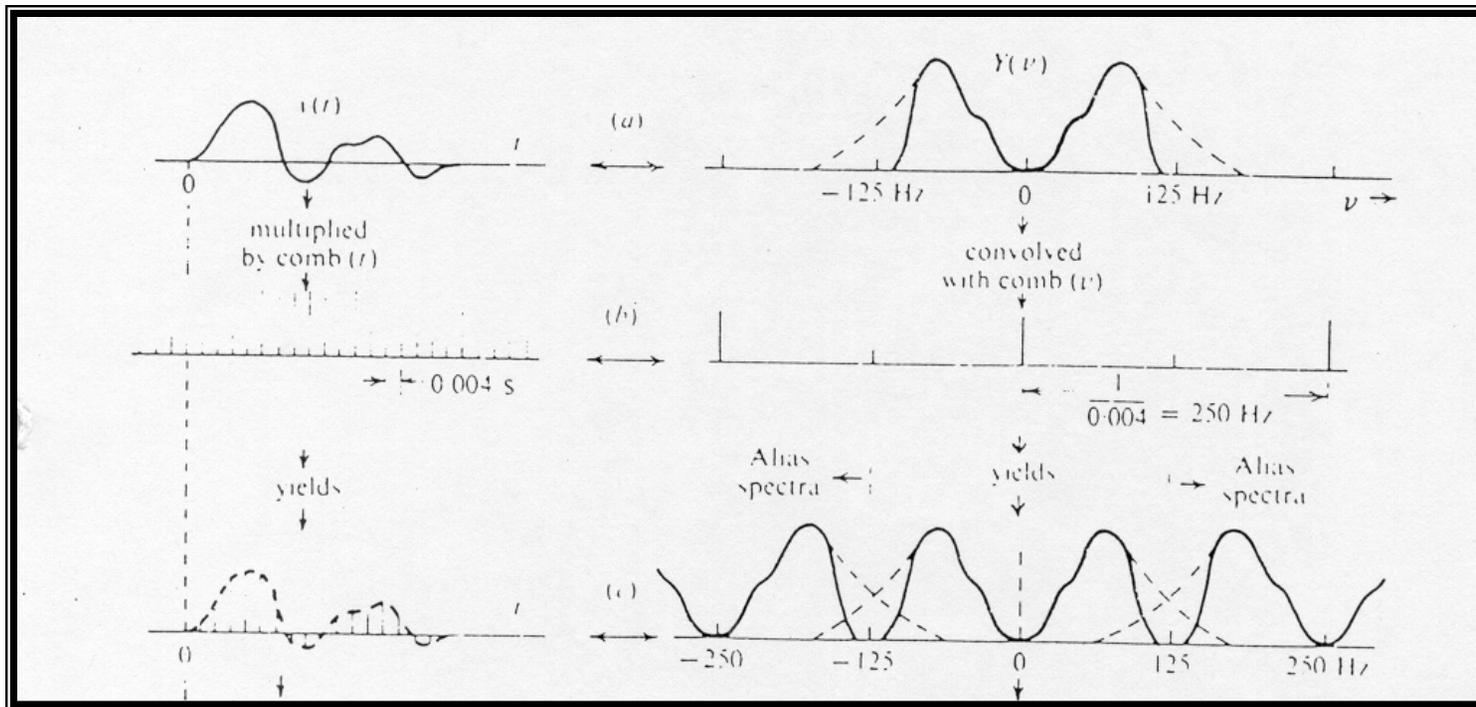
MÓDULO V.- ANALISIS EN DOMINIO DE FRECUENCIAS

Transformada de Funciones Típicas



MÓDULO V.- ANALISIS EN DOMINIO DE FRECUENCIAS

Aliasing



Frecuencia de "Nyquist" = $f_n = 1 / 2\Delta$ $\Delta \equiv$ Intervalo de Muestreo

Continuaciones Analíticas

Partiendo del teorema de Green,

$$\int_R [U\nabla^2 V - V\nabla^2 U] dv = \int_S [U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n}] ds$$

y considerando $U =$ potencial gravitatorio

$$V = 1/r \quad (r = \text{distancia a un punto P fuera de "R"})$$

Es posible llegar al siguiente resultado (Blakely, 1995 pp.313-316) :

$$\Delta g(x,y,z) = \frac{\Delta z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta g(x',y',z')}{R^3} dx'dy'$$

Donde $\Delta z = z - z'$ y $R = ((x-x')^2 + (y-y')^2 + \Delta z^2)^{1/2}$

Continuaciones Analíticas

Si nos alejamos de la fuente hablaremos de “Continuación Hacia Arriba” (Upward Continuation), mientras que si nos acercamos a la fuente hablaremos de “Continuación Hacia Abajo” (Downward Continuation). En este último caso, la expresión tendrá validez sólo mientras estemos fuera del volumen ($\nabla^2 U=0$).

Este resultado es directamente generalizable para el campo magnético.

Veamos la transformada de Fourier de la expresión obtenida:

$$F_z(K_x, K_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Delta z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta g(x', y', z')}{R^3} dx' dy' \right] e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy$$

Haciendo el cambio de variables $x_1 = (x-x')$ & $y_1 = (y-y')$ y reagrupando términos, obtenemos:

MÓDULO V.- ANALISIS EN DOMINIO DE FRECUENCIAS

Continuaciones Analíticas

$$F_z(K_x, K_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta g(x', y', z') e^{-i(k_x x' + k_y y')} dx' dy' \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta z}{2\pi R^3} e^{-i(k_x x_1 + k_y y_1)} dx_1 dy_1$$

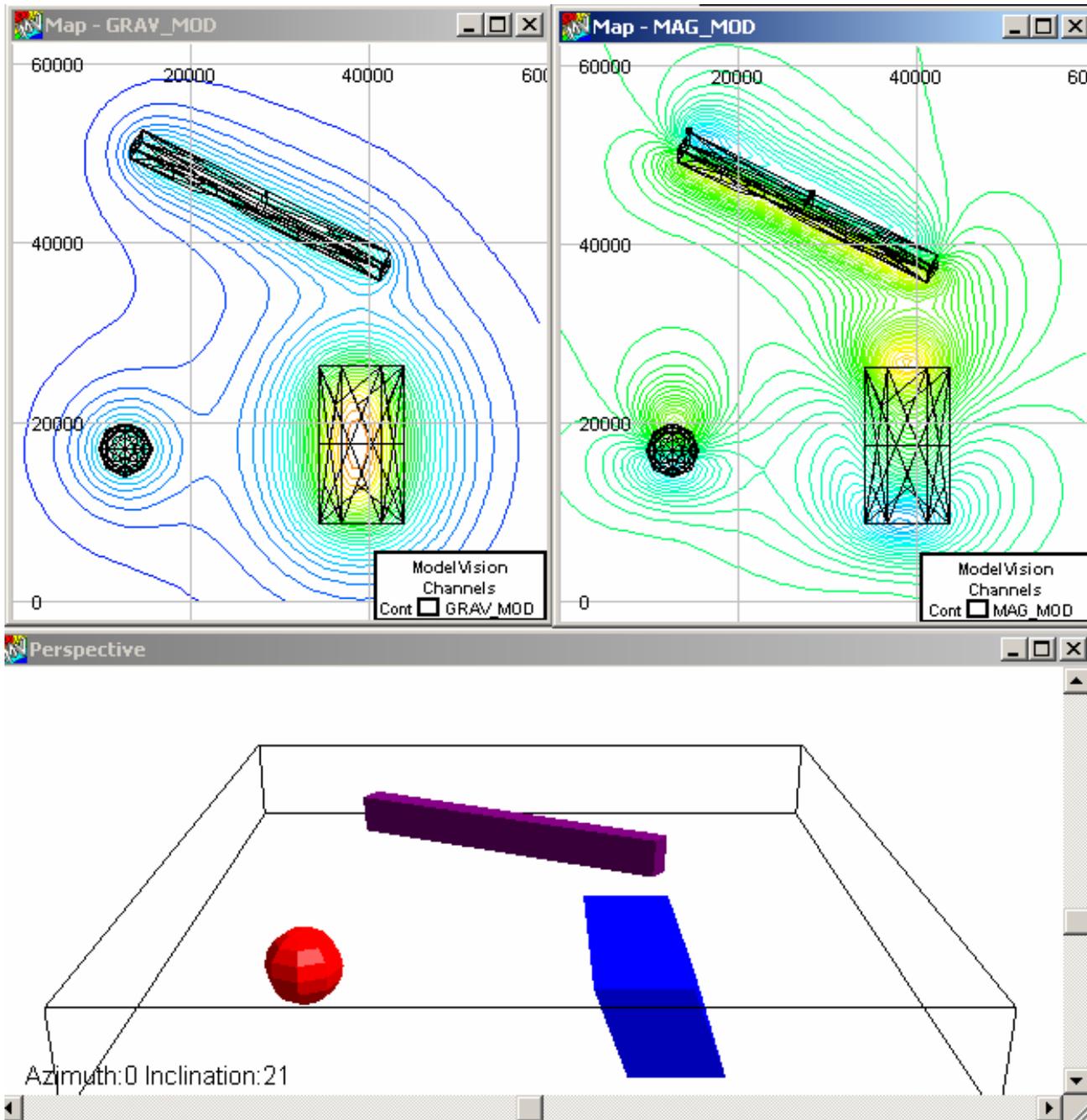
Pero $\frac{\Delta z}{R^3} = \frac{-\partial}{\partial \Delta z} \left(\frac{1}{R} \right)$ propiedades y la TF(1/R) (Blakely, pp.271-273):

$$F_z(K_x, K_y) = F_{z'}(K_x, K_y) e^{-i\Delta z |k_x^2 + k_y^2|^{1/2}} \quad \text{Continuación Hacia Arriba}$$

$$F_z(K_x, K_y) = F_{z'}(K_x, K_y) e^{|\Delta z| |k_x^2 + k_y^2|^{1/2}} \quad \text{Continuación Hacia Abajo}$$

- Procedimiento en tres pasos: Transformada/Filtro/Antitransformada
- Forma del Filtro (Pasa Bajo/Pasa Alto)

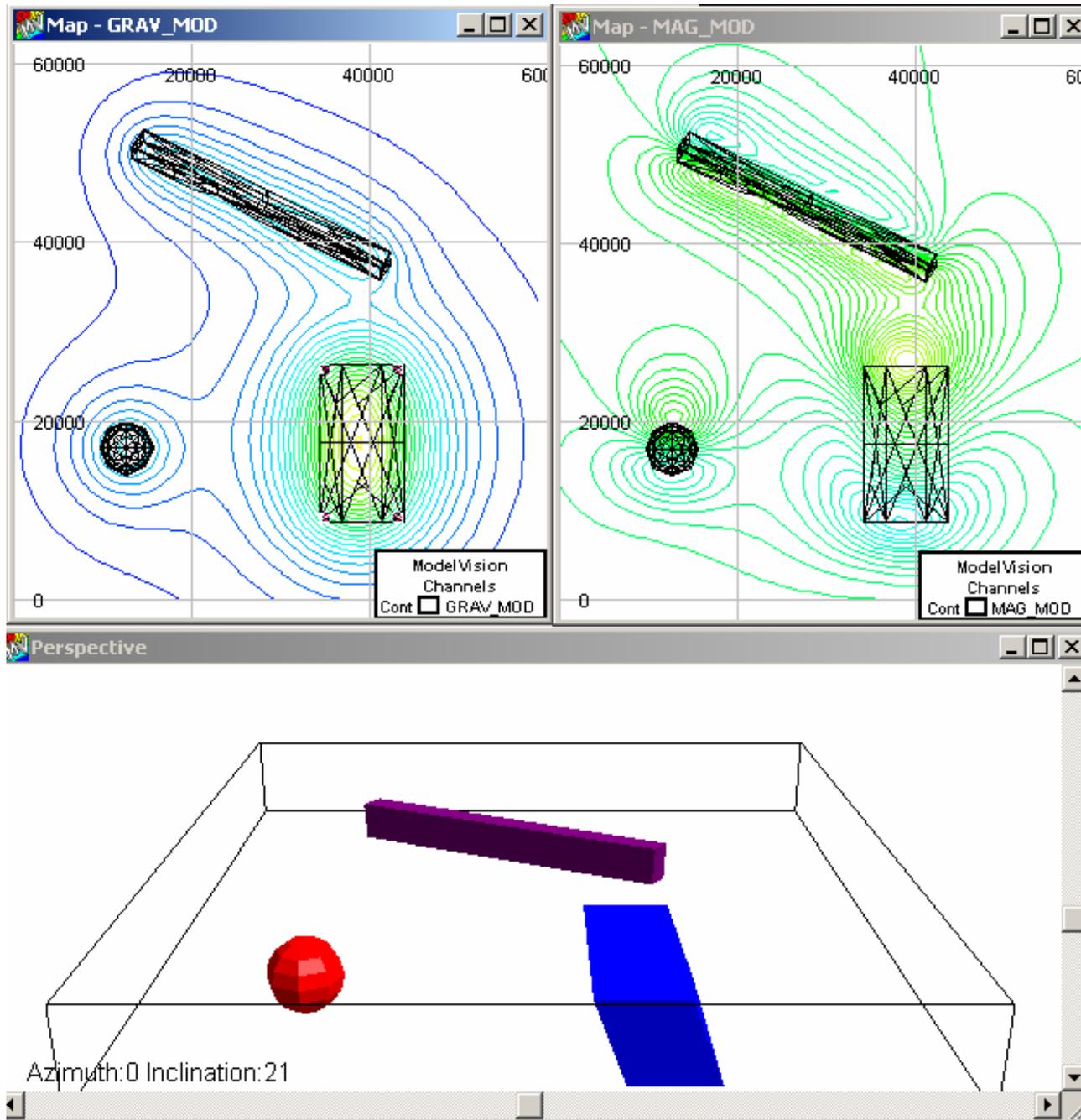
MÓDULO V.- ANALISIS EN DOMINIO DE FRECUENCIAS



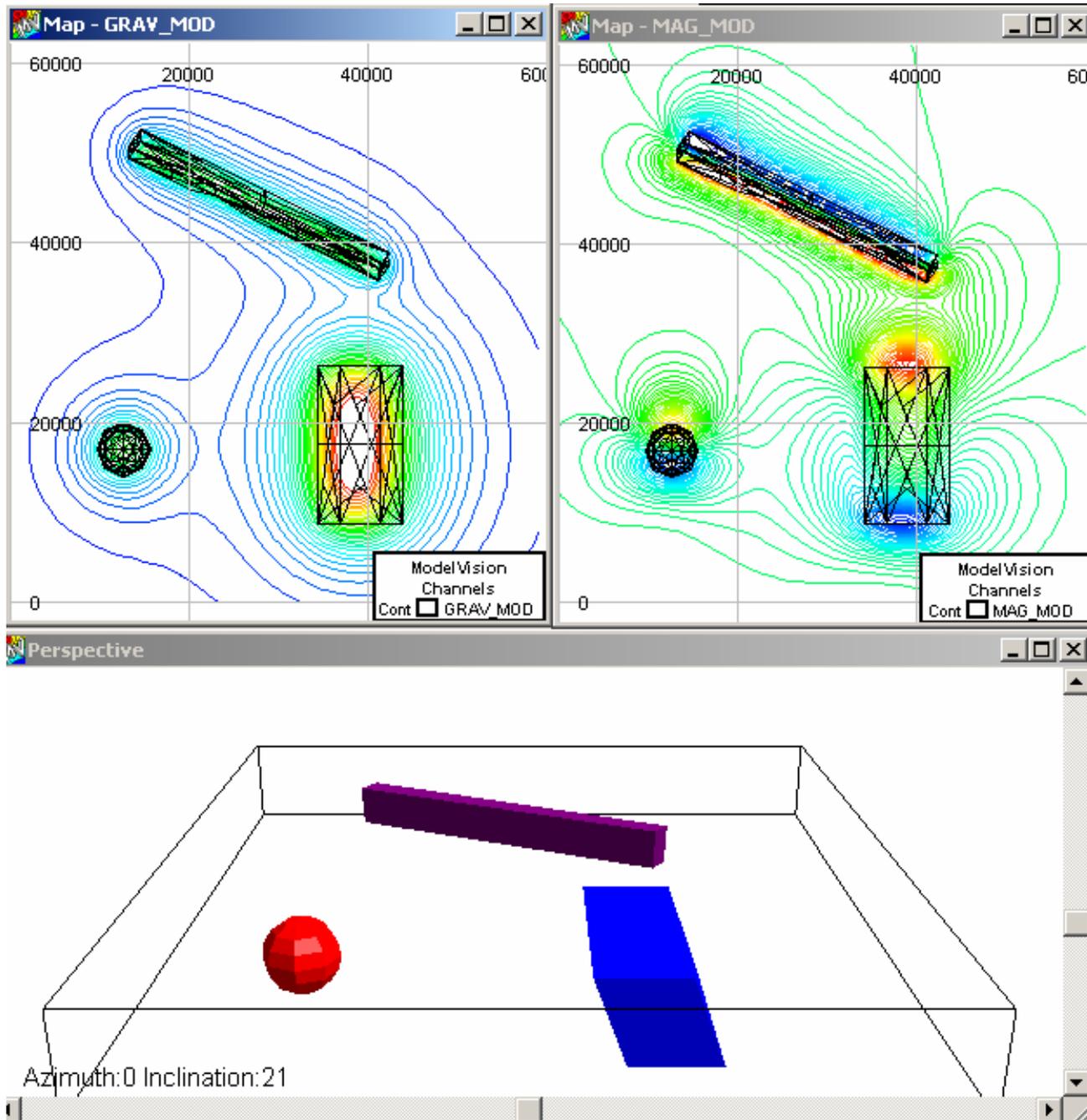
**EJEMPLO DE
CONTINUACION
N SOBRE
CUERPOS
TEORICOS**

MÓDULO V.- ANALISIS EN DOMINIO DE FRECUENCIAS

**EJEMPLO DE
CONTINUACION
SOBRE
CUERPOS
TEORICOS:
CONTINUADO
1000M
ARRIBA**



MÓDULO V.- ANALISIS EN DOMINIO DE FRECUENCIAS



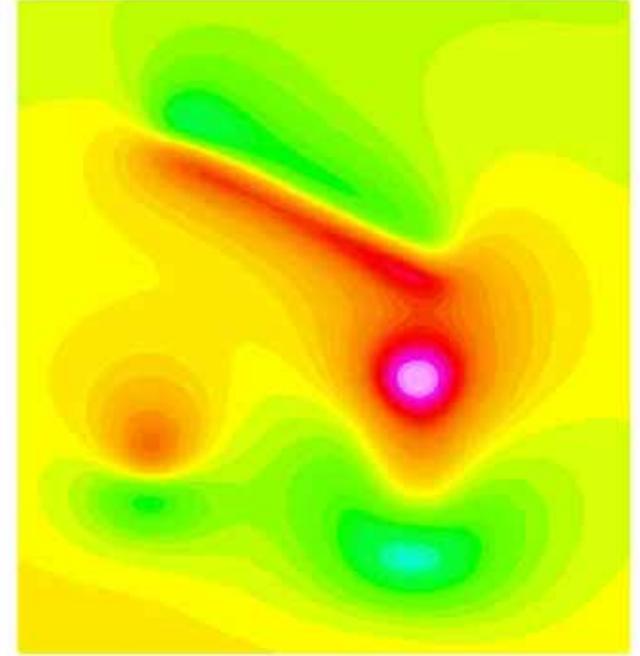
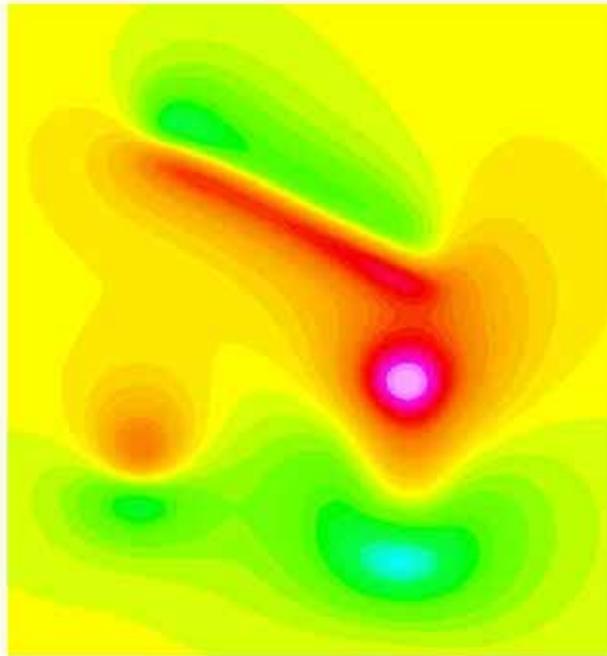
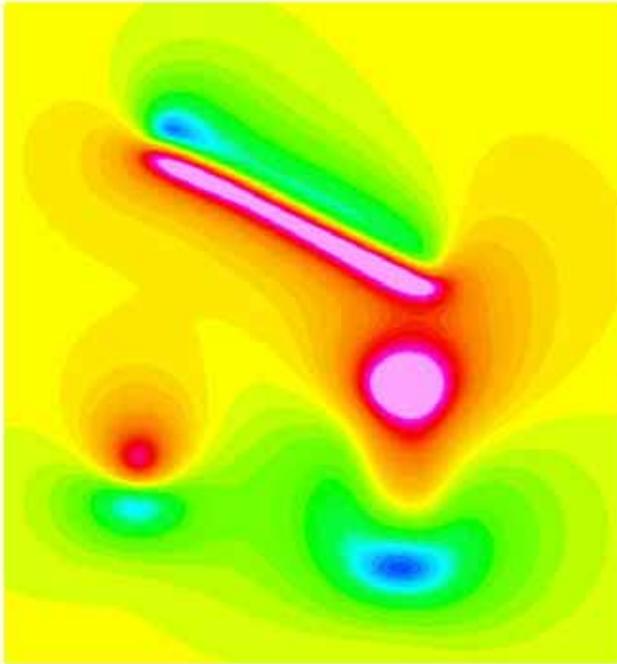
EJEMPLO DE CONTINUACION SOBRE CUERPOS TEORICOS: CONTINUADO 1000M ABAJO

CONTINUACION HACIA ARRIBA (MAGNETISMO)

OBSERVACION

OBSERVACION
1000M ARRIBA

CONTINUACION
1000M ARRIBA

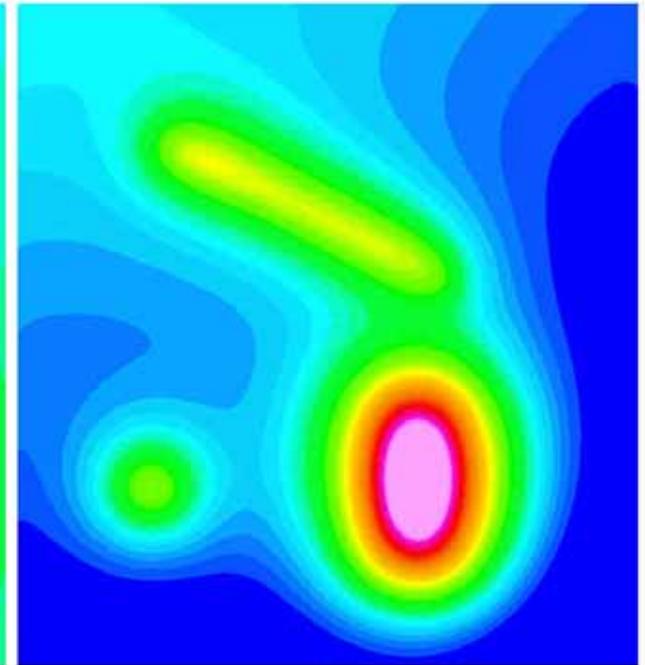
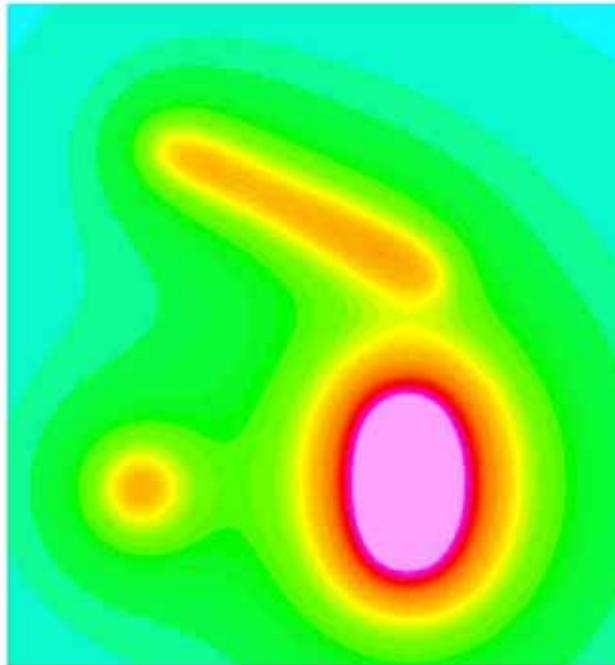
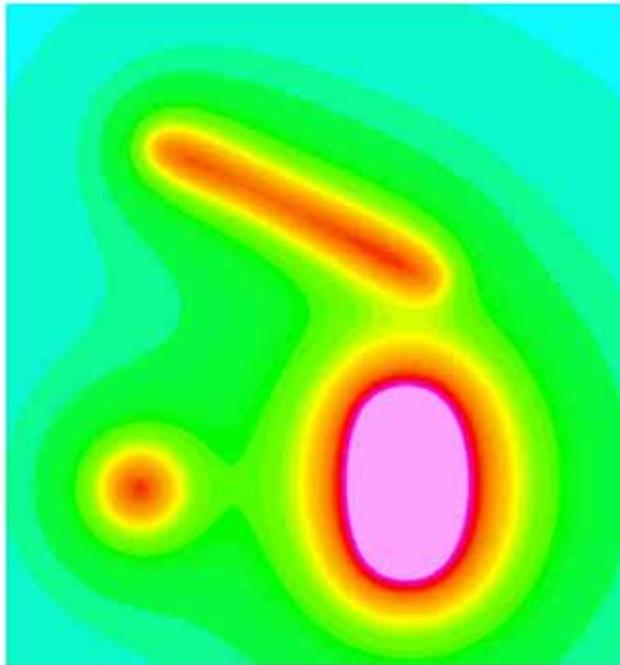


CONTINUACION HACIA ARRIBA (GRAVEDAD)

OBSERVACION

OBSERVACION
1000M ARRIBA

CONTINUACION
1000M ARRIBA



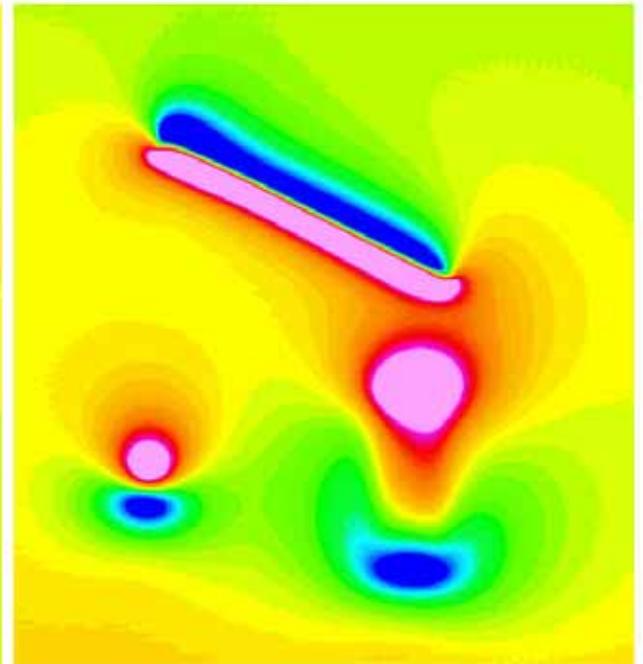
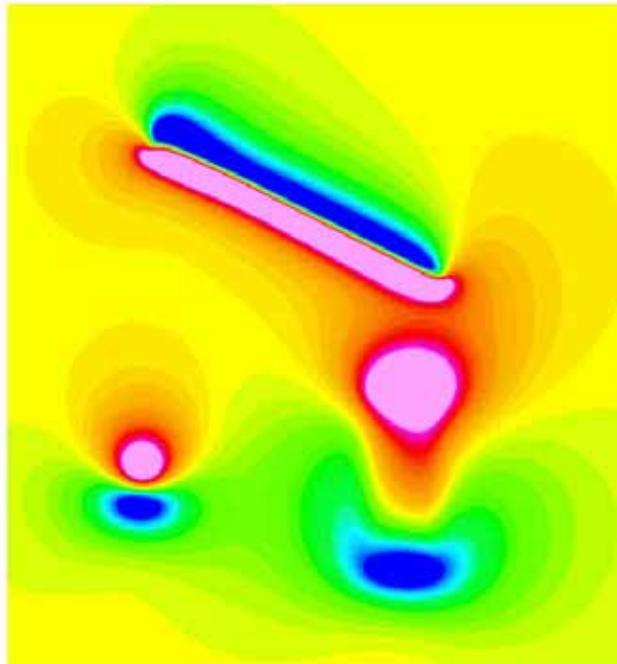
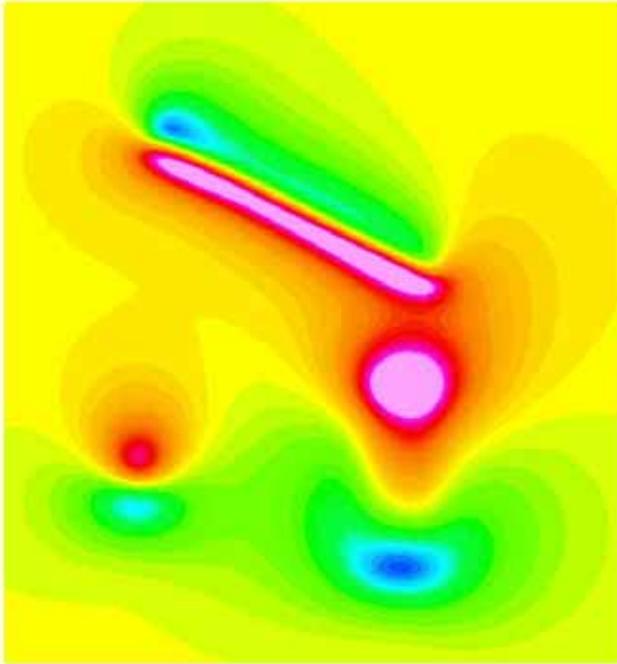
MÓDULO V.- ANALISIS EN DOMINIO DE FRECUENCIAS

CONTINUACION HACIA ABAJO + FILTRO PASABAJO DE 1000M (MAGNETISMO)

OBSERVACION

**OBSERVACION
1000M ABAJO**

**CONTINUACION
1000M ABAJO**



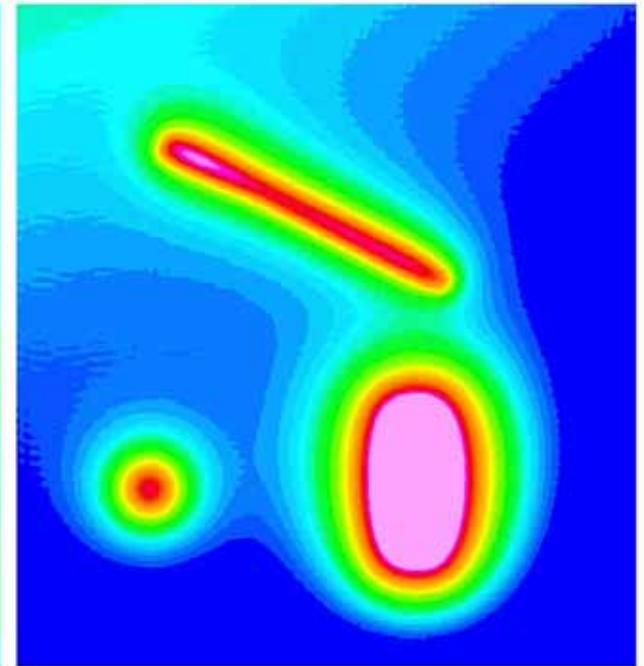
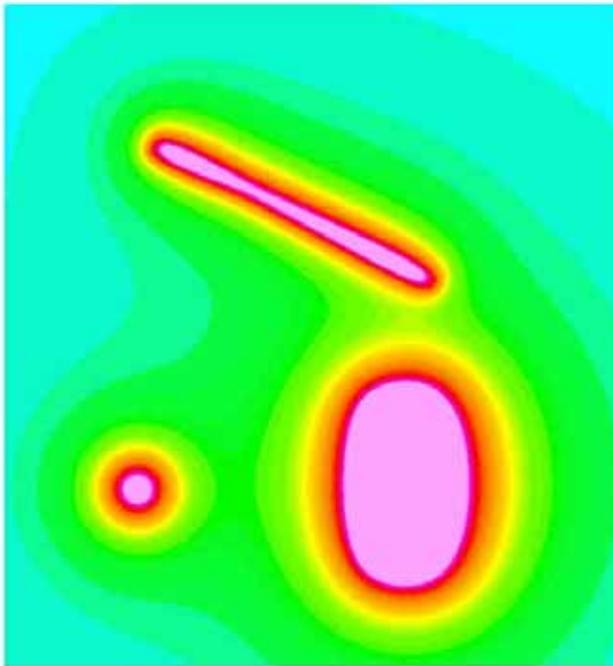
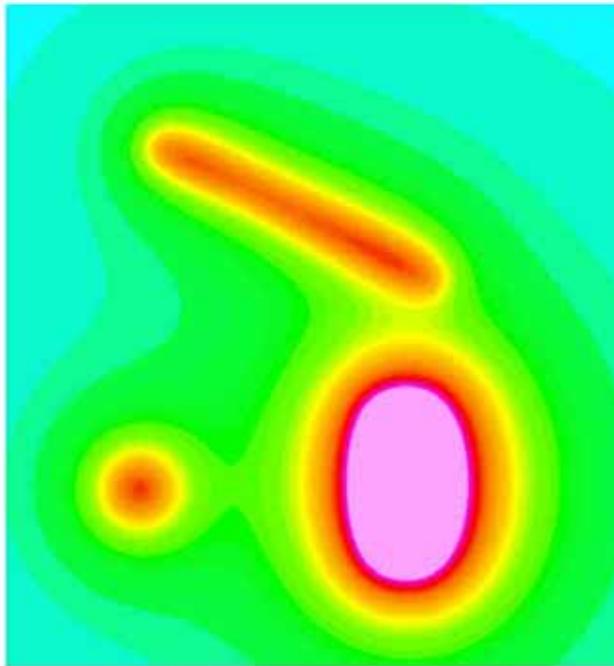
MÓDULO V.- ANALISIS EN DOMINIO DE FRECUENCIAS

CONTINUACION HACIA ABAJO + FILTRO PASABAJO DE 1000M (GRAVEDAD)

OBSERVACION

**OBSERVACION
1000M ABAJO**

**CONTINUACION
1000M ABAJO**



Continuaciones Analíticas

- Condiciones para la existencia de la antitransformada ?
- Aplicaciones de las Continuaciones Analíticas

Continuaciones Analíticas a Superficies Arbitrarias

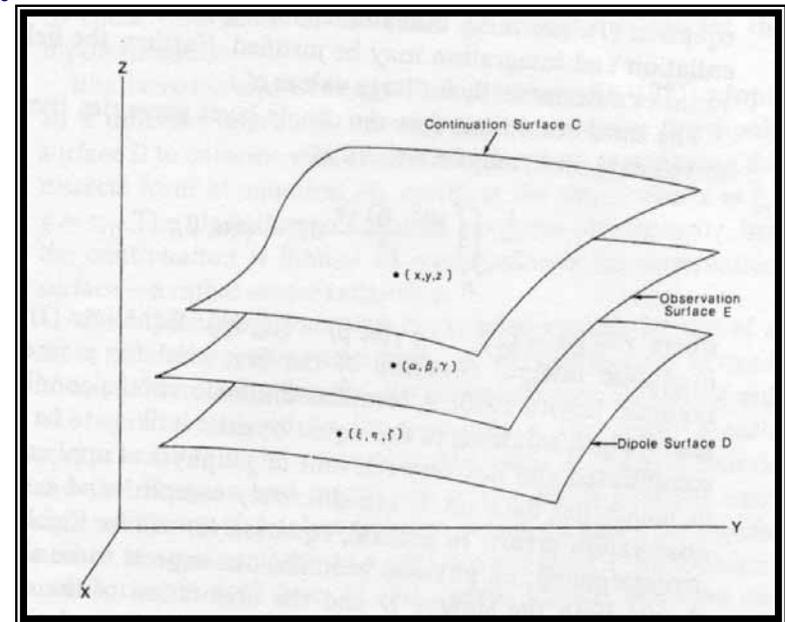
“Continuation of Potential Fields Between Arbitrary Surfaces”
Geophysics Vol.49 pp.787-795; Hansen & Miyazaki

Porque puede ser util en algunos casos ?

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{2\pi} \int_D \int \frac{\mu(\xi,\eta) \cdot \hat{r}}{r^3} dS$$

La geometría del problema se muestra en la figura, y consiste en ubicar una “capa equivalente” de dipolos entre la superficie de observación y las fuentes.

Dicha capa equivalente debe reproducir los datos observados.



Continuaciones Analíticas a Superficies Arbitrarias

- El problema se reduce entonces a resolver una ecuación integral de Fredholm para un campo escalar, una vez hecha la elección adecuada de la “capa equivalente” y de la dirección de magnetización de los dipolos.
- El sistema será mas estable mientras mas cerca esté del nivel de observación (z máximo).
- Si la superficie a “continuar” está por sobre el nivel de observación, la solución óptima se encontrará ubicando los dipolos en la superficie de observación y en los mismos puntos de grilla.
- La unicidad de la solución (continuación) está garantizada por las condiciones impuestas a ϕ .
 - 1) Debe satisfacer la ecuación de Laplace en la región sobre D .
 - 2) Debe anularse cuando $z \rightarrow \infty$.
 - 3) Debe reproducir los datos observados.

Derivadas

Vimos dentro de las propiedades de la FT:

$$FT\left[\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right] = (ik)^n FT(f(x))$$

En 2-D tendremos por lo tanto que $(iK_x)^n$ e $(iK_y)^n$, son filtros que transforman la función medida en sus derivadas espaciales respecto a x e y respectivamente.

- Procedimiento en tres pasos: Transformada/Filtro/Antitransformada
- Forma del Filtro (Pasa Alto)
- Aplicaciones de las Derivadas
- Segunda Derivada Vertical

Consecuencia Directa de la Ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

$$\Rightarrow FT\left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial z^2}\right] = (K_x^2 + K_y^2) FT[f(x,y)]$$

MÓDULO V.- ANALISIS EN DOMINIO DE FRECUENCIAS

Reducción al Polo

La relación de Poisson establece:

$$A(\mathbf{r}) = \frac{M}{G\rho} \mathbf{g}_\alpha = \frac{M}{G\rho} \frac{\partial}{\partial \alpha} U(\mathbf{r})$$

Donde $A \equiv$ Pot. Magnético; $U \equiv$ Pot. Gravitatorio; $\alpha \equiv$ Dir. Mag. Fuente

Si tomamos la derivada en la dirección del c.m.t. ($\hat{\mathbf{t}}$), obtenemos:

$$(1) \quad \boxed{T(\mathbf{r}) = \frac{M}{G\rho} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \alpha} U(\mathbf{r})} \quad \text{con } T \equiv \text{Campo mag. cuerpo anómalo}$$

Analogamente, la anomalía teórica que producirá el mismo cuerpo en el polo magnético será:

$$(2) \quad \boxed{T_{\text{polo}}(\mathbf{r}) = \frac{M}{G\rho} \frac{\partial^2}{\partial z^2} U(\mathbf{r})} \quad \begin{aligned} \hat{\mathbf{t}} &= a\hat{\mathbf{i}} + b\hat{\mathbf{j}} + c\hat{\mathbf{k}} \\ \alpha &= \alpha\hat{\mathbf{i}} + \beta\hat{\mathbf{j}} + \gamma\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

MÓDULO V.- ANALISIS EN DOMINIO DE FRECUENCIAS

Reducción al Polo

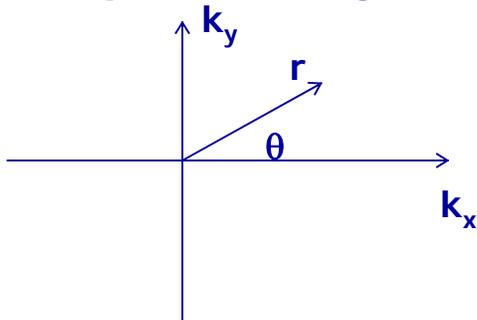
Tomando FT a las ecuaciones (1) y (2) e igualando FT[U(r)], obtenemos:

$$FT[T_{\text{polo}}(r)] = FP(k_x, k_y) FT[T(r)]$$

Con

$$FP(k_x, k_y) = \frac{K_x^2 + K_y^2}{[iak_x + ibk_y + c(k_x^2 + k_y^2)^{1/2}] [i\alpha k_x + i\beta k_y + \gamma(k_x^2 + k_y^2)^{1/2}]}$$

- Procedimiento en tres pasos: Transformada/Filtro/Antittransformada
- Aplicaciones
- Que pasa en bajas latitudes geomagnéticas ($I < 20^\circ$) ?



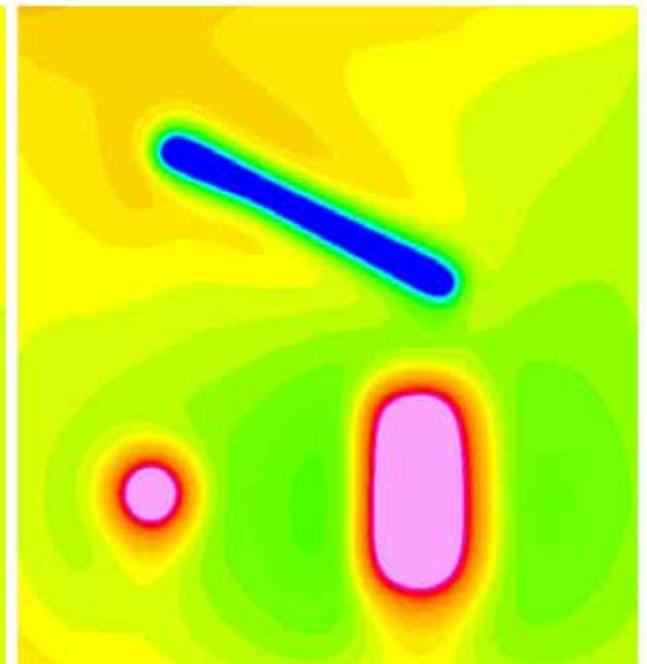
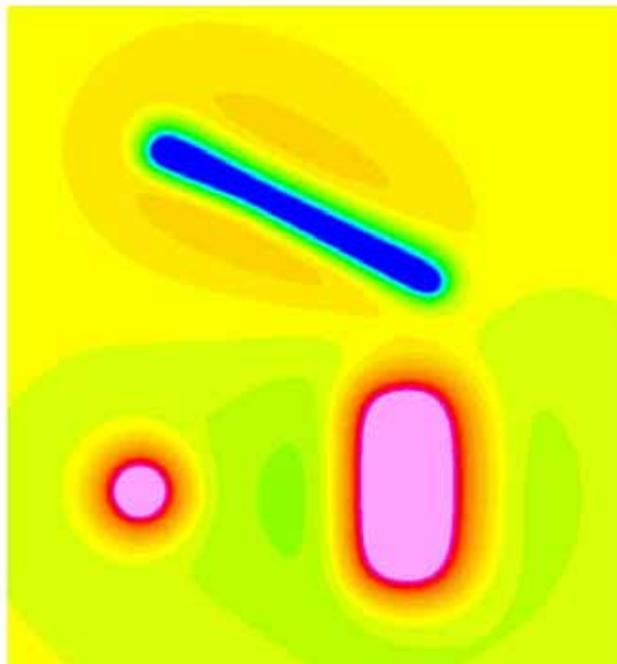
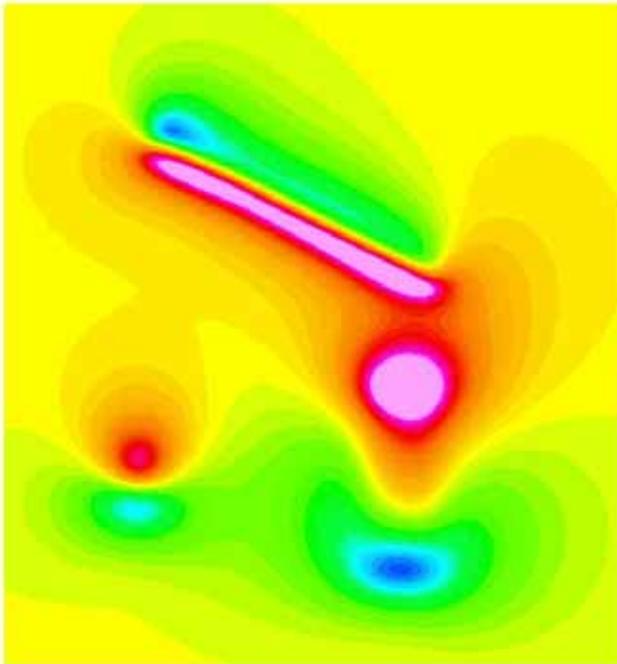
En polares $k_x = r \cos(\theta)$; $k_y = r \sin(\theta)$

REDUCCION AL POLO

OBSERVACION

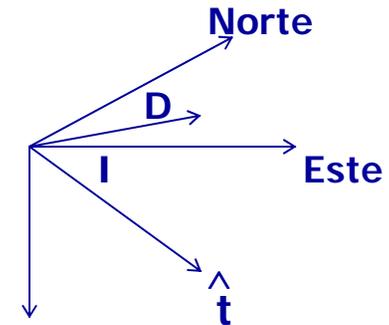
OBSERVACION
 $I=90$

REDUCCION AL
POLO



Reducción al Polo (Baja Latitud Geomagnética)

Además: $\alpha = \cos I \cos D$; $a = \cos I_0 \cos D_0$
 $\beta = \cos I \sin D$; $b = \cos I_0 \sin D_0$
 $\gamma = \sin I$; $c = \sin I_0$



Y escribiendo el FP en estos términos, tendremos:

$$FP(\theta) = \frac{1}{[\cos I \cos(D - \theta) + \sin I] [\cos I_0 \cos(D_0 - \theta) + \sin I_0]}$$

Claramente este filtro no tiene dependencia radial y para valores bajos de I_0 y en la dirección $\theta = D_0 \pm 90^\circ$, el filtro presentará valores muy altos, que amplificarán el ruido presente en el espectro de frecuencias del campo observado y el campo reducido al polo resultará completamente contaminado.

Como ha sido enfrentado este problema ?

Reducción al Polo (Baja Latitud Geomagnética)

- Aplicación de filtros pasa-banda
- Como un problema de inversión

"Reduction to the Pole as an Inverse Problem and its Application to Low-Latitude Anomalies". J. Silva., Geophysics Vol.51 N°2 pp.369-382.

Se determina una "capa equivalente" de dipolos que reproduce los datos observados, y luego se calcula su efecto en el polo magnético ($I=90^\circ$).

Problemas prácticos: es necesario resolver un sistema lineal "grande", de naturaleza inestable (mal condicionado).

- Aplicando un Filtro de Wiener

"Reduction to the Pole at Low Latitudes by Wiener Filtering". R. Hansen and R. Pawlowski. Geophysics Vol.54 N°12 pp.1607-1613.

Se estiman a partir del espectro de potencia de los datos observados, sus componentes de "señal" y "ruido", y luego se diseña un filtro que minimiza el cuadrado de los errores. Los resultados son satisfactorios y tiene todas las bondades numéricas de operar en el dominio de Fourier. Este algoritmo fue posteriormente mejorado en:
Geophysics Vol.61 N°1 pp.131-137

Reducción al Ecuador

Tal como la "Reducción al Polo", la "Reducción al Ecuador" puede ser realizada como una transformación lineal y puede ser usada como una alternativa a la Reducción al Polo en bajas latitudes geomagnéticas, donde ésta presenta ciertas inestabilidades.

El filtro de Reducción al Ecuador puede ser expresado como:

$$FE(\theta) = FP(\theta) \cdot [\sin D \sin D_0 \sin^2 \theta + \sin(D + D_0) \sin \theta \cos \theta + \cos D \cos D_0 \cos^2 \theta]$$

"Transfer Properties of the Reduction of Magnetic Anomalies to the Pole and to the Equator". K. Kis., Geophysics Vol.55 N°9 pp.1141-1147

Este filtro producirá una anomalía simétrica (con polaridad cambiada) y centrada sobre la fuente magnética.

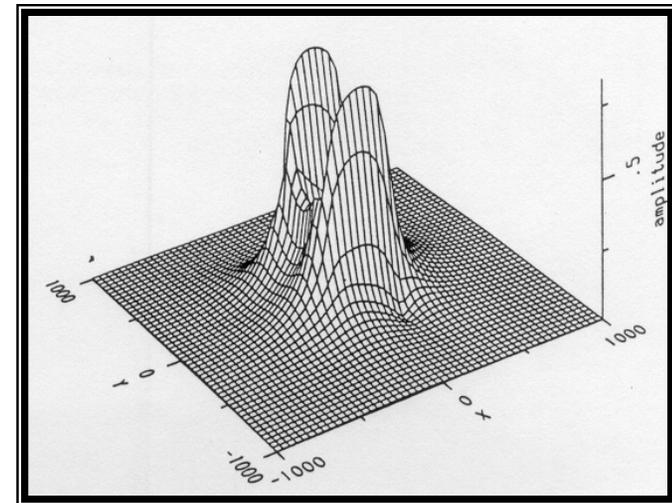
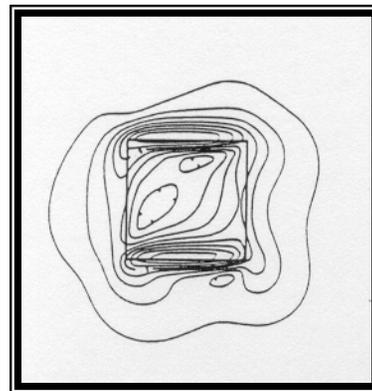
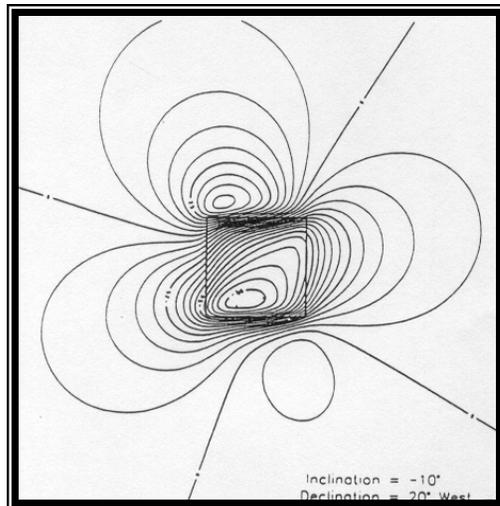
También presenta inestabilidades en ciertas direcciones, pero en general su "performance" es mejor que la del filtro de reducción al polo en bajas latitudes geomagnéticas.

MÓDULO V.- ANALISIS EN DOMINIO DE FRECUENCIAS

Señal Analítica

Corresponde a la envolvente de energía de las anomalías magnéticas y no depende de la dirección de magnetización de las fuentes.

La amplitud de la "Señal Analítica" tendrá directa relación con la intensidad de la magnetización, y presentará valores máximos sobre los bordes de las fuentes magnéticas.



Señal Analítica

Se define como:

$$AS(x,y,z) = (T_x^2 + T_y^2 + T_z^2)^{1/2}$$

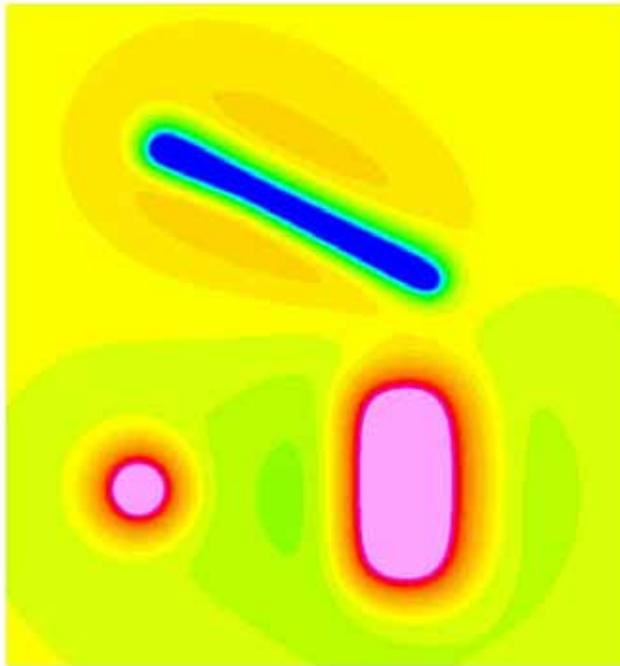
Donde T_x , T_y , T_z corresponden a los gradientes (derivadas) en las direcciones x , y , z respectivamente, que pueden ser fácilmente calculados en el dominio de Fourier.

El ruido presente en los datos observados, es amplificado al calcular la "Señal Analítica" (recordar que las derivadas equivalen a filtros pasa-alto), por lo que es recomendable filtrar las altas frecuencias antes de calcular AS.

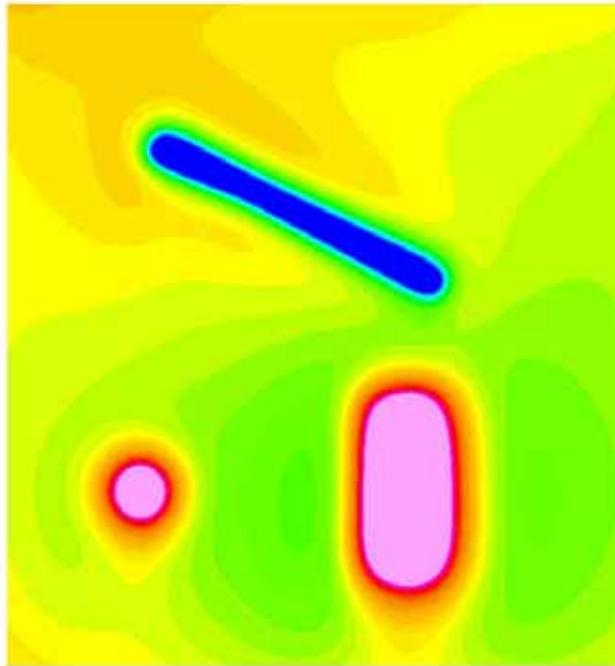
"An Analytic Signal Approach to the Interpretation of Total Field Magnetic Anomalies". Shuang Qin., Geophysical Prospecting Vol.42 pp.665-675

REDUCCION AL POLO VS SEÑAL ANALITICA

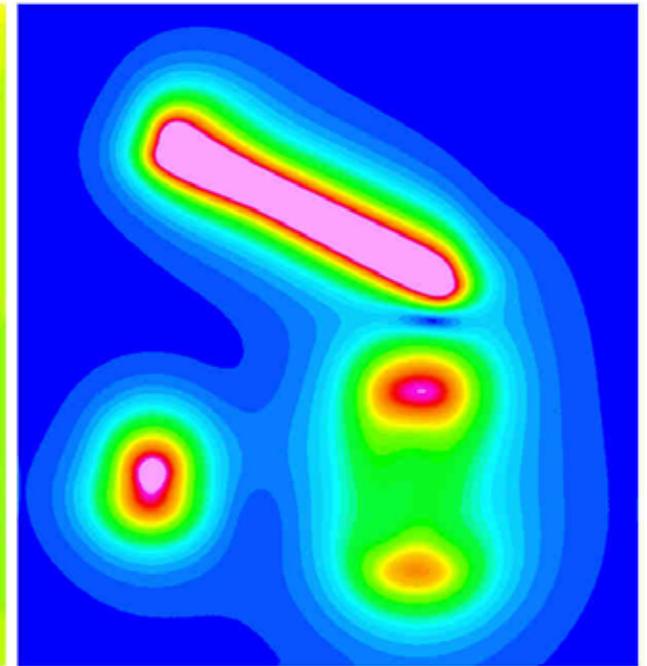
OBSERVACION
 $I=90$



REDUCCION
AL POLO



SEÑAL
ANALITICA



Planos de derivadas: Utilizados para discriminar tendencias y contactos en los datos. En el dominio de las frecuencias una derivada de orden n se expresa como:

$$TF \left[\frac{d^n}{dx^n} f(x) \right] = (ik_x)^n TF [f(x)]$$

Si estas derivadas incluyen la dirección z hay que tener presente la relación:

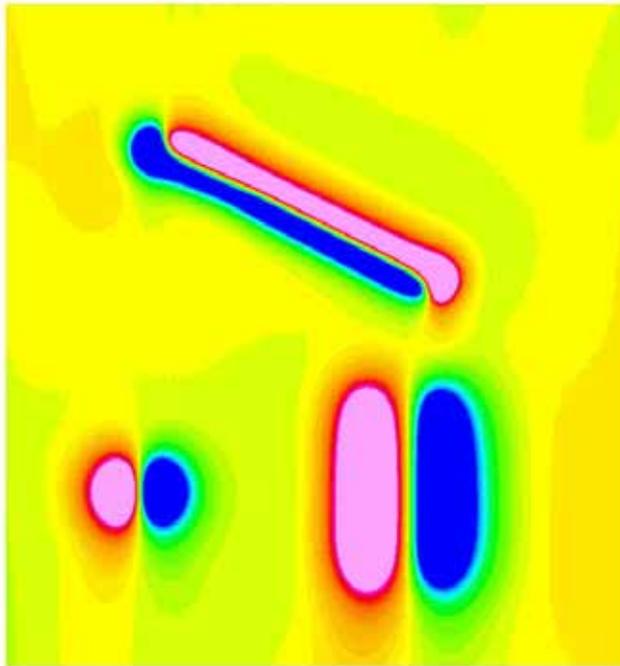
$$\nabla^2 T = 0 = \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{d^2 T}{dz^2}$$

De tal manera que las derivadas c/r corresponden a:

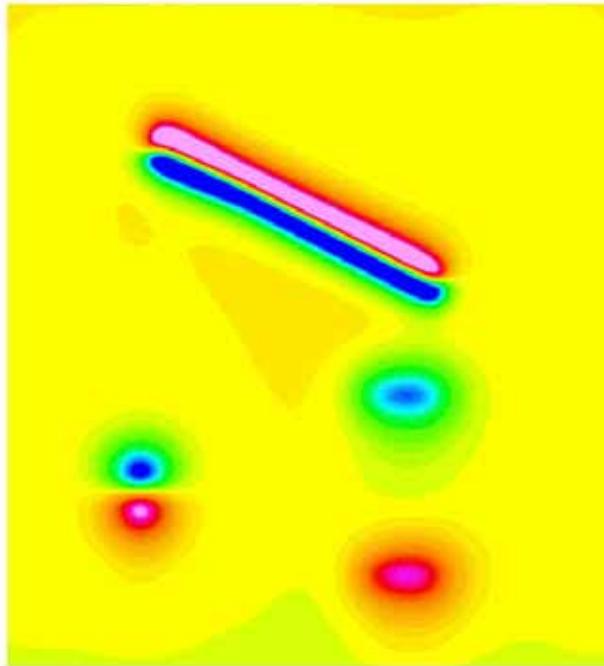
$$\frac{d^n T}{dz^n} == TF^{-1} \left[\left| \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \right|^n \cdot TF [T] \right]$$

PLANOS DE DERIVADAS EN MAGNETISMO

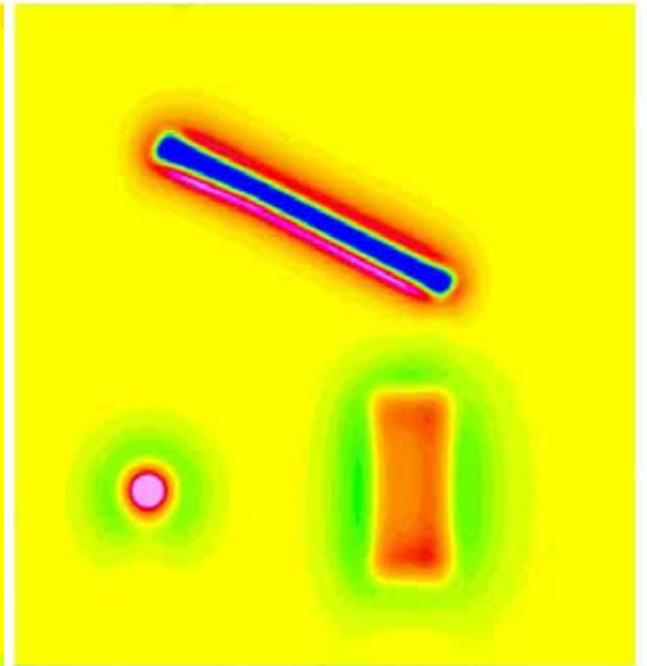
POLO 1a DER.X



POLO 1a DER.Y



POLO 2a DER.Z

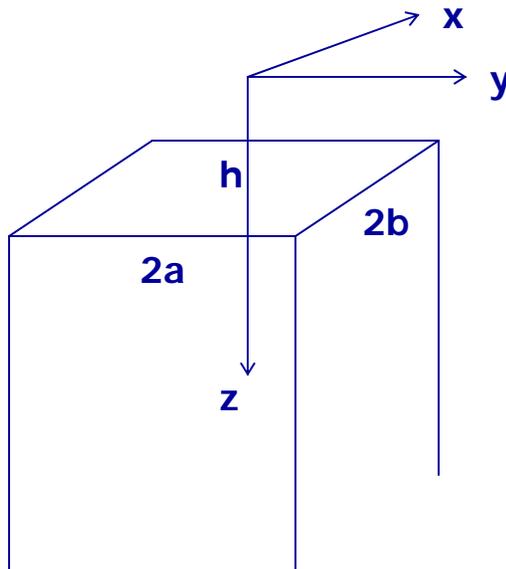


Análisis Espectral en Cuerpos Prismáticos

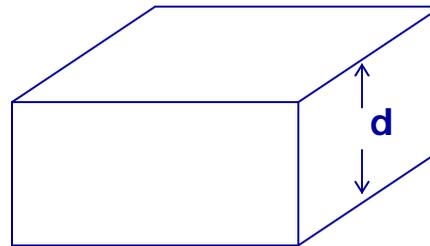
Si $F(k_x, k_y)$ es la transformada de Fourier de una función $f(x, y)$, el espectro de energía (espectro de amplitudes), estará dado entonces por:

$$E(k_x, k_y) = F(k_x, k_y) \cdot F^*(k_x, k_y) = |F(k_x, k_y)|^2$$

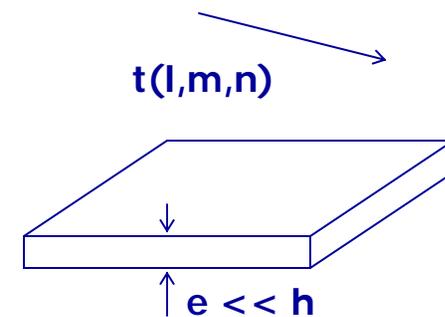
Consideremos las siguientes geometrías:



a) Prisma Infinito



b) Prisma Finito



c) Lámina Rectangular



Análisis Espectral en Cuerpos Prismáticos

El espectro de energía para estos cuerpos esta dado por las siguientes relaciones :

$$\text{a) } E_{\text{p.i.}}(r, \theta) = 4\pi^2 S^2 e^{-2hr} [R_t(\theta) \cdot R_s(\theta)] \frac{\sin^2 k_x a}{(k_x a)^2} \cdot \frac{\sin^2 k_y b}{(k_y b)^2}$$

$$\text{b) } E_{\text{p.f.}}(r, \theta) = E_{\text{p.i.}}(r, \theta) (1 - e^{-dr})^2$$

$$\text{c) } E_{\text{L.R.}}(r, \theta) = E_{\text{p.i.}}(r, \theta) (t \cdot r)^2$$

Donde $k_x = r \cos \theta$; $k_y = r \sin \theta$ y $R_t(\theta) = [n^2 + (l \sin \theta + m \cos \theta)^2]$
 $R_s(\theta) = [N^2 + (L \sin \theta + M \cos \theta)^2]$

“Statistical Models for Interpreting Aeromagnetic Data”. Spector A., Grant F.S., Geophysics Vol.35 pp.293-302

Análisis Espectral en Cuerpos Prismáticos

De las relaciones anteriores se puede concluir que, en general el espectro de energía de un cuerpo prismático puede ser descrito como:

$$E(k_x, k_y) = K \cdot H(h, d, e) \cdot R_t \cdot R_s \cdot G$$

Donde "K" es un término constante proporcional al cuadrado de la magnetización; "H" es un factor que depende básicamente de la profundidad al techo de la fuente (especialmente para el prisma infinito) y del espesor de la fuente; "R_t" y "R_s" dependen sólo de las direcciones del campo y la magnetización; y finalmente "G" es un factor que dependerá de la geometría del modelo.

El análisis entonces del espectro de energía, teniendo en mente estos resultados, permitiría eventualmente estimar la profundidad a la fuente y posibles direcciones de magnetización.

Complicaciones prácticas ?

MODULO 6: PROCESO DE DATOS

DOMINIO DE LA FRECUENCIA

Se ha visto en clases anteriores la teoría sobre el tratamiento de datos en el dominio de la frecuencia orientado a la obtención de diversos sub-productos que son utilizados en la interpretación de datos de potencial:

- continuaciones analíticas
- planos de derivadas
- reducción al polo
- señal analítica

En este módulo veremos en forma detallada el proceso de datos necesario para la obtención de estos subproductos sobre un set de datos.

Ecuaciones

La formulación matemática de cada uno de los procesos anteriores en el dominio de las frecuencias corresponde a:

- continuaciones analíticas

$$F_{z+\Delta z}(k_x, k_y) = F_z(k_x, k_y) \exp\left(-\Delta z \sqrt{k_x^2 + k_y^2}\right)$$

- planos de derivadas

$$FT\left[\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right] = (ik)^n FT(f(x))$$

Ecuaciones

- reducción al polo

$$FT[T_{polo}(x, y)] = FP(k_x, k_y) \cdot FT(T(x, y))$$

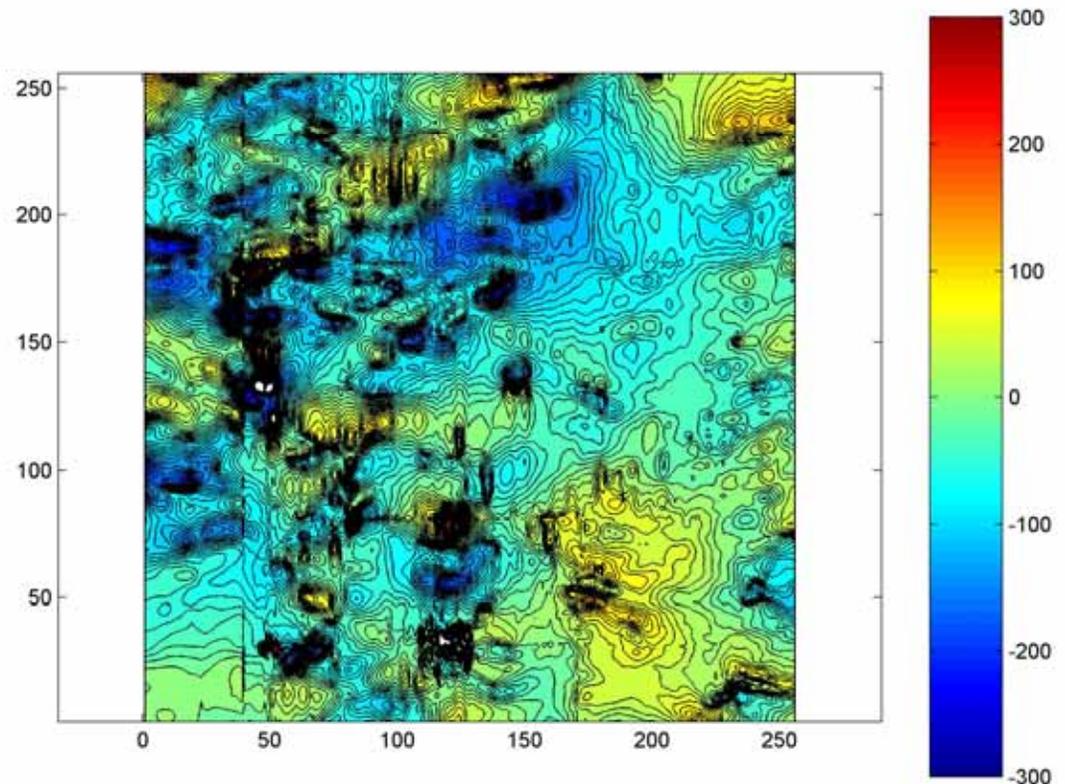
$$FP(k_x, k_y) = \left[\frac{k_x^2 + k_y^2}{i(ak_x + bk_y) + c(k_x^2 + k_y^2)^{1/2}} \right] \cdot \left[i(\alpha k_x + \beta k_y) + \gamma(k_x^2 + k_y^2)^{1/2} \right]$$

- señal analítica

$$AS(x, y, z) = (T_x^2 + T_y^2 + T_z^2)^{1/2}$$
$$T_x = \frac{dT}{dx}; T_y = \frac{dT}{dy}; T_z = \sqrt{\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2}};$$

Tratamiento numérico

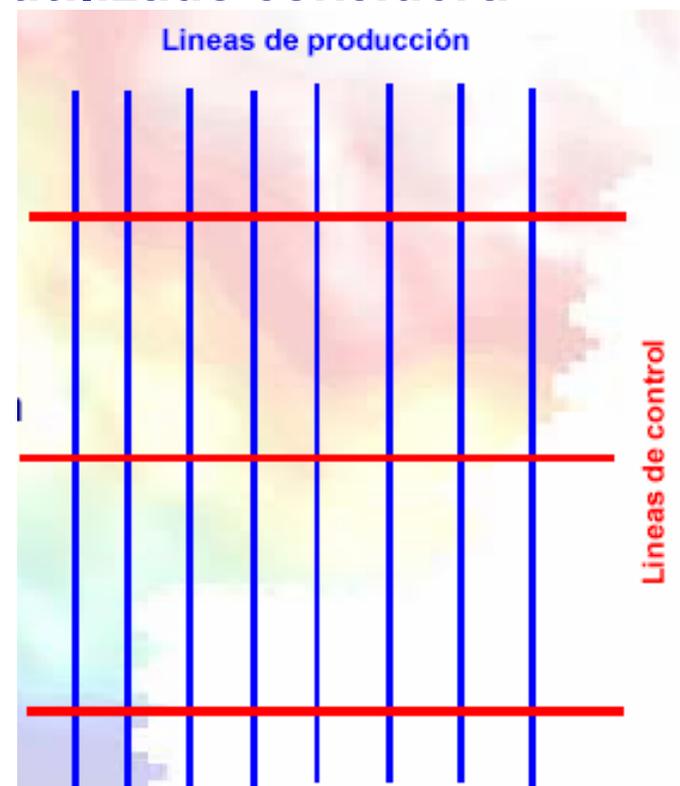
Para efectuar el proceso de datos en el dominio de la frecuencia en forma práctica trabajaremos con el siguiente set de datos correspondiente a un levantamiento magnético efectuado en el norte de Chile (latitud aproximada 15°S); con líneas de medición cada 250m y volado a una altura de 200-300m sobre el relieve.



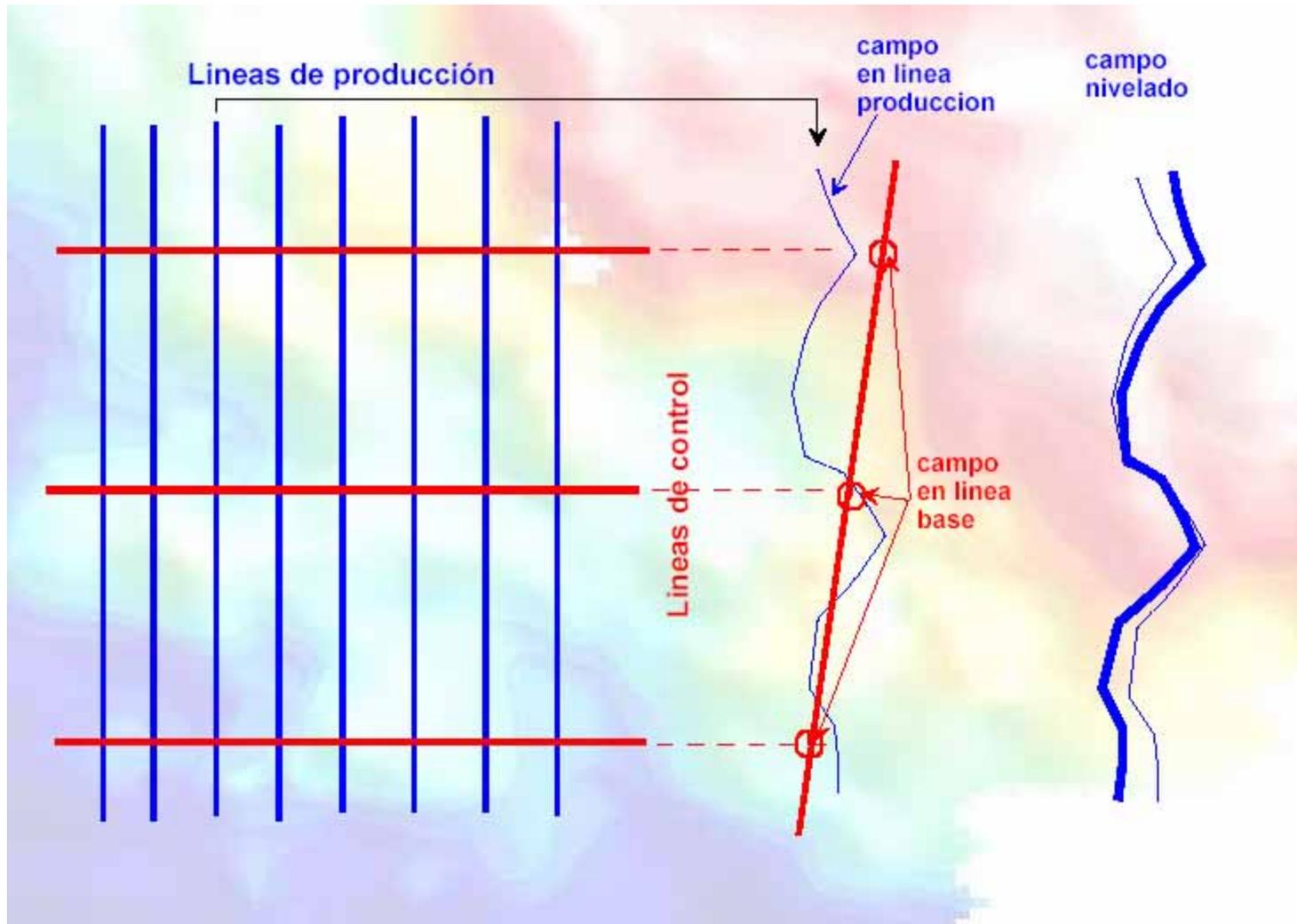
Tratamiento numérico

Estos datos han sido corregidos por líneas de control voladas en sentido perpendicular a las líneas de producción (en dirección E-W) a fin de reducir los efectos de línea de dirección NS. El algoritmo de nivelación utilizado considera los siguientes pasos:

- (1) Identificar puntos de cruce
- (2) Determinar residuos
- (3) Minimizar estos residuos modificando el valor del campo de cada línea de producción de acuerdo a una función lineal simple del campo de residuos (de orden 0 o 1 en general)
- (4) repetir puntos (2) y (3) hasta alcanzar el ajuste propuesto



Tratamiento numérico: nivelación



Tratamiento numérico

El trabajo con líneas de control y la minimización de los residuos se fundamenta en la condición de las líneas de control:

- Registradas en forma continua, cortando todas las líneas de producción, tal que potenciales errores de medición son comunes a todas las líneas. En consecuencia al trabajar con los residuos se están corrigiendo los errores de nivel en las líneas de producción.
- Los errores de nivel que pueden ser corregidos de esta forma se asocian generalmente a problemas con la reducción de la estación base.

Tratamiento numérico

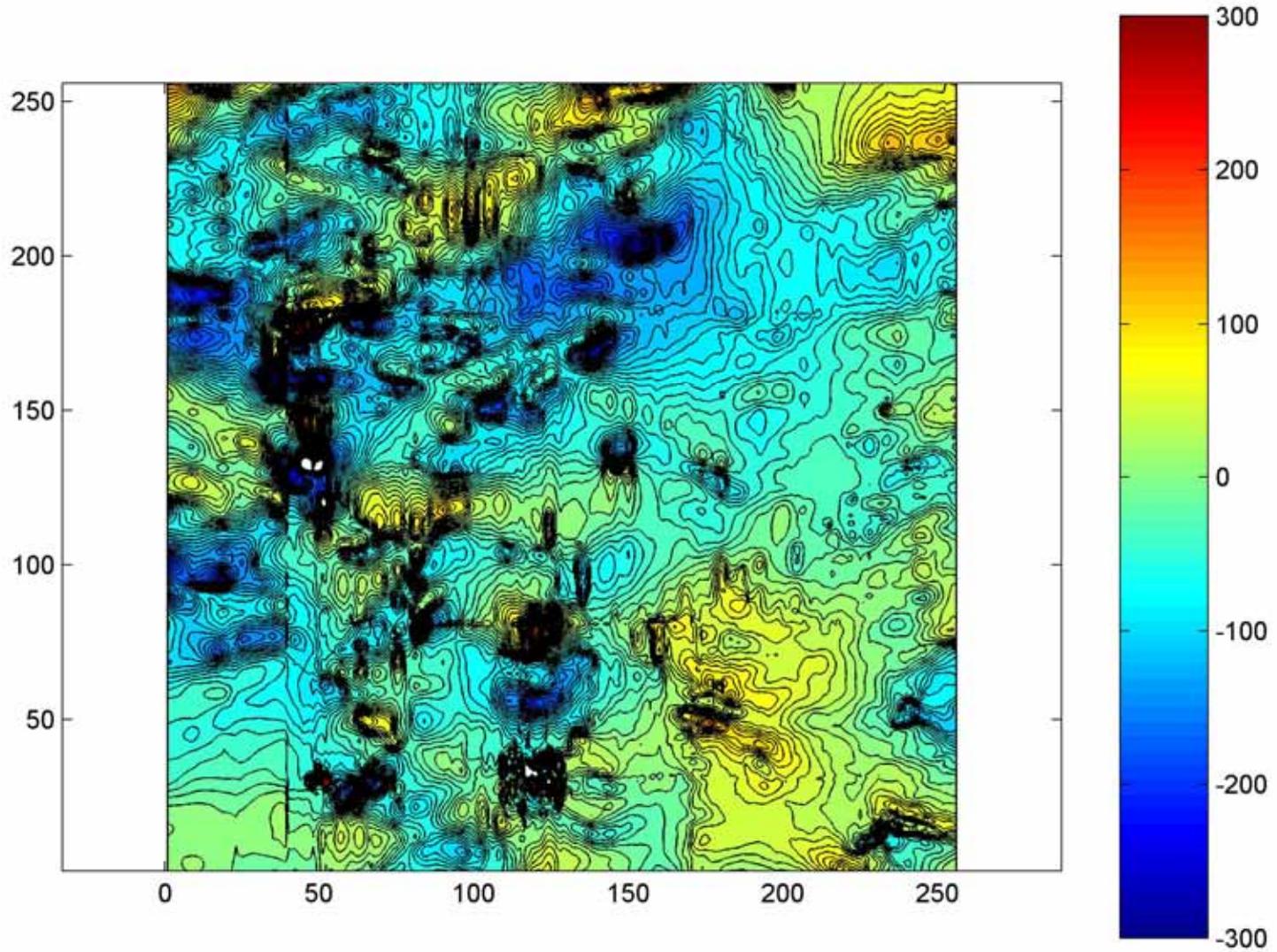
Sin embargo hay otro tipo de errores comunes a la adquisición de datos aéreos cuya reducción es compleja mediante el uso de líneas de control, y que dicen relación con la ejecución de líneas a distinta altura.

En este caso los puntos de cruce entre líneas de producción y control no tienen un significado real ya que el punto de cruce planimétrico entre líneas de producción y base no miden el mismo campo.

Para corregir este tipo de efectos es necesario continuar los datos a un plano común de observación (mediante la continuación a superficies arbitrarias).

Por ejemplo en el set de datos utilizados en este ejercicio se aprecian efectos de línea importantes:

MÓDULO VI.- PROCESO DE DATOS



Una forma alternativa de eliminar estos efectos de línea se describe a continuación:

a) Continuación de grilla a altura h_i (hacia arriba). Este valor continuado hacia arriba constituye la tendencia general

b) Continuación de cada perfil NS a la misma altura h_i

c) Modificar el campo magnético de cada línea reemplazando la tendencia regional de cada línea de acuerdo al siguiente algoritmo:

Campo_{línea}(nuevo) =

Campo_{línea}(antiguo) + **Continuación**_{grilla} - **Continuación**_{línea}

c) Modificar el campo magnético de cada línea reemplazando la tendencia regional de cada línea de acuerdo al siguiente algoritmo:

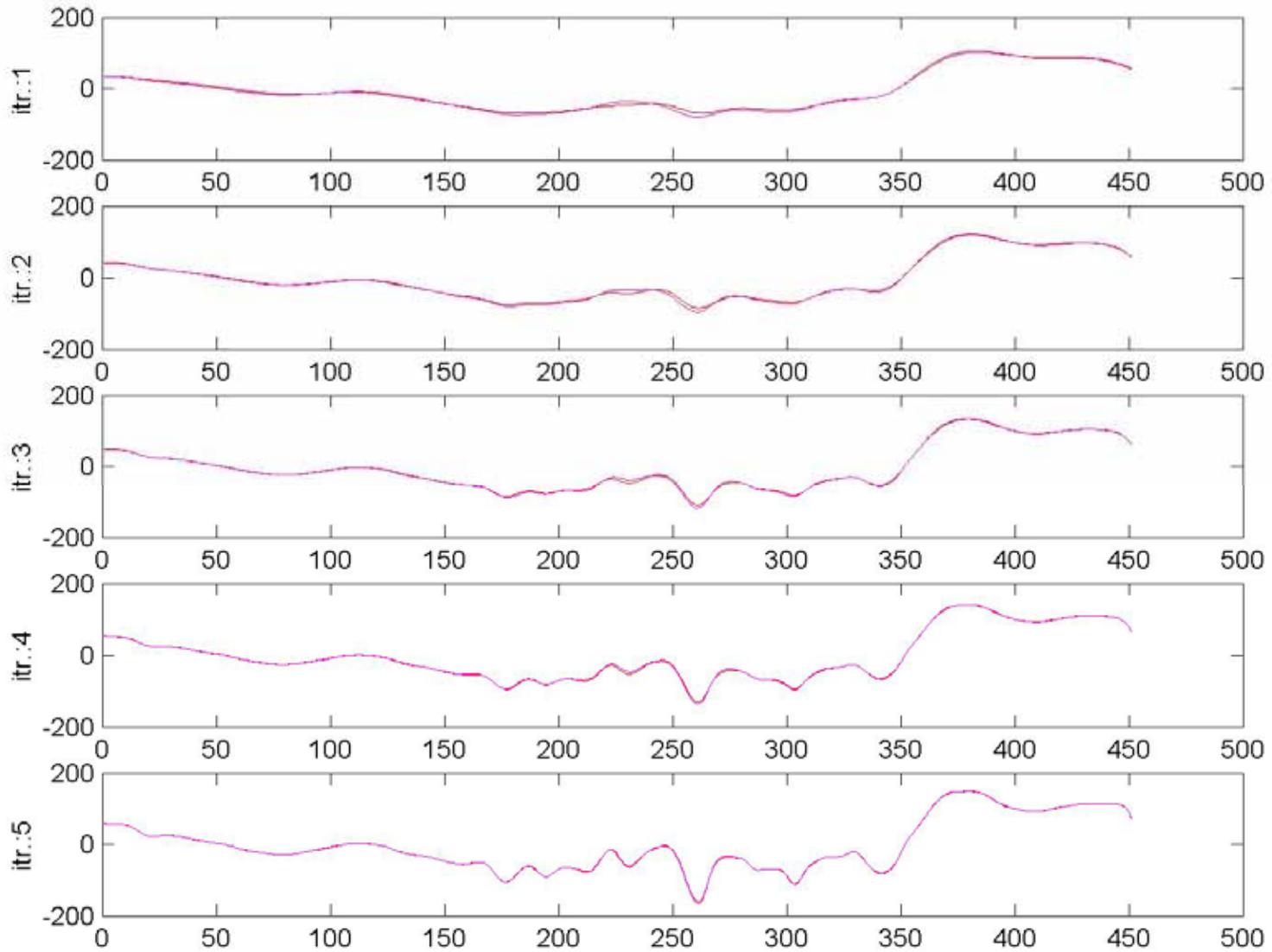
$\text{Campo}_{\text{línea}}(\text{nuevo}) =$

$\text{Campo}_{\text{línea}}(\text{antiguo}) + \text{Continuación}_{\text{grilla}} - \text{Continuación}_{\text{línea}}$

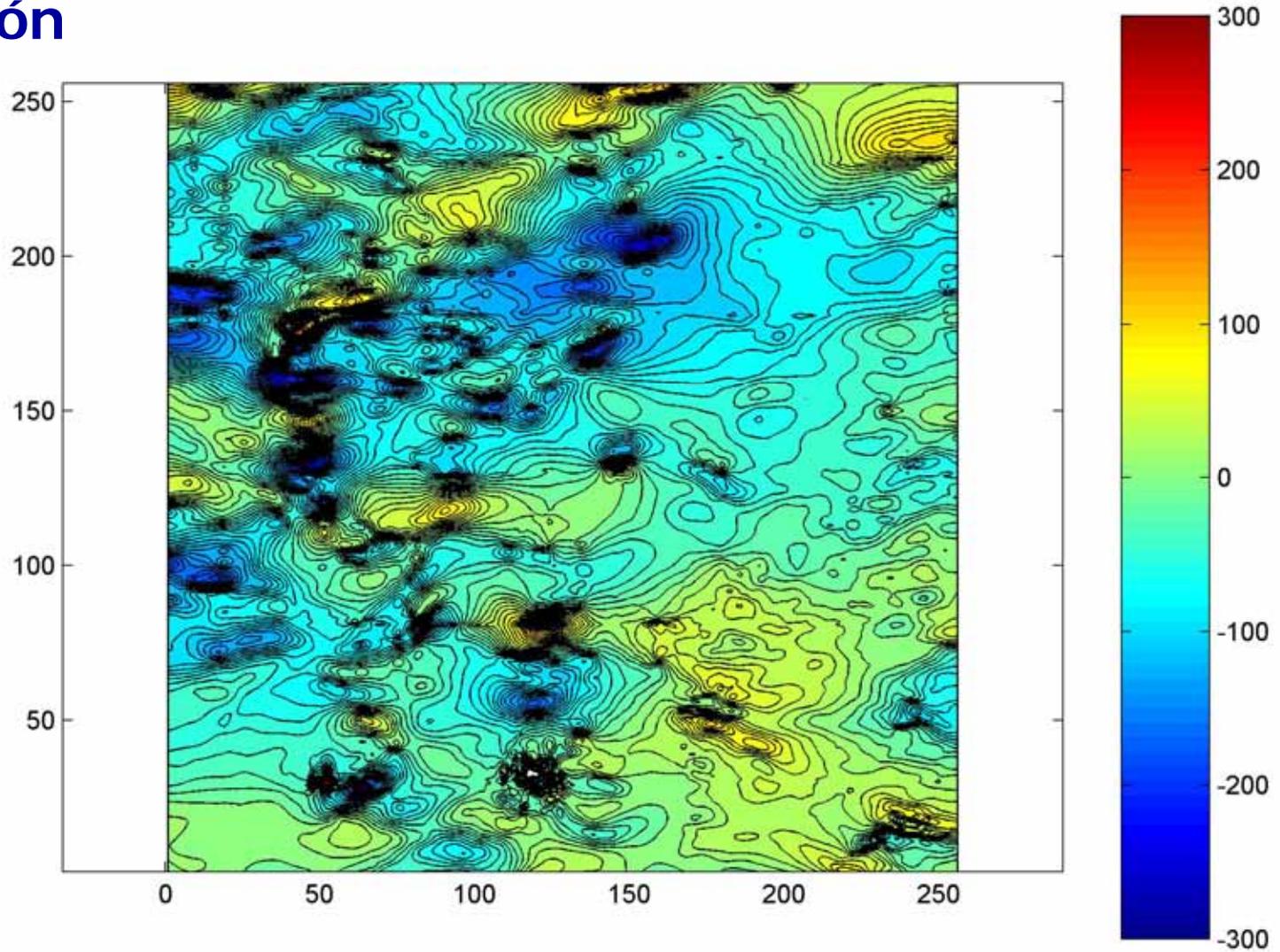
d) Repetir el procedimiento con alturas decrecientes de continuación a fin de reducir tendencias de menor longitud de onda

Ejemplo de línea nivelada en diversas iteraciones (notese que a medida que avanza la iteración el "regional" de la grilla y el perfil individual convergen):

MÓDULO VI.- PROCESO DE DATOS



La solución de este proceso iterativo se presenta a continuación



Es importante tener presente que este procedimiento, si bien muy eficiente, tiende a eliminar todo tipo de tendencia en la dirección de las líneas de vuelo, por consiguiente su aplicación debe efectuarse en forma cuidadosa, tratando de no involucrar direcciones estructurales de interés.

A continuación veremos el tratamiento numérico orientado a la obtención de los subproductos desarrollados en forma teórica. En este proceso utilizaremos ambas grillas: con ruido producto del efecto de líneas y la grilla nivelada. El proceso de efectua en ambiente Matlab

La matriz de datos originales es ZZ, el primer paso es completar la grilla de dimensiones NF, NC hasta la potencia de 2 mas cercana (nf,nc):

1) Calculo de transformada de Fourier

```
ZZ1(1:2*nf,1:2*nc)=zeros;
```

```
ZZ1(1:NF,1:NC)=ZZ;
```

A fin de evitar la presencia de soluciones complejas se desdobra la matriz para asi calcular una transformada de fourier de una función par cuya solución es real:

```
ZZ1(1:nf,nc+1:2*nc)=fliplr(ZZ1(1:nf,1:nc));
```

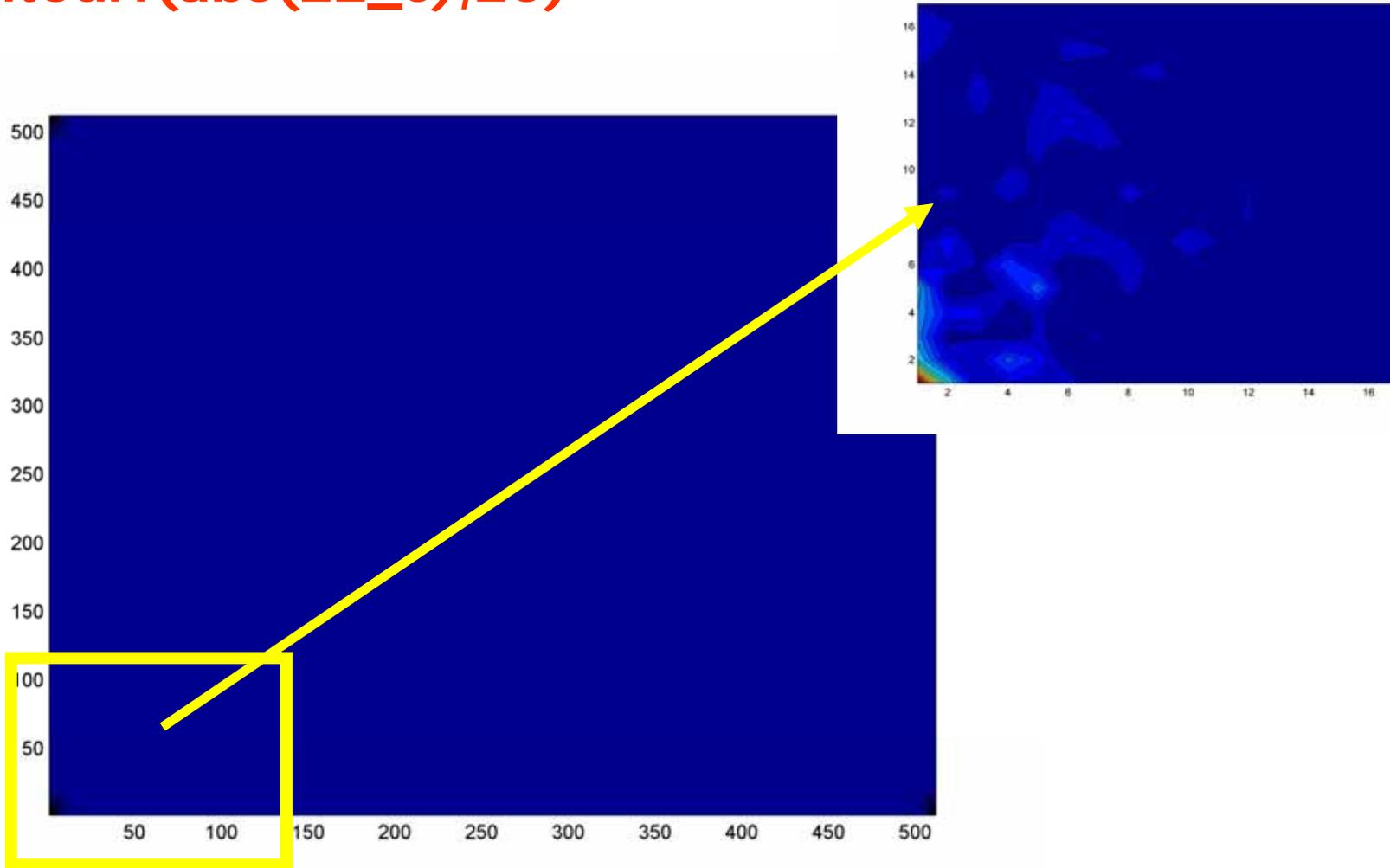
```
ZZ1(nf+1:2*nf,1:2*nc)=flipud(ZZ1(1:nf,1:2*nc));
```

Transformada de Fourier

```
ZZ_c=fft2(ZZ1,2*nf,2*nc);
```

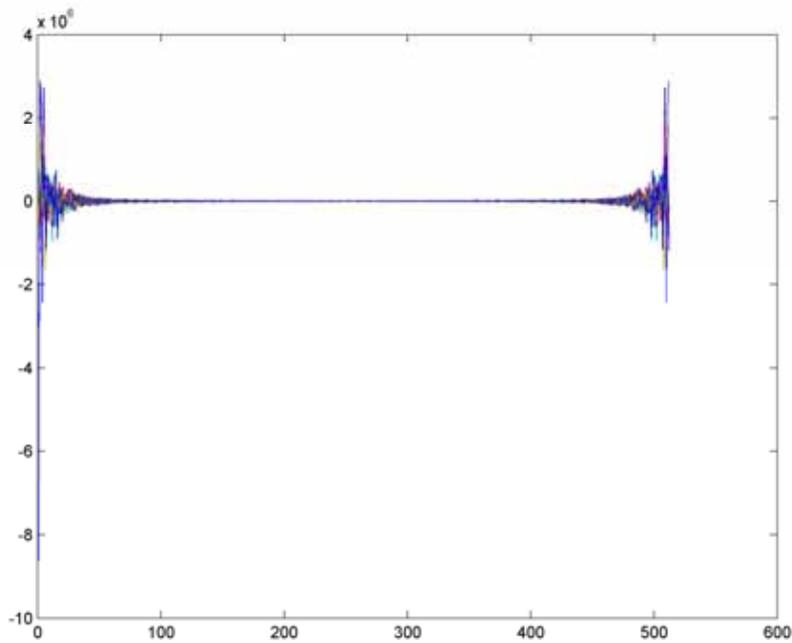
1) Calculo de transformada de Fourier

`contourf(abs(ZZ_c),20)`

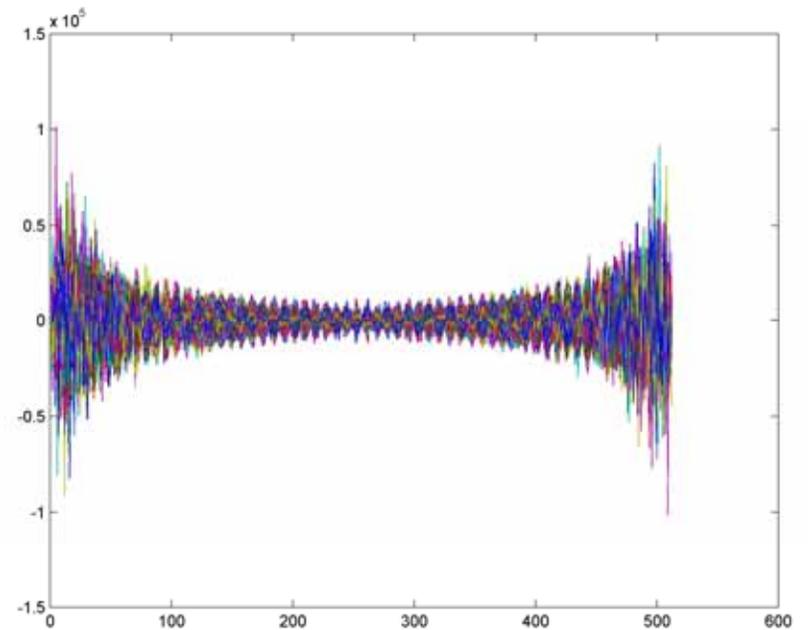


1) Calculo de transformada de Fourier

plot(real(ZZ_c))



plot(imag(ZZ_c))



2) Definición de filtro

Las frecuencias en la transformada de fourier “ mapean” el espectro en las siguientes frecuencias:

$$K_x = \frac{2 \cdot \pi \cdot (i-1)}{NC \cdot dx}; i = 1 : \frac{NC}{2} + 1$$

$$K_x = -\frac{2 \cdot \pi \cdot (i-1)}{NC \cdot dx}; i = \frac{NC}{2} + 2 : NC$$

$$K_y = \frac{2 \cdot \pi \cdot (i-1)}{NF \cdot dy}; i = 1 : \frac{NF}{2} + 1$$

$$K_y = -\frac{2 \cdot \pi \cdot (i-1)}{NF \cdot dy}; i = \frac{NF}{2} + 2 : NF$$

iix=0:1:nc;

iiy=0:1:nf;

lly=[iix -

fliplr(iix(2:length(iix)-1))];

lly=[iiy -

fliplr(iiy(2:length(iiy)-1))];

[freqx,freqy]=

2*pi*meshgrid(lly/(2*nc*dx),lly/(2*nf*dx));

2) Definición de filtro

Continuación analítica:

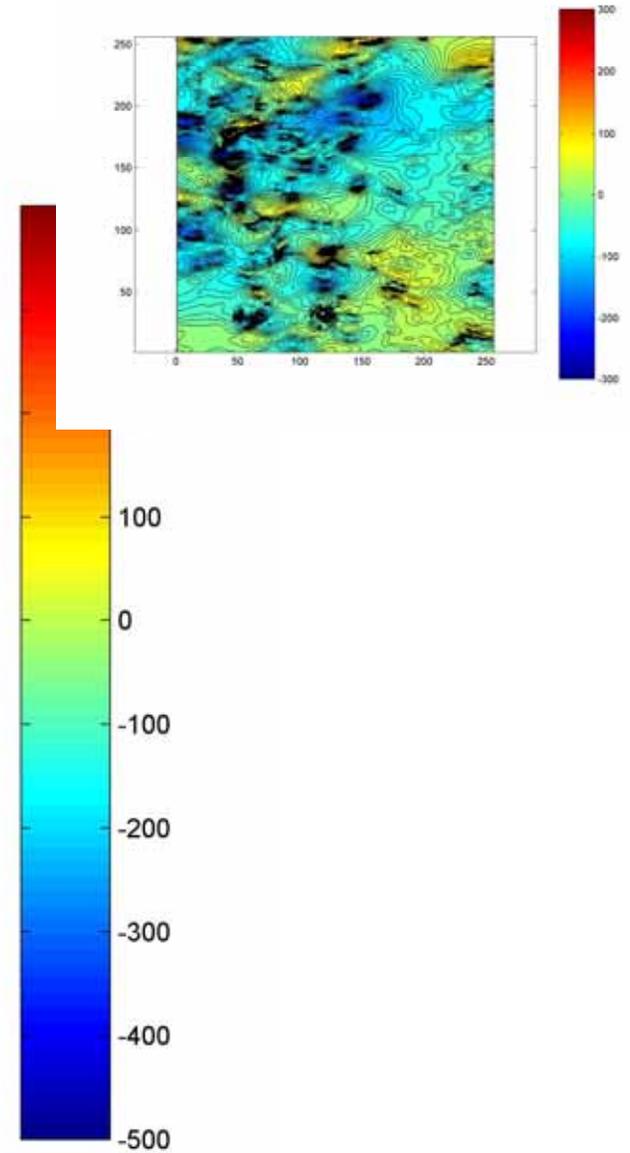
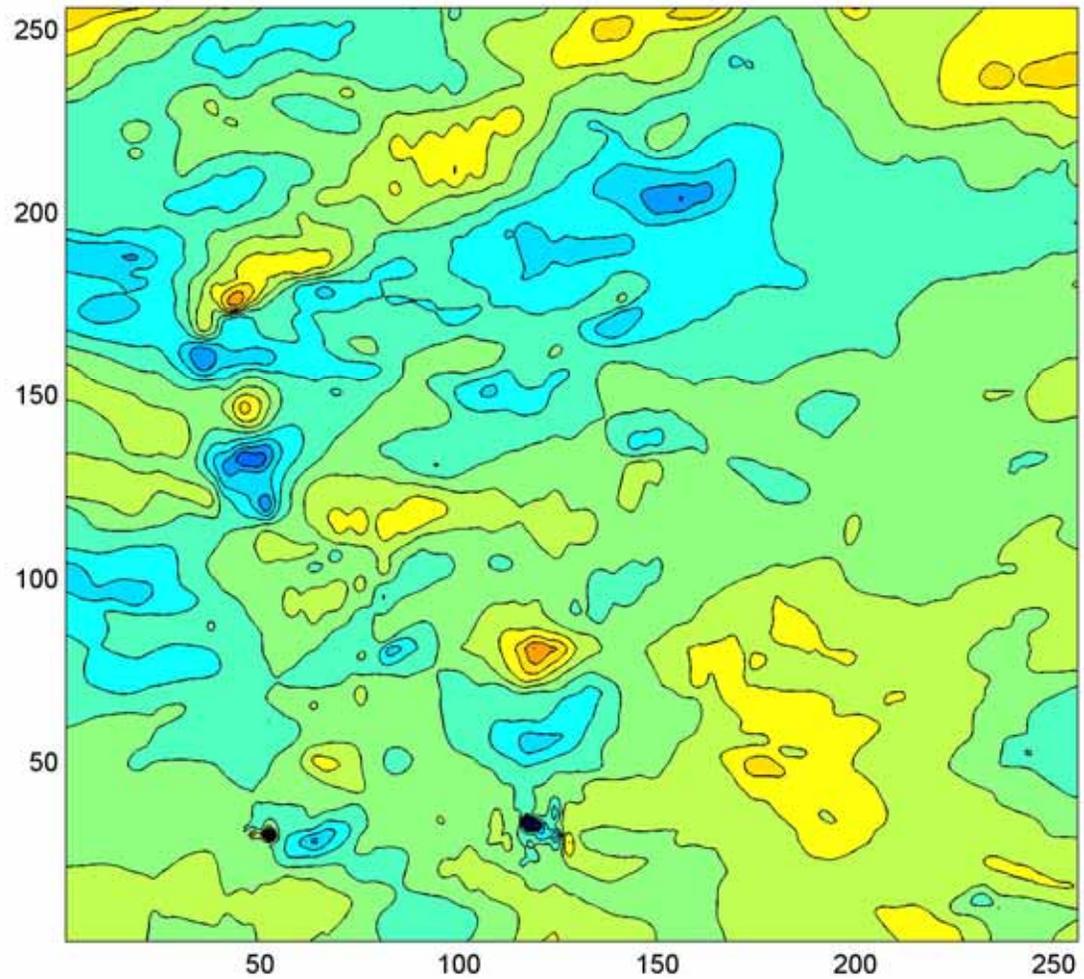
$$F_z(k_x, k_y) = F_{z'}(k_x, k_y) \cdot \exp^{-z(k_x + k_y)^{1/2}}$$

filtro=exp(-h*sqrt(freqx.^2+freqy.^2));

Calculo de la anti-transformada

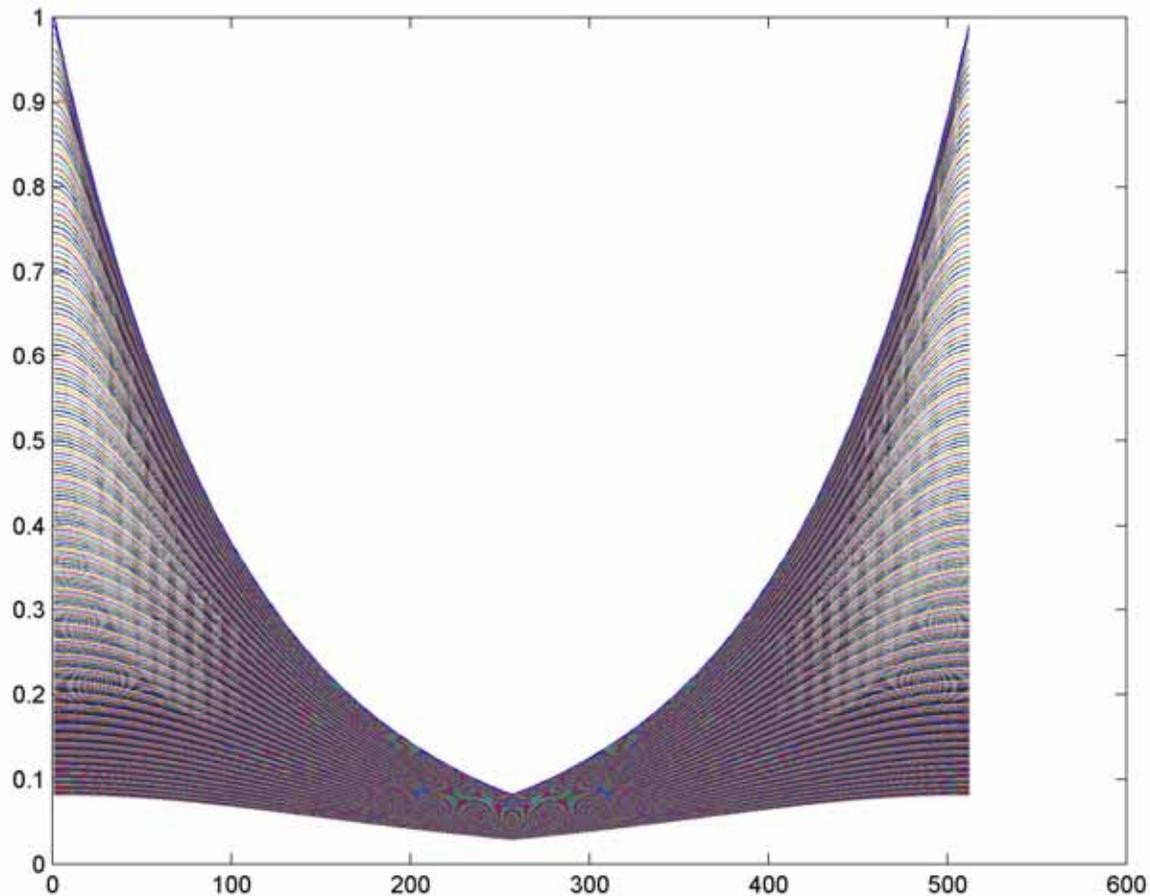
ZZ_cont1=real(ifft2(ZZ_c.*filtro,2*nf,2*nc));
ZZ_cont=ZZ_cont1(1:Nf,1:Nc);

2a) Continuación $h=500\text{m}$ arriba
`contourf(ZZ_cont,[-500:50:500])`

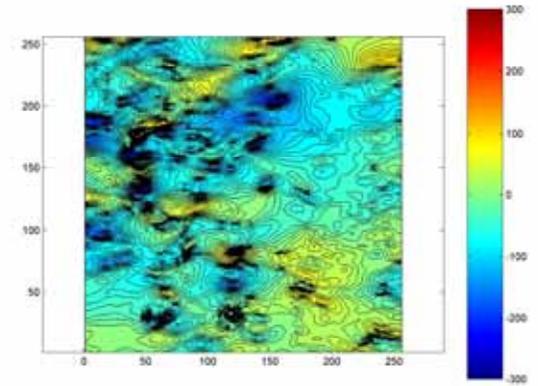
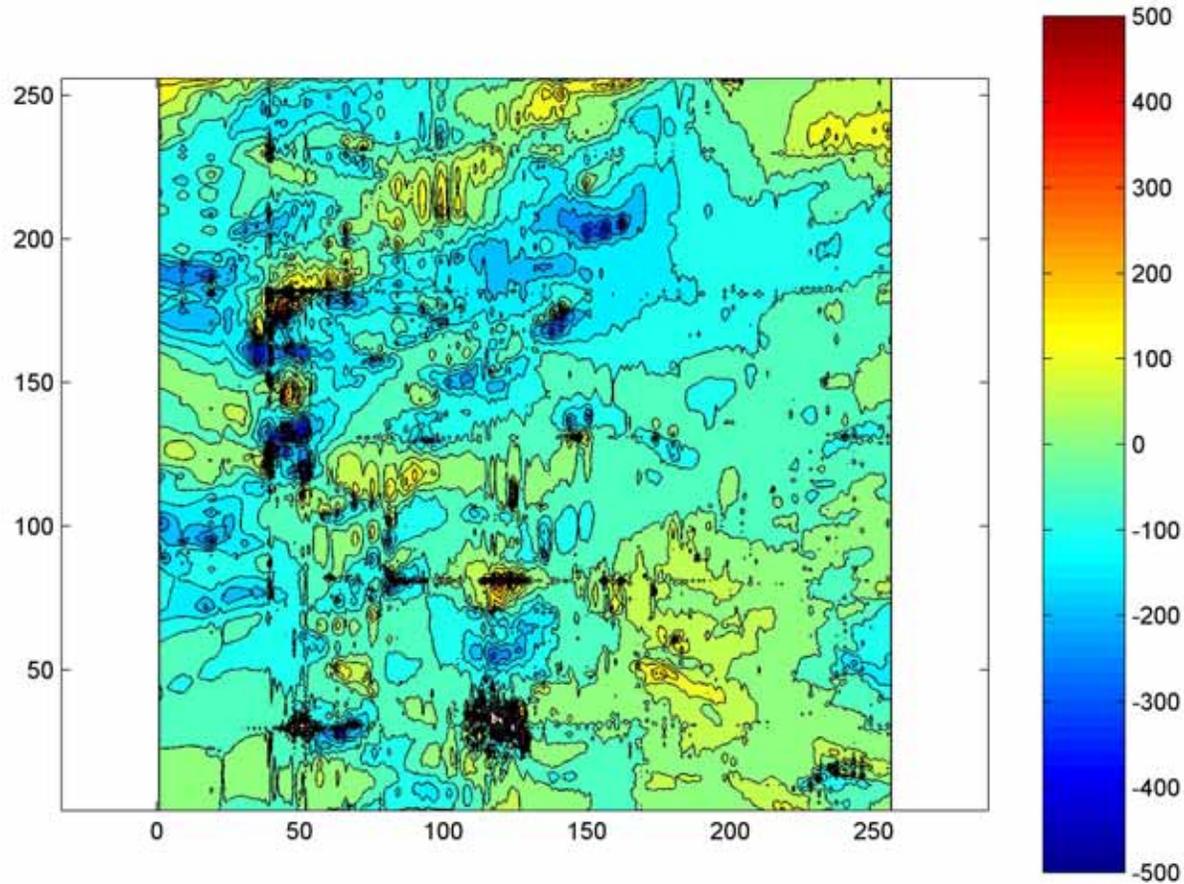


2a) Espectro de potencia de filtro en función de la frecuencia continuación hacia arriba

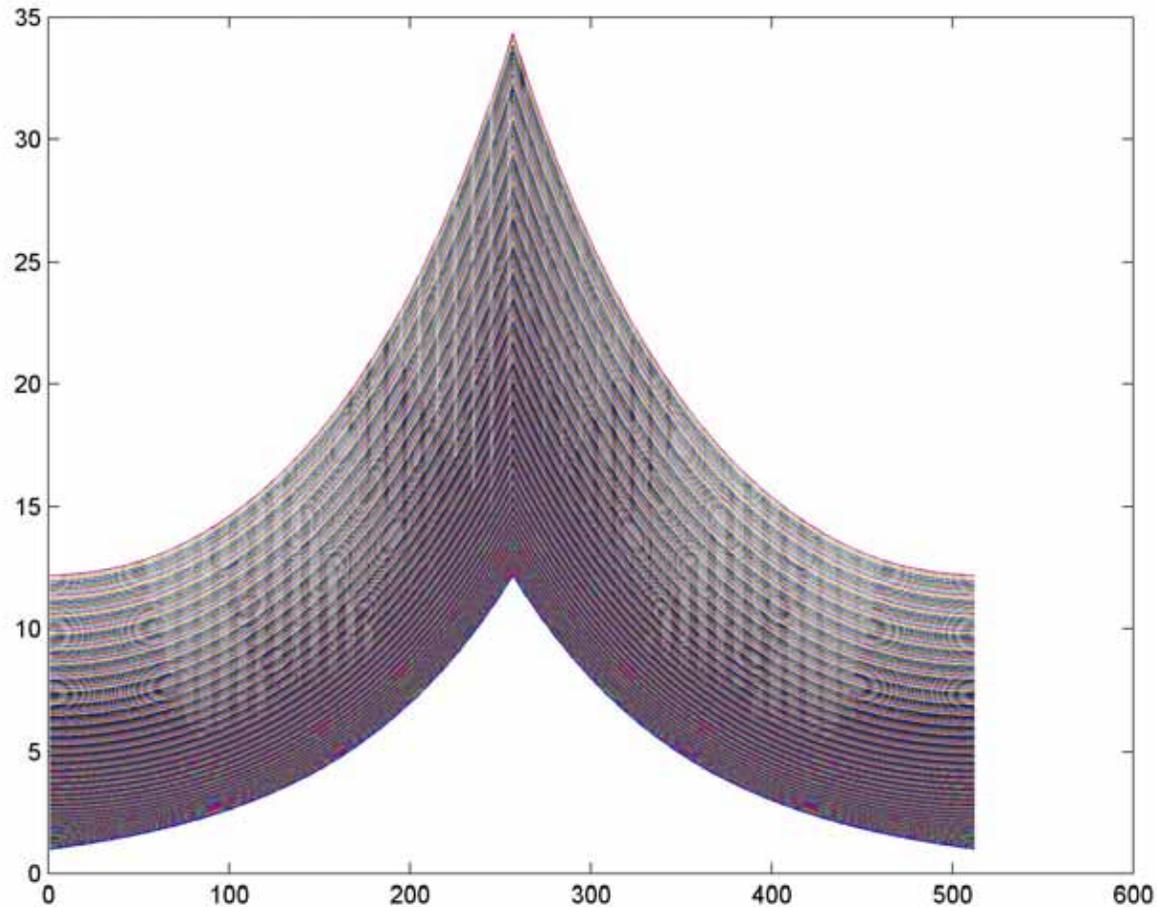
`plot(abs(filtro))`



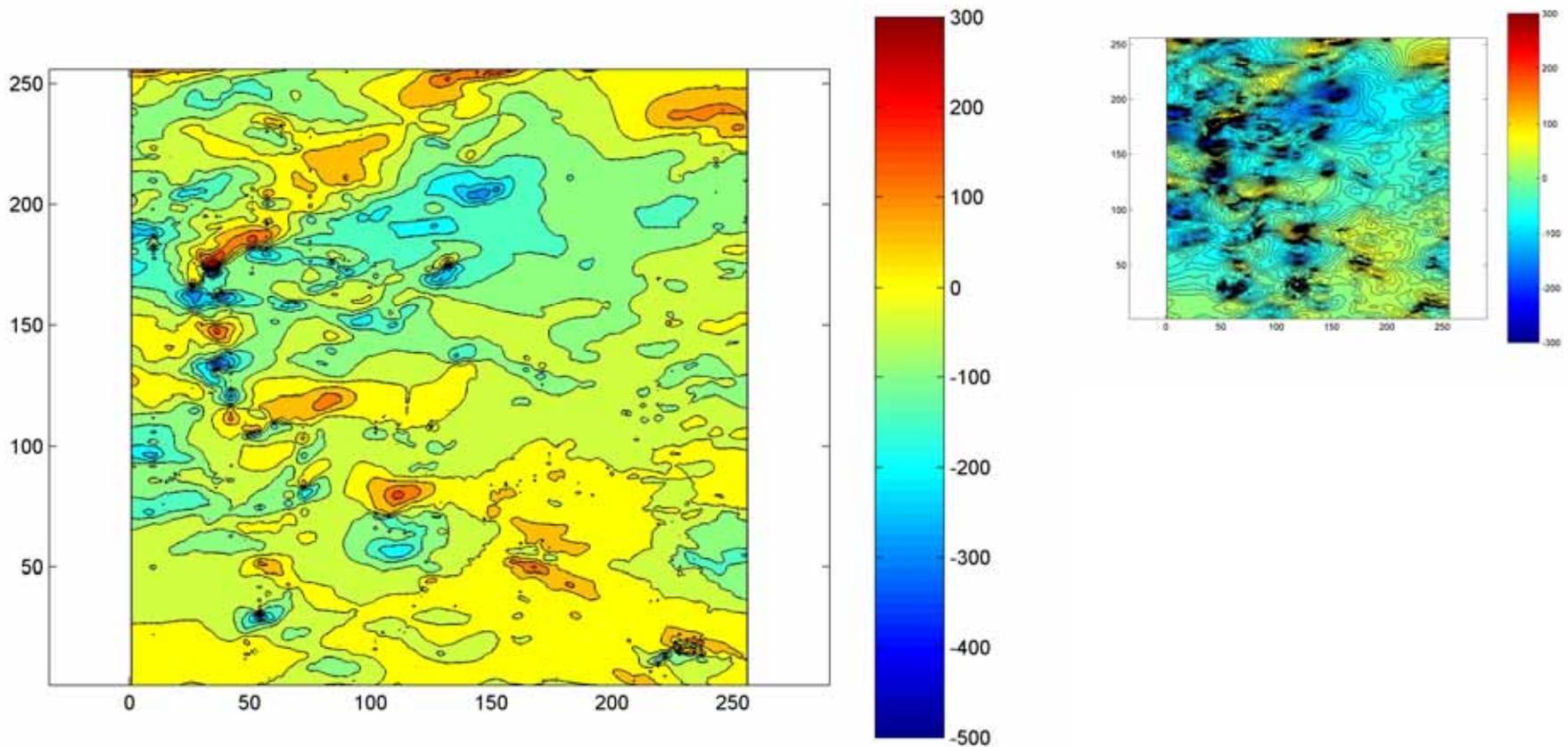
2b) Continuación $h=500m$ hacia abajo
`contourf(ZZ_cont,[-500:50:500])`



2b) Espectro de potencia de filtro en función de la frecuencia continuación hacia abajo: destaca las altas frecuencias `plot(abs(filtro))`



2b) Dado que se calculo la continuación hacia abajo sobre los datos ruidosos hubo una amplificación del ruido en las altas frecuencias; si efectuamos igual proceso sobre datos nivelados



2c) Definición de filtro

Derivadas:

$$TF \left[\frac{d^n}{dx^n} f(x) \right] = (ik_x)^n TF[f(x)]$$

Considerando $n=2$ y la derivada según z

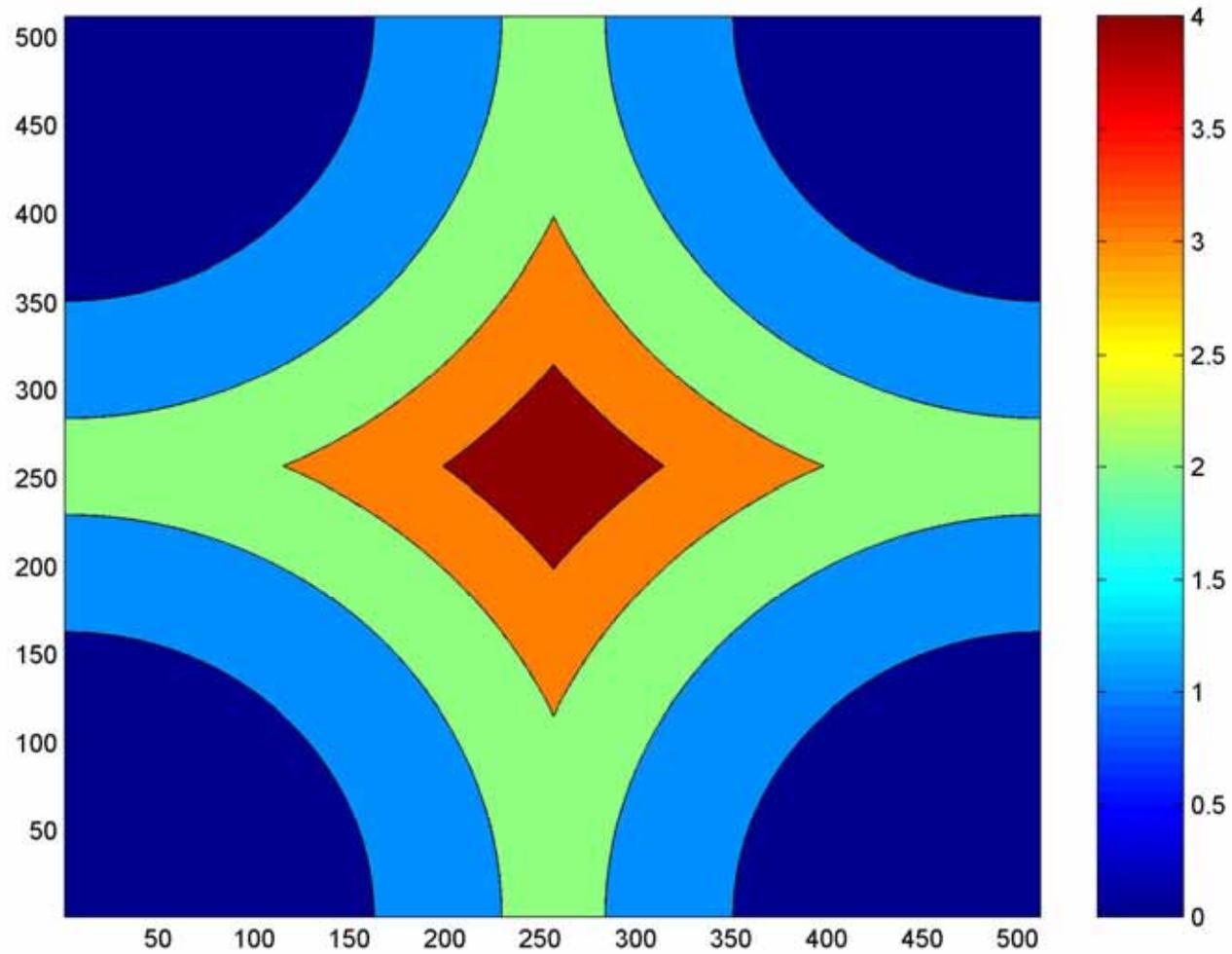
$$\begin{aligned} \nabla^2 T = 0 &= \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d^2 T}{dy^2} + \frac{d^2 T}{dz^2} \\ \Rightarrow \frac{d^2 T}{dz^2} &= - \left(\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d^2 T}{dy^2} \right) = TF^{-1} \left[(k_x^2 + k_y^2) \cdot TF[T] \right] \end{aligned}$$

filtro = (freqx.^2 + freqy.^2);

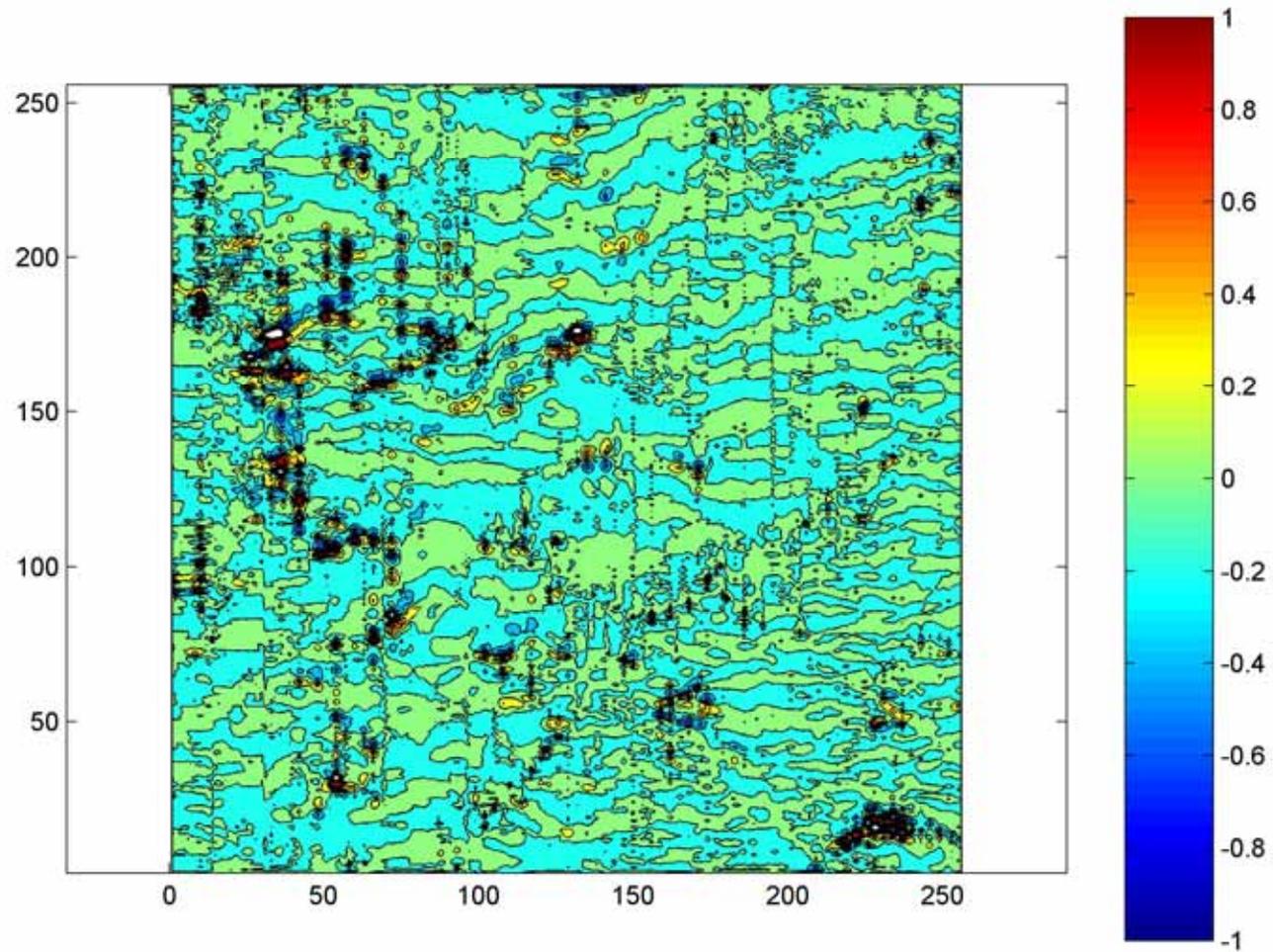
Calculo de la anti-transformada

```
ZZ_cont1 = real(ifft2(ZZ_c.*filtro,2*mf,2*nc));  
ZZ_cont = ZZ_cont1(1:NF,1:NC);
```

2c) Definición de filtro Derivadas:



2c) Definición de filtro Derivadas:



2d) Definición de filtro

Reducción al polo:

$$T_{polo} = TF^{-1} \left[FP(k_x, k_y, l, m, n, L, M, N) \cdot TF[T] \right]$$

$$FP = \frac{k_x^2 + k_y^2}{[i(lk_x + mk_y) + n(k_x^2 + k_y^2)^{1/2}][i(Lk_x + Mk_y) + N(k_x^2 + k_y^2)^{1/2}]}$$

`freqz = sqrt(freqx.^2 + freqy.^2);`

`freqz(1,1) = complex(1,0);`

`ang_I = ang_i * pi / 180; ang_D = ang_d * pi / 180;`

`l = cos(ang_I) * cos(ang_D);`

`m = cos(ang_I) * sin(ang_D);`

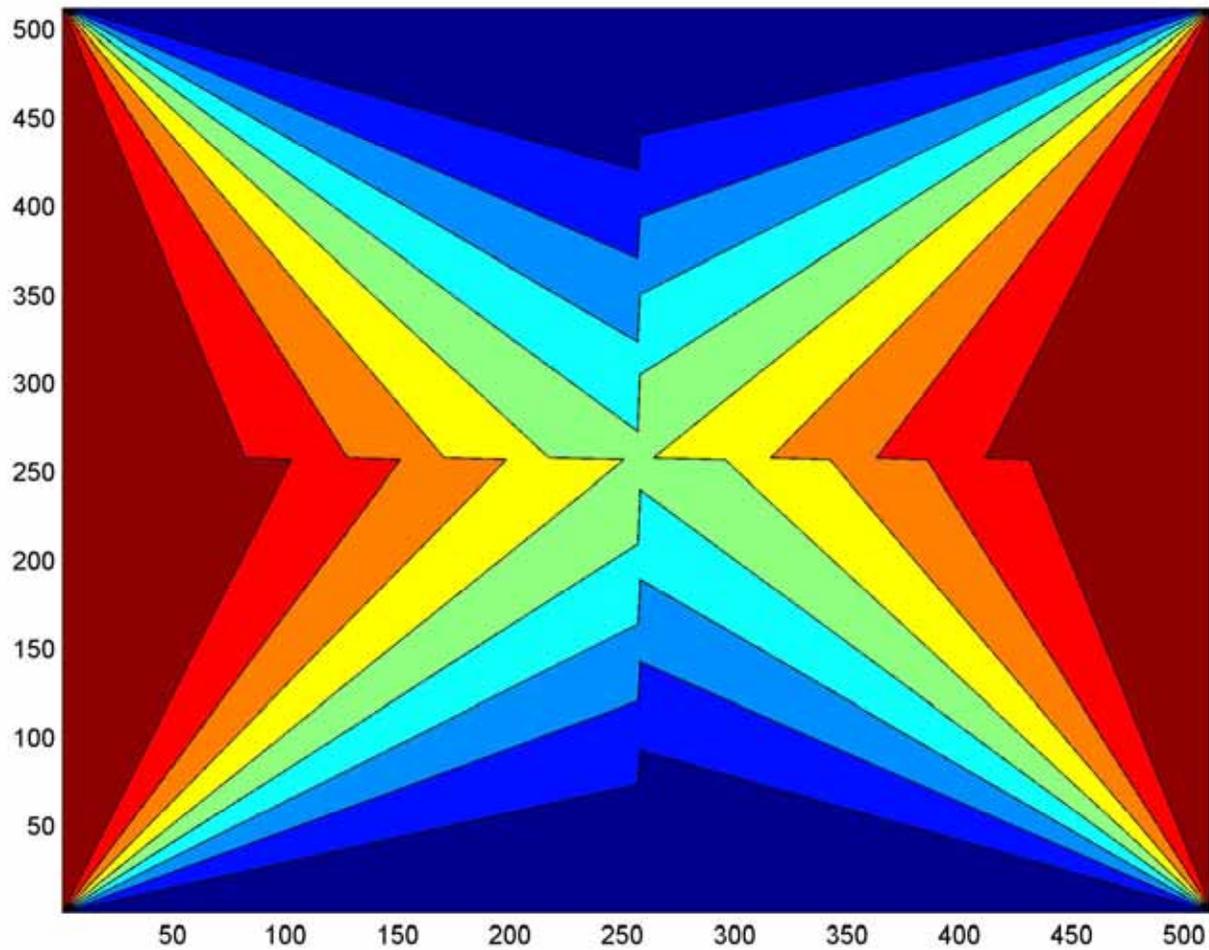
`n = sin(ang_I);`

`filtro_polo = ((complex(0, l * freqy + m * freqx) + n * freqz).`

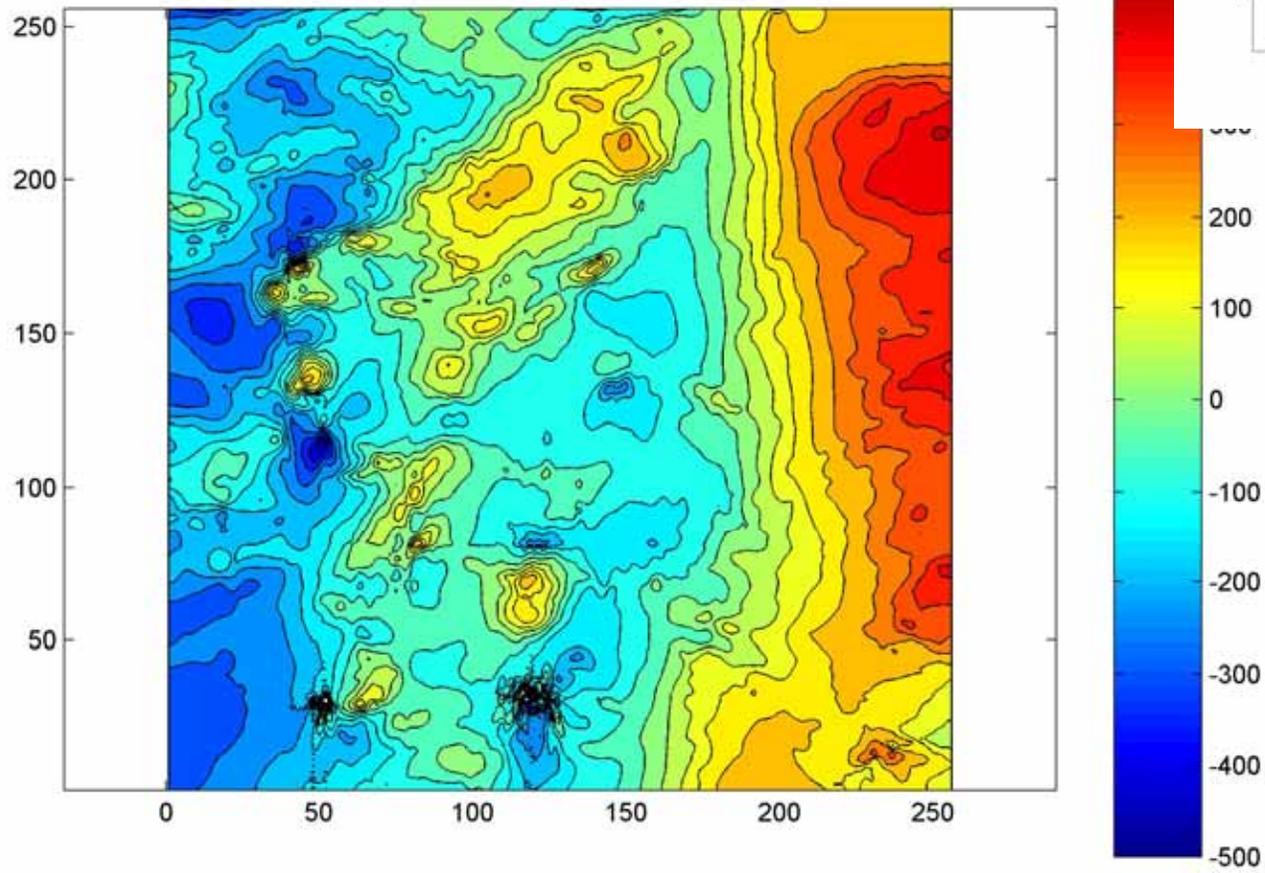
`* (complex(0, l * freqy + m * freqx) + n * freqz)) ./ (freqz.^2 + 0.0001);`

2d) Definición de filtro

Amplitud de filtro de Reducción al polo:

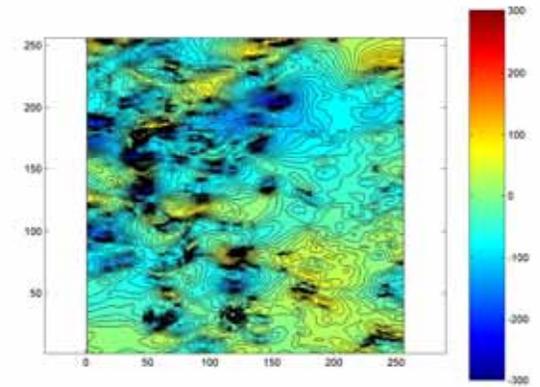
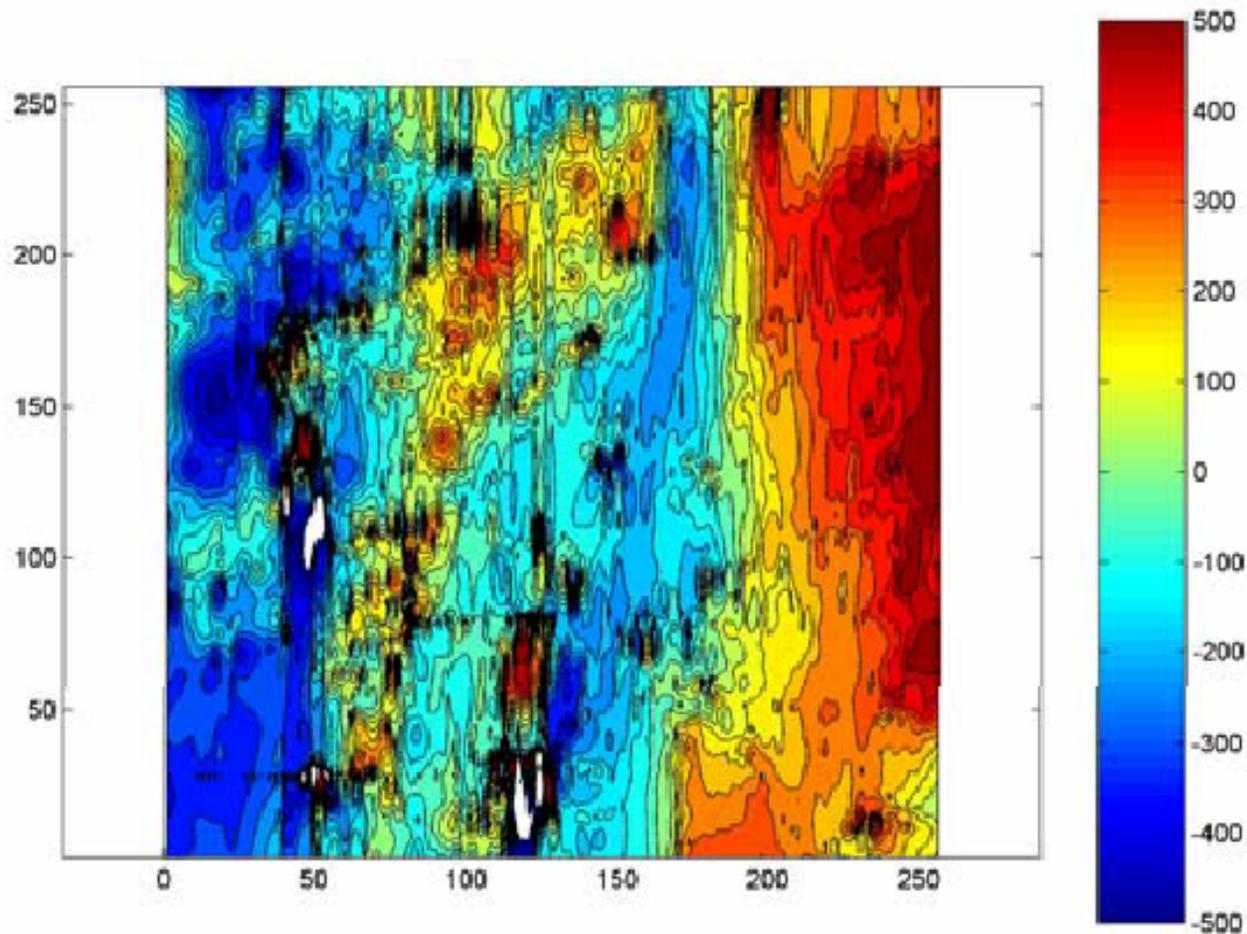


2d) Definición de filtro Reducción al polo:



2d) Definición de filtro

Reducción al polo sobre datos ruidosos en zonas de bajo ángulo:



2e) Definición de filtro

- señal analítica:

$$SA(T) = \sqrt{\left(\frac{dT}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dz}\right)^2}$$
$$\frac{dT}{dx} = TF^{-1}\left[i|k_x| \cdot TF[T]\right]; \frac{dT}{dy} = TF^{-1}\left[i|k_y| \cdot TF[T]\right]$$
$$\frac{dT}{dz} = TF^{-1}\left[(k_x^2 + k_y^2)^{1/2} \cdot TF[T]\right]$$

Utilizando los filtros de derivadas se contruyen los filtros individuales de cada término:

```
filtro_x=complex(0.,1.)*freqx;  
filtro_y=complex(0.,1.)*freqy;  
filtro_z=-(freqx.^2+freqy.^2);
```

2e) Definición de filtro

- señal analítica:

$$SA(T) = \sqrt{\left(\frac{dT}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dT}{dz}\right)^2}$$

Cada termino se calcula en forma independiente

```
ZZ_x=real(ifft2(ZZ_c.*filtro_x,2*nf,2*nc));  
ZZ_y=real(ifft2(ZZ_c.*filtro_y,2*nf,2*nc));  
ZZ_z=real(ifft2(ZZ_c.*filtro_z,2*nf,2*nc));  
ZZ_SA1=sqrt(ZZ_x.^2+ZZ_y.^2+ZZ_z.^2);  
ZZ_SA=ZZ_SA1(1:NF,1:NC);
```

Finalmente la señal analítica se determina como la raiz de la suma cuadrática de los tres términos.

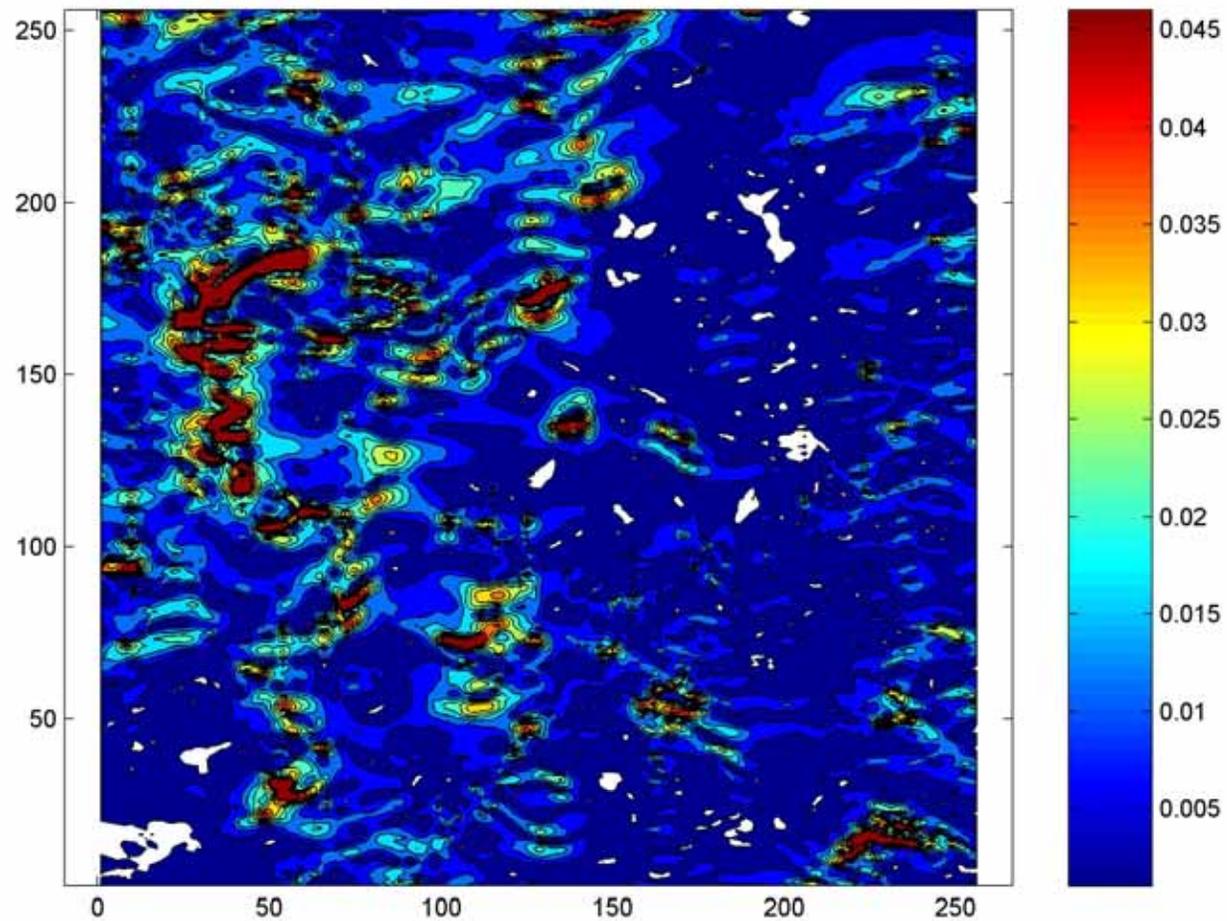
2e) Definición de filtro

- señal analítica:

`contourf(ZZ_SA,[0.001:0.005:0.05]);`

`colorbar`

`axis equal`



INTRODUCCION AL TRATAMIENTO DE WAVELETS

Se presenta en este modulo una introducción a una nueva tecnica de proceso e intepretación de datos de potencial denominada transformadas de wavelets u ondulitas en su descripción en español.

El análisis de señales o series de tiempo en forma convencional utiliza el formulismo de las transformadas de Fourier, visto en clases. Este tipo de análisis considera como supuesto básico que la señal bajo análisis es estacionaria.



INTRODUCCION AL TRATAMIENTO DE WAVELETS

Si bien para muchos problemas esta suposición básica es claramente aplicable, en otros casos se trata de una sobre simplificación que impide determinar por ejemplo algunas de las siguientes situaciones:

- tendencias
- cambios abruptos
- en general rasgos no estacionarios

En muchos casos estos rasgos constituyen la parte mas interesante de la señal, en el caso de la teoría de potencial puede asociarse a la presencia de cuerpos anómalos (p. ej. potenciales zonas con una concentración anómala de mineral que se esconde dentro de una señal litológica regional que representa el rasgo de tipo estacionario).

INTRODUCCION AL TRATAMIENTO DE WAVELETS

Una forma de enfrentar este tipo de situaciones es utilizando el racional de las transformadas de Fourier en bandas limitadas de tiempo (o espacio): STFT (short time fourier transform).



Si bien esta aproximación al problema puede resolver en cierta forma el problema esta muy condicionada por la elección de la ventana temporal (o espacial), que una vez elegida impide determinar el espectro de armónicos que van a poder ser estudiados. Adicionalmente este tratamiento presenta gran contaminación por los efectos de borde.

INTRODUCCION AL TRATAMIENTO DE WAVELETS

El tratamiento de las transformadas de wavelets propone en consecuencia una metodología para resolver los problemas anteriores: ser capaz de utilizar intervalos de tiempo grandes para identificar señales de gran longitud de onda, e intervalos de tiempo corto para resolver problemas de alta frecuencia.



En este esquema vemos que la transformada de wavelets, a diferencia de la transformada de Fourier, utiliza el dominio de la escala v/s tiempo (mas adelante veremos la relación entre escala y frecuencia).

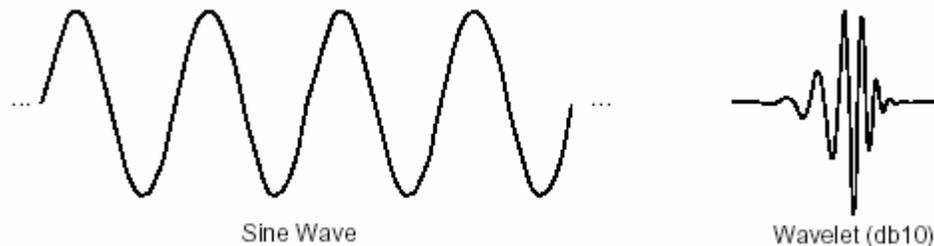
INTRODUCCION AL TRATAMIENTO DE WAVELETS

El análisis de una serie de tiempo en los dominios antes descritos se representa esquemáticamente de la siguiente forma:



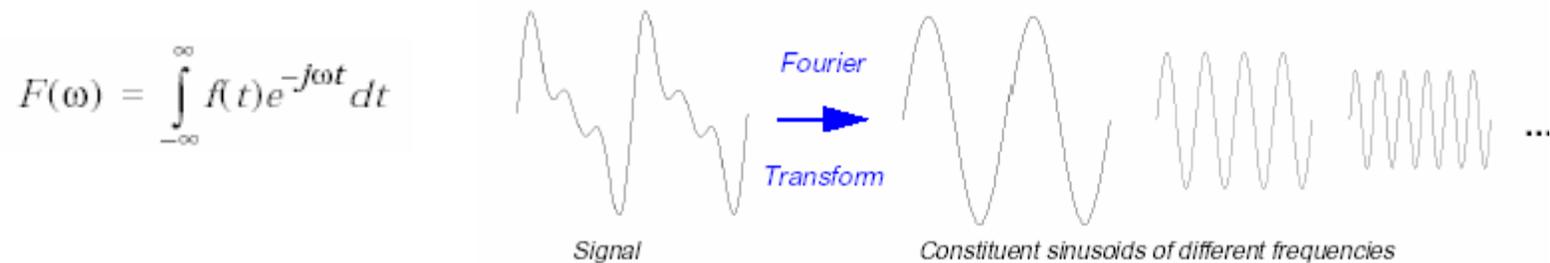
En que consiste entonces la representación en wavelets?

A diferencia de la transformada de Fourier que utiliza como señal fundamental una función sinusoidal, infinitamente extendido en el tiempo, la descomposición de wavelets utiliza una función irregular, asimétrica y limitada temporalmente:



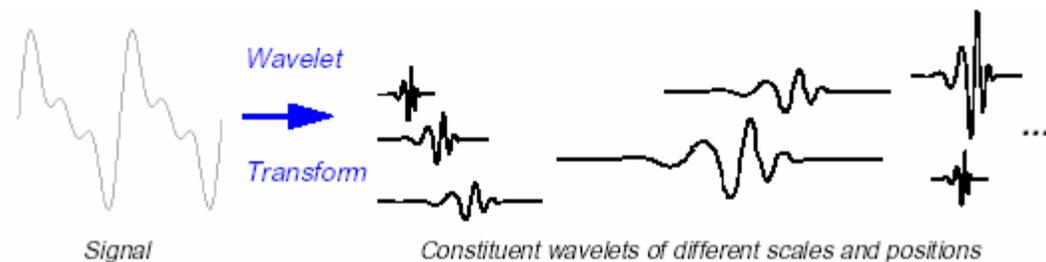
INTRODUCCION AL TRATAMIENTO DE WAVELETS

En consecuencia para una dada función $f(t)$, la transformada de fourier se representa como:



En el caso de la transformada de wavelet continua se define como la suma sobre todo el tiempo del producto de la señal $f(t)$ y la función de wavelet ψ , escalada y desfasada:

$$C(\text{scale}, \text{position}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi(\text{scale}, \text{position}, t) dt$$



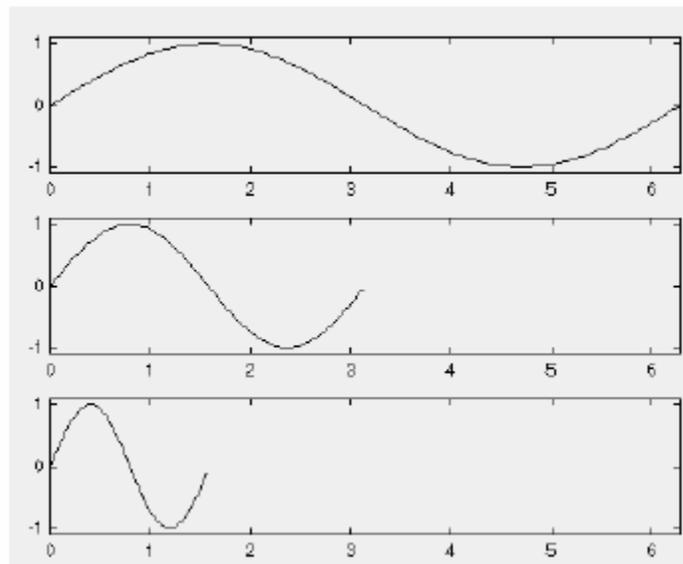
INTRODUCCION AL TRATAMIENTO DE WAVELETS

Los coeficientes C en la transformada de wavelet son función de la escala y la posición temporal o espacial.

ESCALAMIENTO

En este contexto el escalamiento de la función de wavelet dice relación con el estiramiento o acortamiento de la señal en el espacio o tiempo, y en consecuencia tiene una conotación en la longitud de onda de la señal.

•Para una senoide:



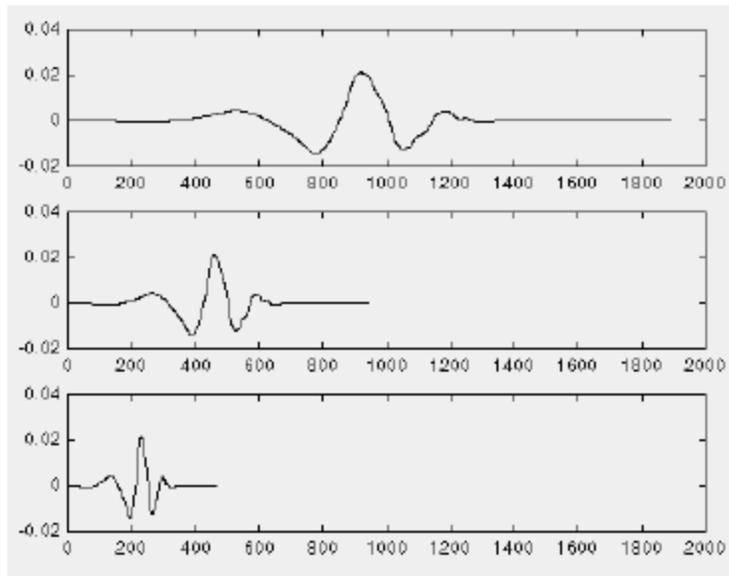
$$f(t) = \sin(t) ; a = 1$$

$$f(t) = \sin(2t) ; a = \frac{1}{2}$$

$$f(t) = \sin(4t) ; a = \frac{1}{4}$$

INTRODUCCION AL TRATAMIENTO DE WAVELETS

- Para una función de wavelet:



$$f(t) = \psi(t) \quad ; \quad a = 1$$

$$f(t) = \psi(2t) \quad ; \quad a = \frac{1}{2}$$

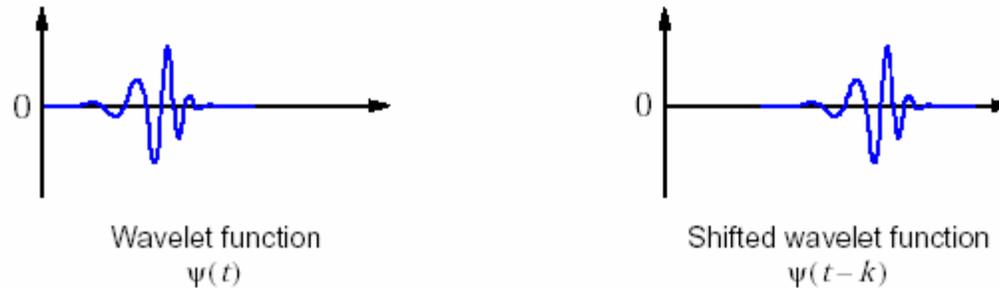
$$f(t) = \psi(4t) \quad ; \quad a = \frac{1}{4}$$

Es evidente que el escalamiento depende en forma directa de la longitud de onda de la señal

INTRODUCCION AL TRATAMIENTO DE WAVELETS

DESFASE

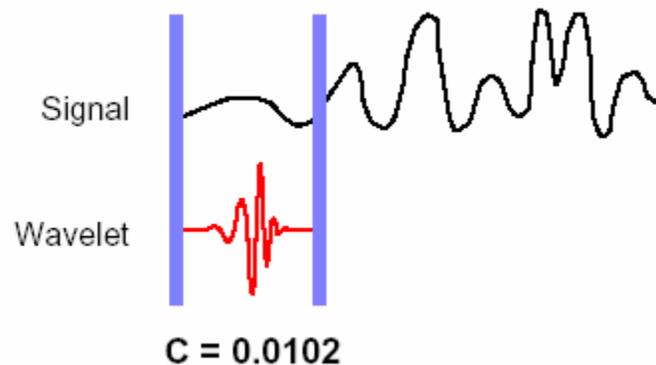
El desfase de una función $f(t)$ es simplemente su representación en un dado tiempo k relativo al origen: $f(t-k)$



Mediante los conceptos de escalamiento y desfase podemos entonces establecer los pasos necesarios para obtener una transformada de wavelet:

INTRODUCCION AL TRATAMIENTO DE WAVELETS

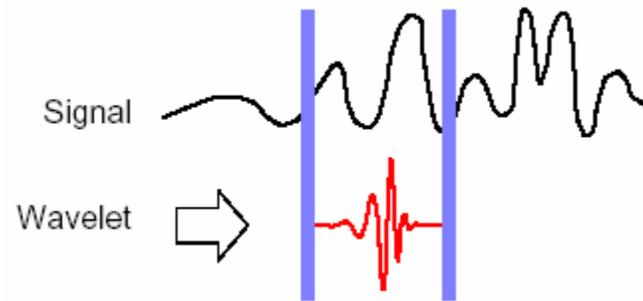
- 1) elegir una dada wavelet y comprar con la señal sección a sección.
- 2) determine el factor C que parametriza la correlación entre la función wavelet y el segmento bajo análisis



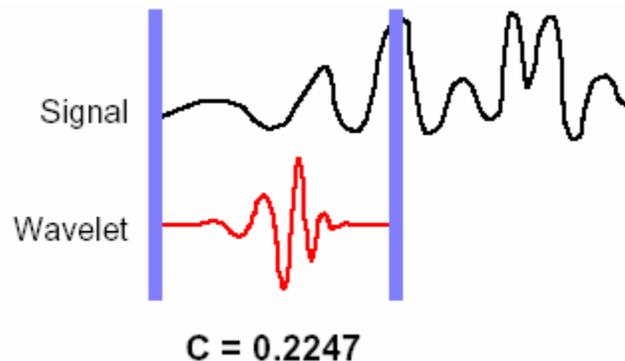
Nótese que este factor C es función del tipo de wavelet elegido, si el ajuste es exacto entonces $C=1$ (correlación máxima)

INTRODUCCION AL TRATAMIENTO DE WAVELETS

- 3) desplazar la función wavelet a la derecha y repetir el procedimiento 1) y 2) hasta completar de recorrer la señal.



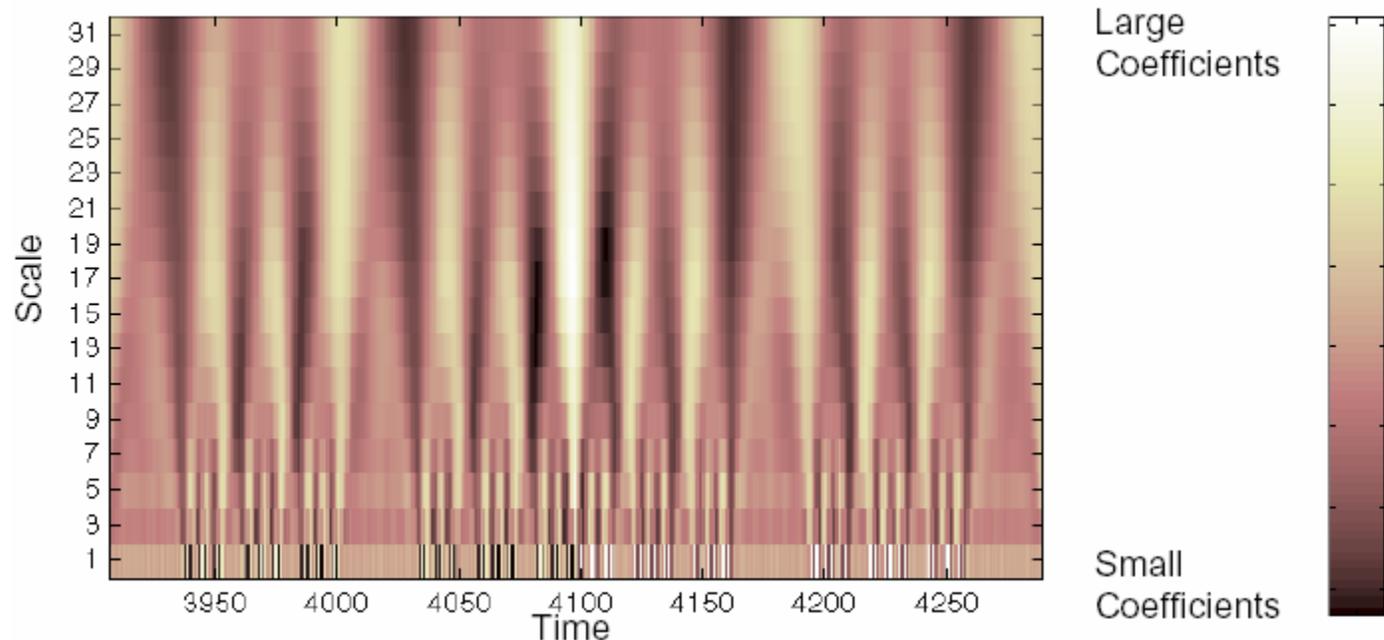
- 4) escalar la función de wavelet y repetir los procedimientos 1) a 3)



- 5) repetir los procedimientos 1) a 4), para todas las escalas posibles obteniendo una familia de coeficientes C.

INTRODUCCION AL TRATAMIENTO DE WAVELETS

Una vez aplicada la transformación de wavelet obtenemos una representación de la señal en el dominio escalamiento-tiempo en el cual para cada tiempo tenemos una familia de coeficientes que nos indican cuan parecida es la señal con un determinado estiramiento de la función de wavelet utilizada.



INTRODUCCION AL TRATAMIENTO DE WAVELETS

El escalamiento de la función de wavelet dice relación con la longitud de onda, aunque no tiene una relación directa

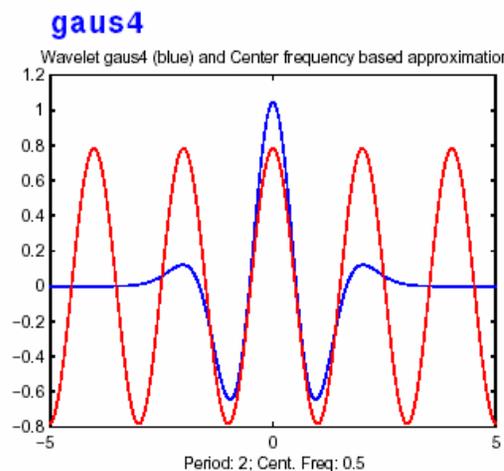
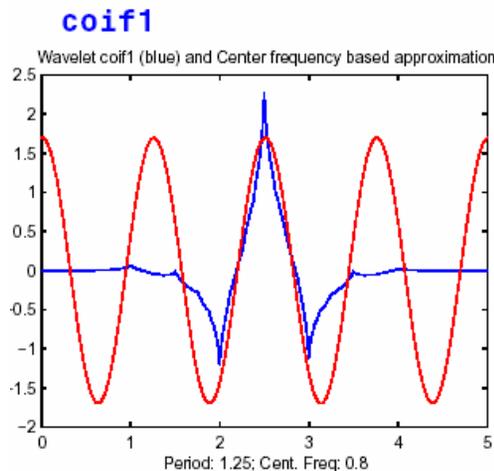
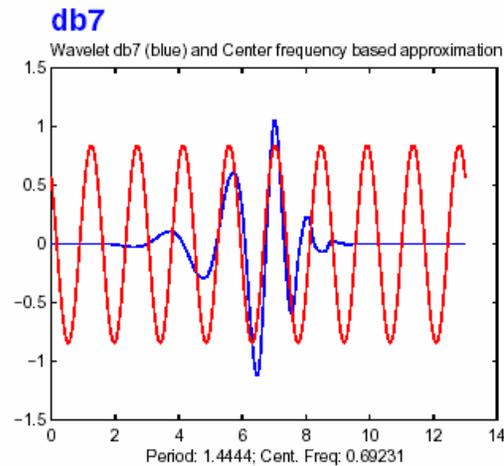
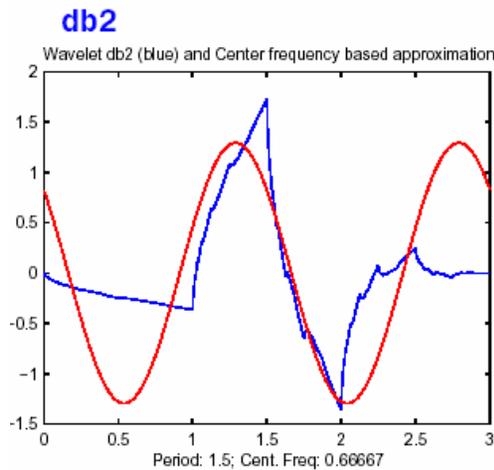


Escalamientos pequeños => alta frecuencia, detalles en la señal
Escalamientos grandes => baja frecuencia, tendencias regionales

Pese a no existir una relación directa es importante considerar que los rasgos en la naturaleza tienen mas relación con escalamientos de una determinada forma (comportamiento fractal) que sinusoides regulares. Por tal razon el disponer de una herramienta de esta naturaleza probablemente constituye un avance c/r a la representación en el dominio de Fourier.

INTRODUCCION AL TRATAMIENTO DE WAVELETS

Una forma de aproximar la relación entre frecuencia y escala es considerar la frecuencia central, F_c , que caracteriza la frecuencia dominante de la función de wavelet dominante:



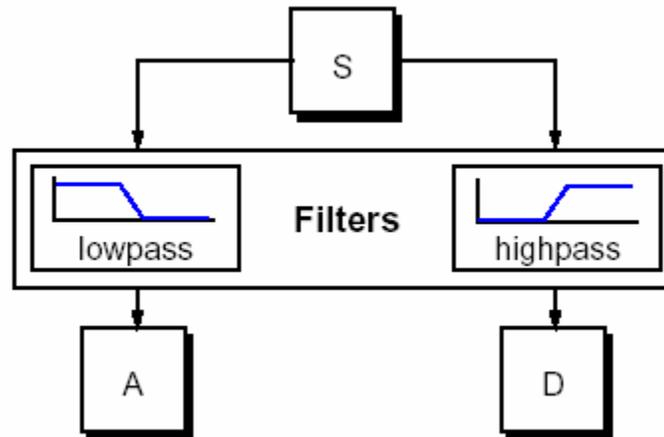
La frecuencia F_c dominante es indicada por la senoide de color rojo, mientras que la función de wavelet se representa en color azul. De tal forma que para una dada dilatación a y un intervalo de muestreo Δ la frecuencia asociada se expresa como:

$$F_a = \frac{\Delta \cdot F_c}{a}$$

INTRODUCCION AL TRATAMIENTO DE WAVELETS

FILTRADO DE SEÑAL

El tratamiento normal de una señal corresponde a extraer las altas y bajas frecuencias en procesos denominados como filtrado de pasa alto y bajo:

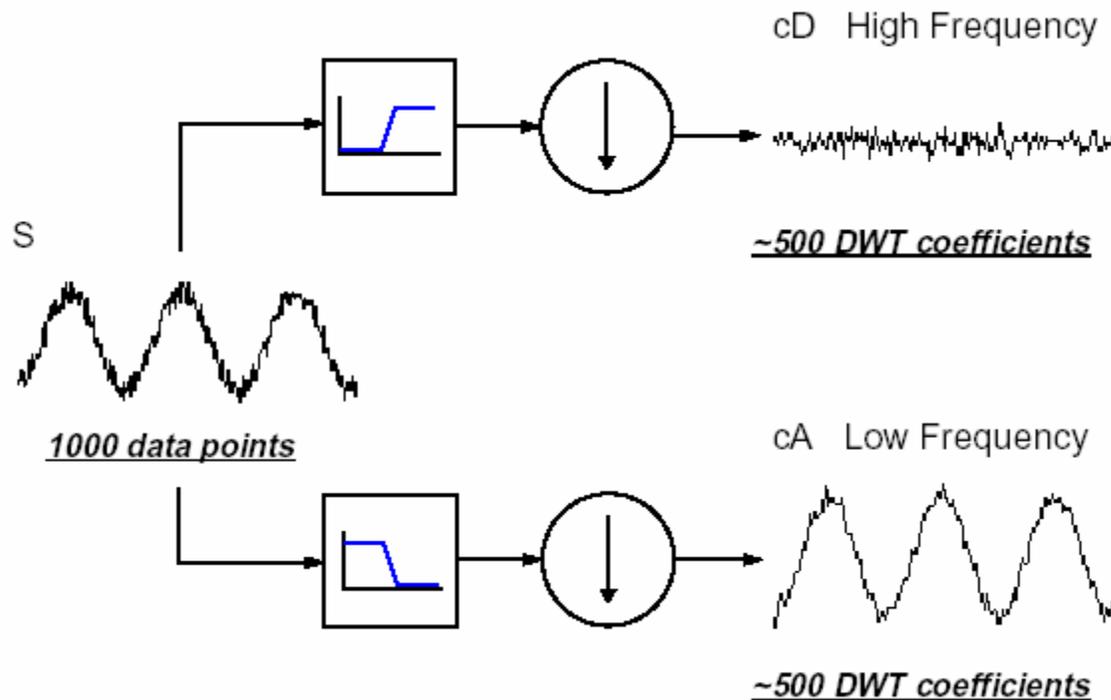


En este esquema la señal S es descompuesta en una componente de baja frecuencia (A: aproximación), y otra componente de alta frecuencia (D: detalles)

INTRODUCCION AL TRATAMIENTO DE WAVELETS

FILTRADO DE SEÑAL

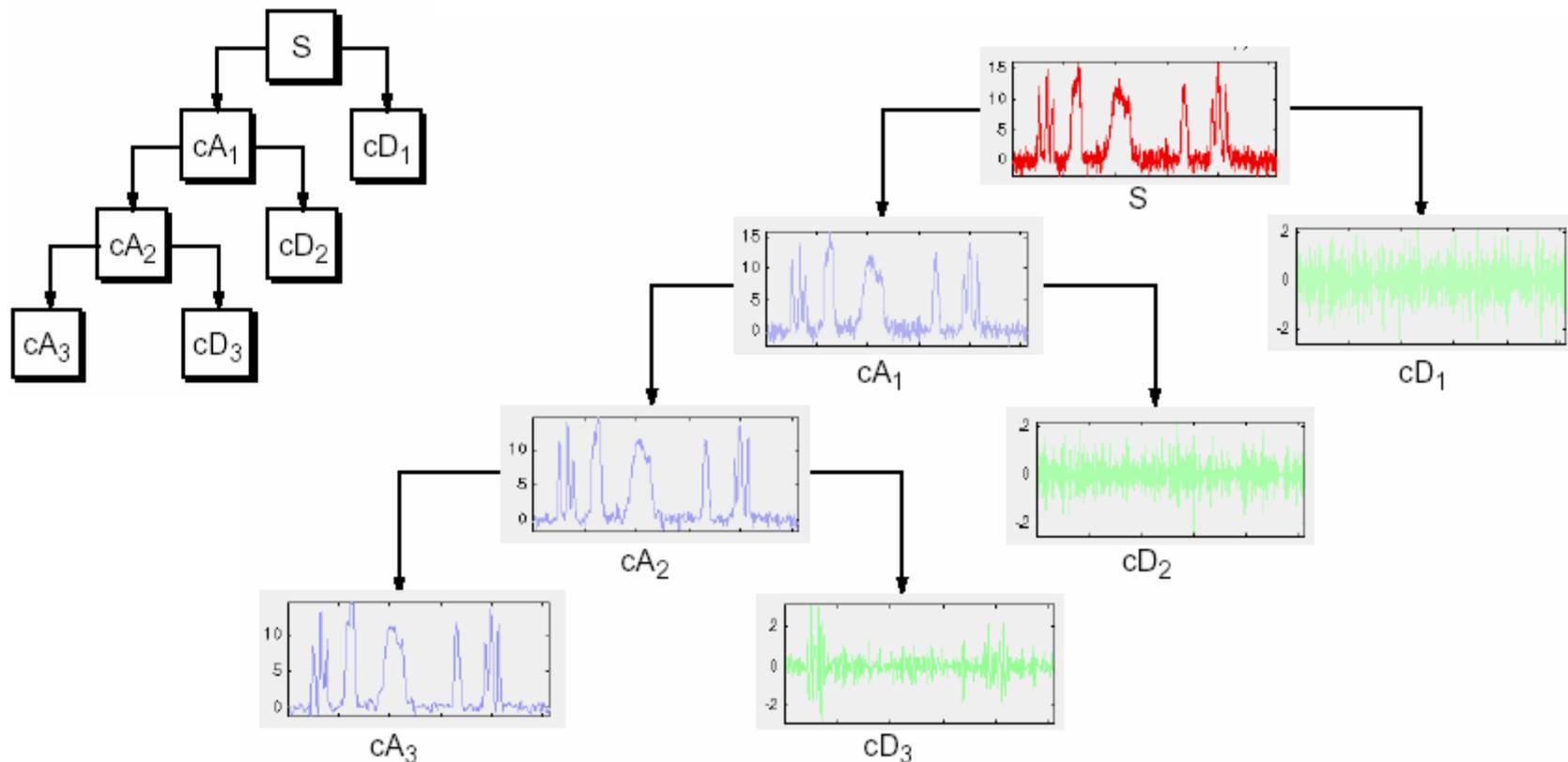
En el dominio de wavelets este proceso se efectúa reduciendo el número de puntos de muestreo. La reconstitución de la señal filtrada se basa en los coeficientes cD (para los detalles) y cA (para la aproximación).



INTRODUCCION AL TRATAMIENTO DE WAVELETS

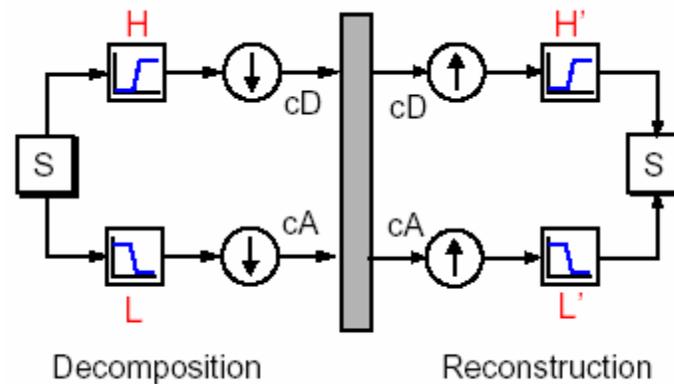
FILTRADO DE SEÑAL

Este proceso de filtrado se puede efectuar en forma iterativa extrayendo las señales de mas alta frecuencia:

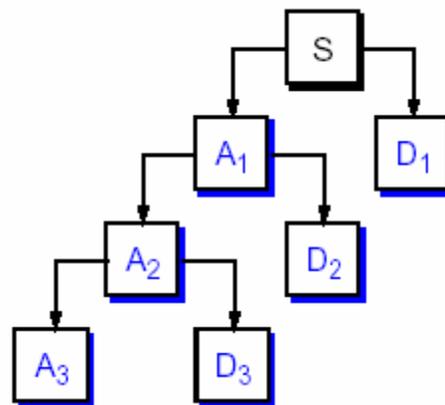


INTRODUCCION AL TRATAMIENTO DE WAVELETS

La reconstrucción de la señal original se obtiene incorporando las señales aproximadas y detalles:



Reconstructed
Signal
Components



$$\begin{aligned} S &= A_1 + D_1 \\ &= A_2 + D_2 + D_1 \\ &= A_3 + D_3 + D_2 + D_1 \end{aligned}$$

INTRODUCCION AL TRATAMIENTO DE WAVELETS

Matemáticamente la transformada de wavelet se expresa como:

$$C(a,b) = \int_{\mathbb{R}} s(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

$C(a,b)$: coeficientes de transformada wavelet

$s(t)$: señal

ψ : función wavelet

a : escalamiento o dilatación

b : desfase

La respectiva transformada inversa se expresa como:

$$s(t) = \frac{1}{K_{\psi}} \int_{\mathbb{R}'} \int_{\mathbb{R}} C(a,b) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{dad b}{a^2}$$

INTRODUCCION AL TRATAMIENTO DE WAVELETS

La función de wavelet debe cumplir algunas condiciones básicas:

- Debe tender suavemente a cero para x en infinito
- La integral en todo el espacio es nula:

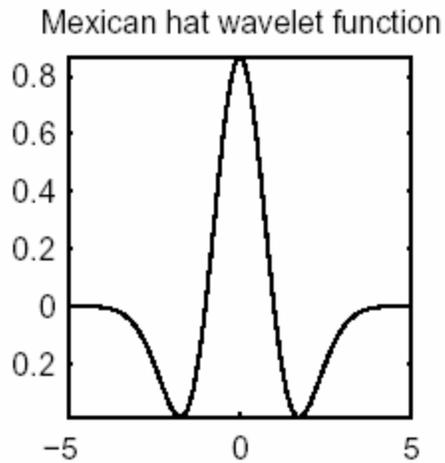
$$\int_{R'} \psi dt = 0$$

- Momentos de la función de wavelet son idénticamente nulos:

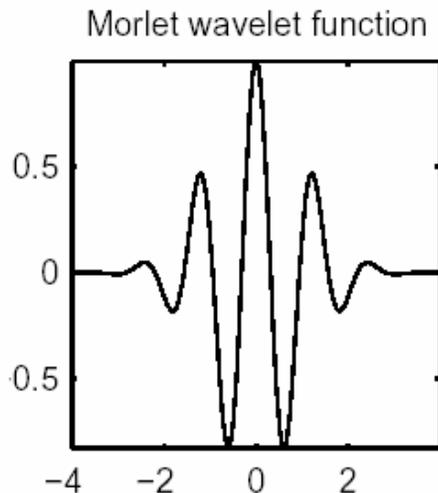
$$\int_{R'} t^n \psi dt = 0, \quad n = 0, 1, \dots, p$$

INTRODUCCION AL TRATAMIENTO DE WAVELETS

Algunas funciones de wavelet:



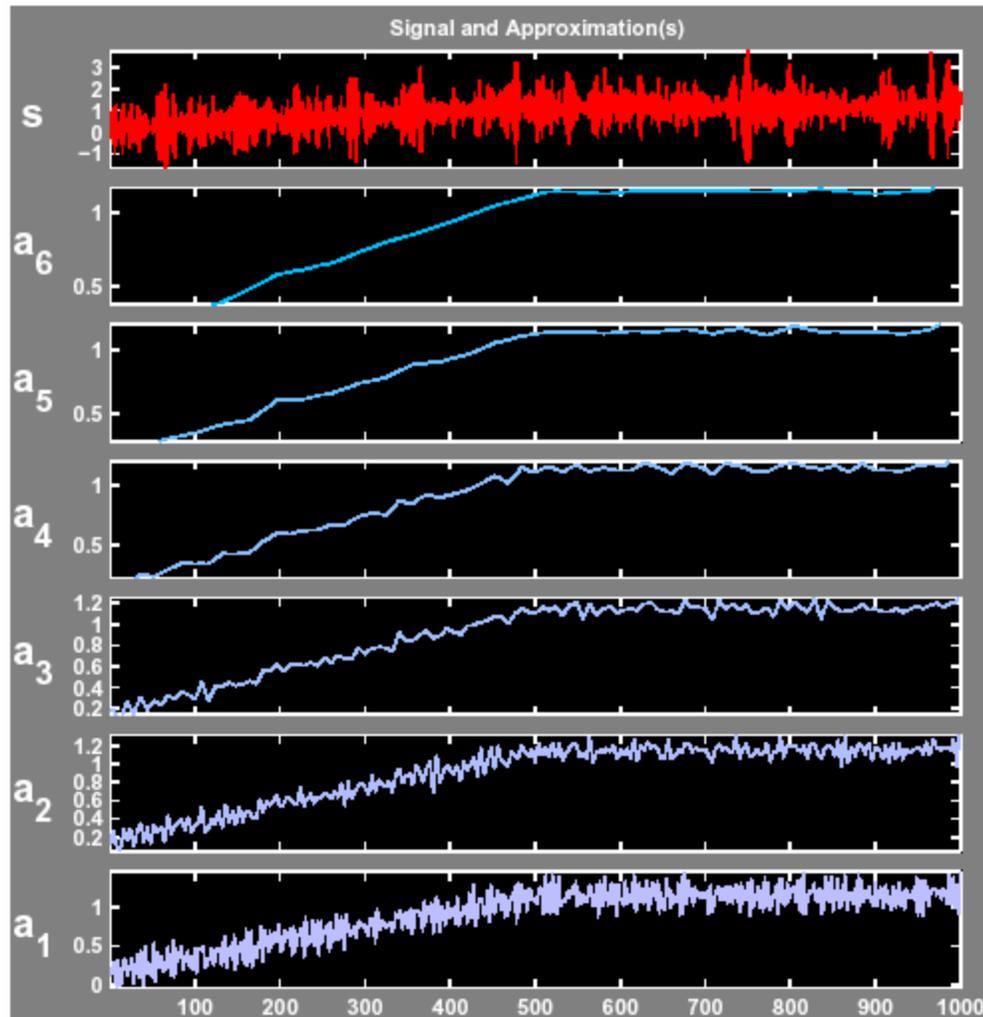
$$\psi(x) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} \right) (1 - x^2) e^{-\frac{x^2}{2}}$$



$$\psi(x) = C e^{\frac{-x^2}{2}} \cos(5 \cdot x)$$

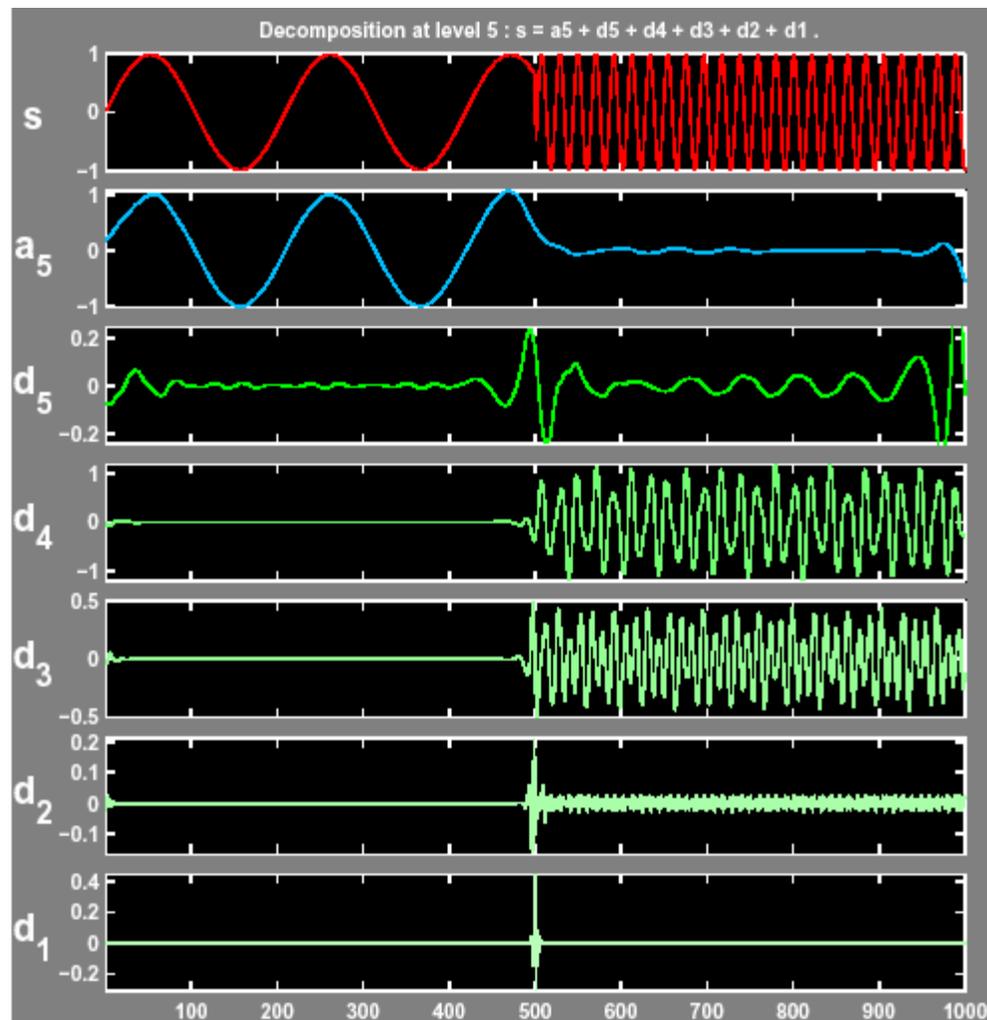
APLICACIÓN DE WAVELETS

- Detección de tendencias



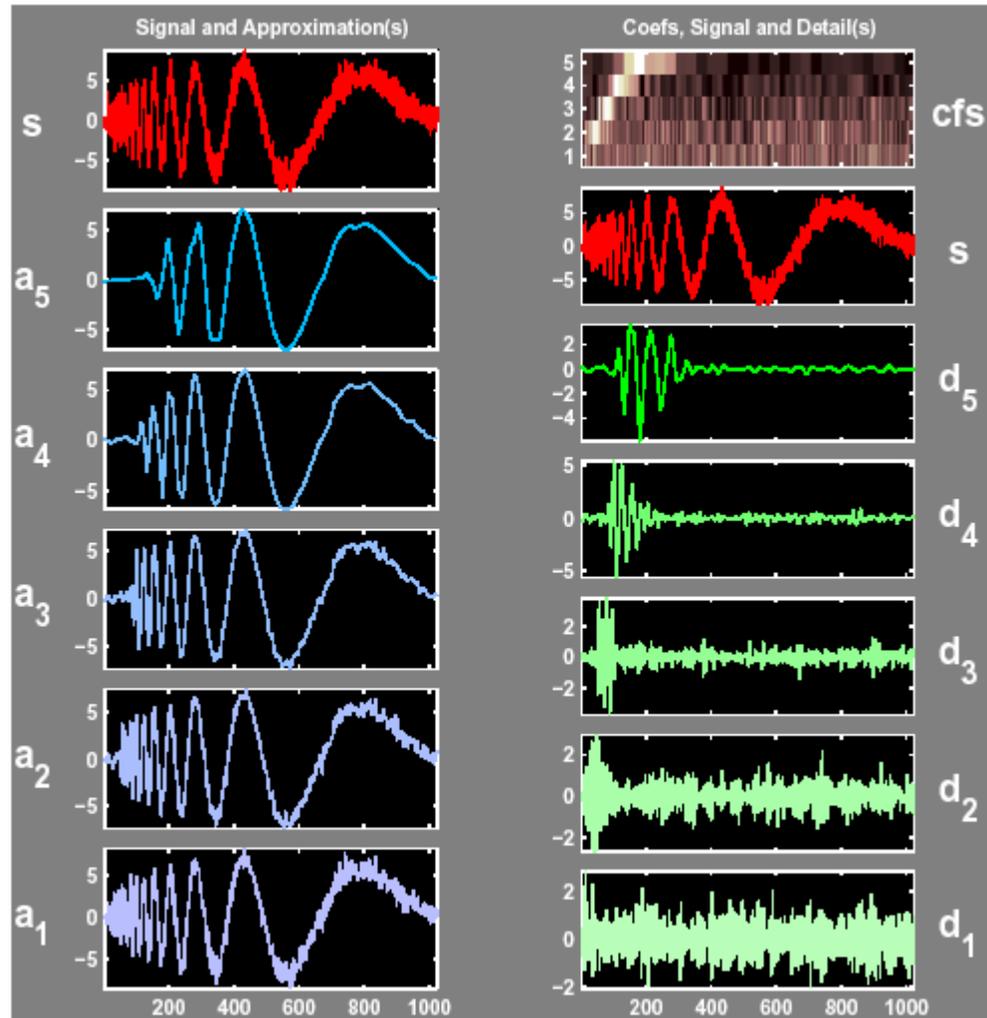
APLICACIÓN DE WAVELETS

• Detección de discontinuidades



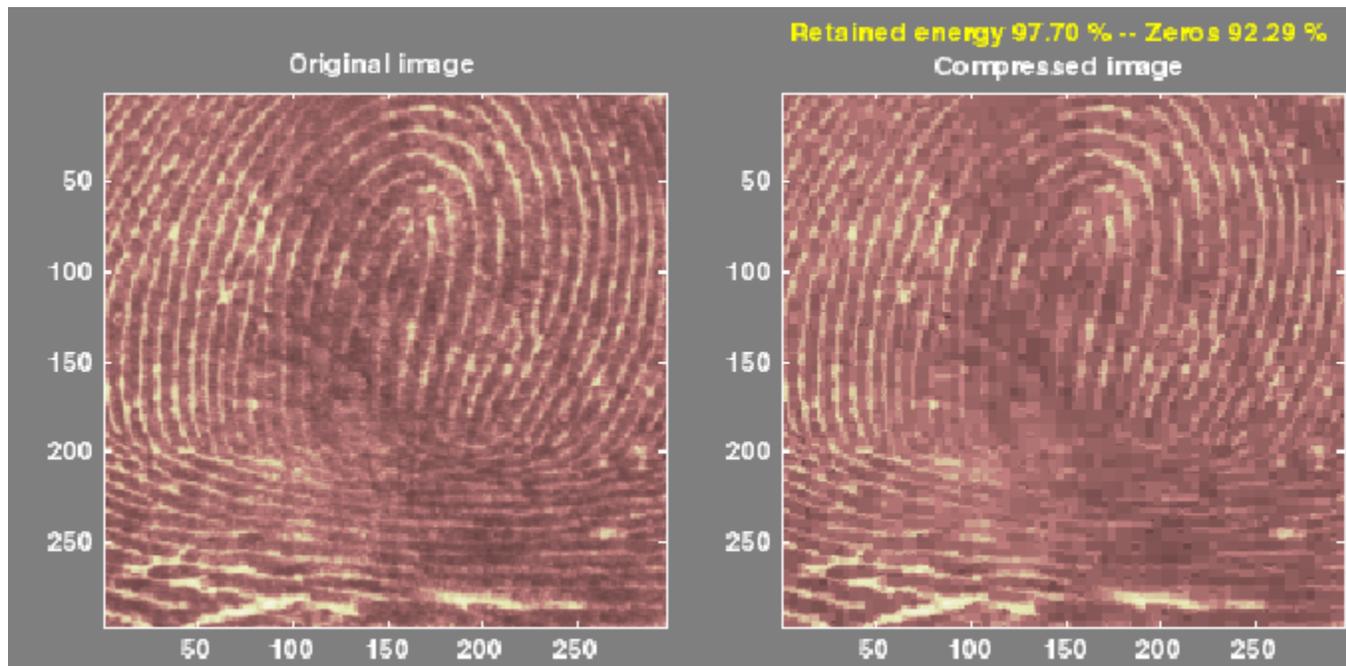
APLICACIÓN DE WAVELETS

• Eliminación de ruido



APLICACIÓN DE WAVELETS

- Compresión de imagen: utilizando un 7% de la señal aproximada se retiene un 97% de la energía original



APLICACIÓN DE WAVELETS

- Proceso de datos geofisicos: The wavelet transform in aeromagnetic processing, Smith & Dentith, Geophysics, 1999, 1003-1013

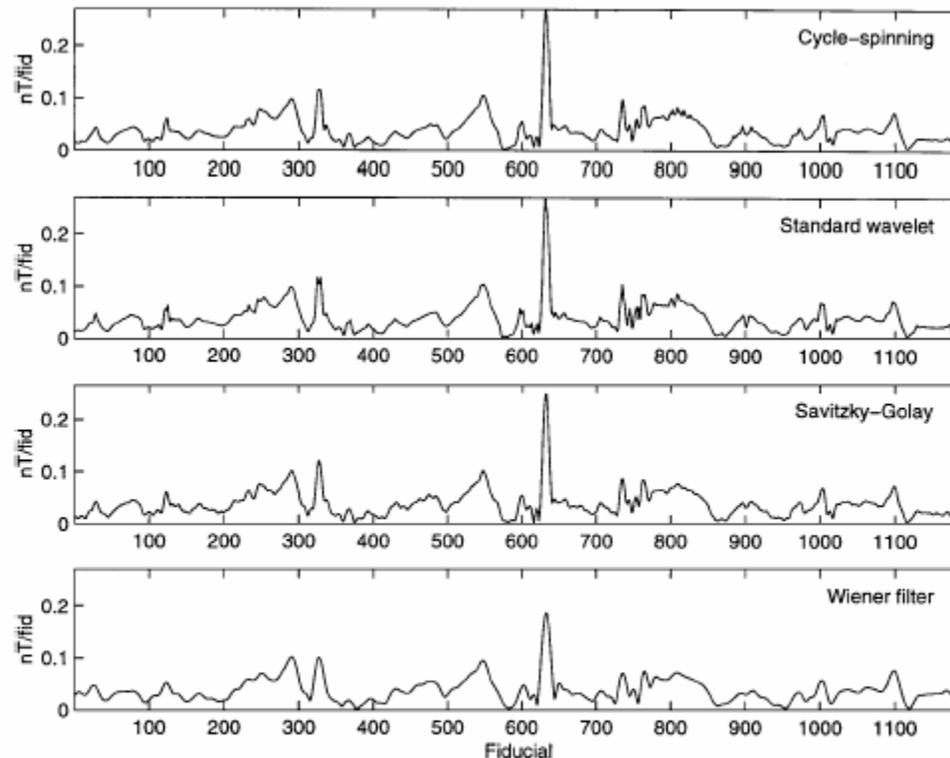


FIG. 6. Amplitude of the first-order analytic signal of the noisy aeromagnetic signal. The plots show the results of four different methods of calculating the denoised response.

APLICACIÓN DE WAVELETS

• **Proceso de datos geofísicos:** Identification of sources of potential fields with the continuous wavelet transform: Complex wavelets and application to aeromagnetic profiles in French Guiana, Sailhac et al., Geophysics, 2001,

En este trabajo se plantea el uso de algunas propiedades de la función de wavelet que permiten determinar los parametros que caracterizan a una dada anomalía simple. El procedimiento expuesto puede ser utilizado para la identificación de anomalías reales del mismo tipo.

Considerando entonces los coeficientes W de la transformada de wavelet ψ , asociados a la función de potencial ϕ_o :

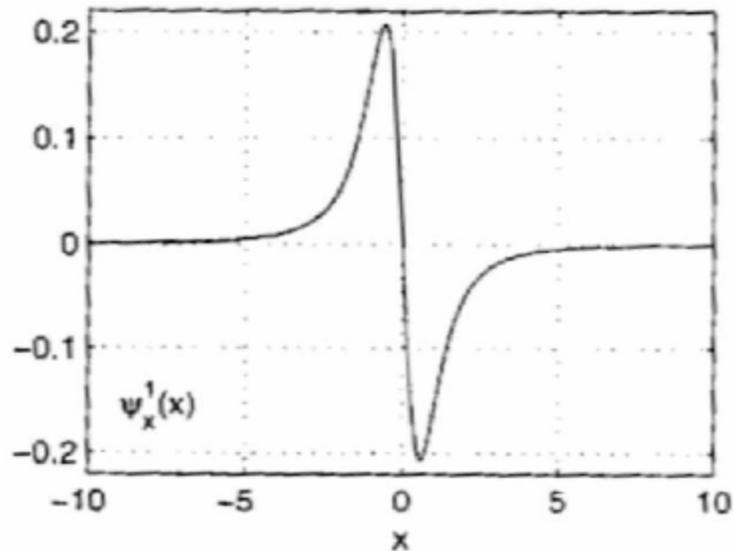
$$W_{\psi|\phi_o} = \int_R \phi_o(x) \frac{1}{a} \psi\left(\frac{b-x}{a}\right) dx$$

APLICACIÓN DE WAVELETS

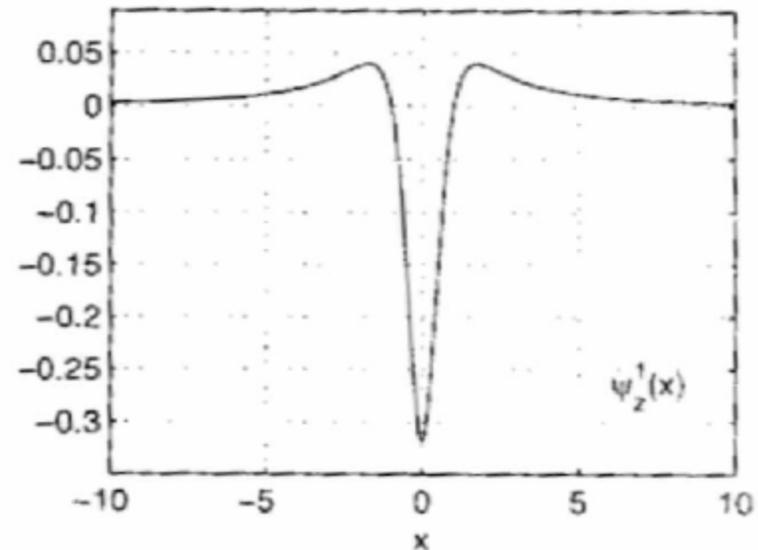
- **Proceso de datos geofísicos:** Identification of sources of potential fields with the continuous wavelet transform: Complex wavelets and application to aeromagnetic profiles in French Guiana, Salliac et al., Geophysics, 2001,

En este caso se utiliza las funciones de wavelet del tipo Poisson para el cual los coeficientes de la transformada de wavelets exhibe propiedades simples:

$$\psi_x^1(x) = \frac{1}{\pi} \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$$



$$\psi_z^1(x) = \frac{1}{\pi} \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$$



APLICACIÓN DE WAVELETS

• **Proceso de datos geofísicos:** Proceso de datos geofísicos: Identification of sources of potential fields with the continuous wavelet transform: Complex wavelets and application to aeromagnetic profiles in French Guiana, Sailhac et al., Geophysics, 2001,

Asumiendo por ejemplo un campo magnético generado por una línea infinita de fuentes magnéticas a una profundidad z_0 y en un ángulo φ con respecto al norte magnético:

$$\Delta T(x) = \left[2 \frac{(x - x_0)^2 - (z - z_0)^2}{\left[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 \right]^2} \cdot \cos(2I') - 4 \frac{(x - x_0) \cdot (z - z_0)}{\left[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 \right]^2} \cdot \sin(2I') \right]$$

$$\tan(I') = \frac{\tan(I)}{\cos(D + \varphi)}$$

I : inclinación; D : declinación; φ : rumbo

APLICACIÓN DE WAVELETS

• **Proceso de datos geofísicos:** Proceso de datos geofísicos: Identification of sources of potential fields with the continuous wavelet transform: Complex wavelets and application to aeromagnetic profiles in French Guiana, Sailhac et al., Geophysics, 2001,

Aplicando la función de wavelet anterior se obtiene la siguiente familia de coeficientes:

$$W_{\psi_c^1|\Delta T}(x, a) = 4 \left(\frac{\sin I}{\sin I'} \right)^2 \cdot a \cdot \exp^{-i2I'} [(x - x_o) + i(a + z_o)]$$

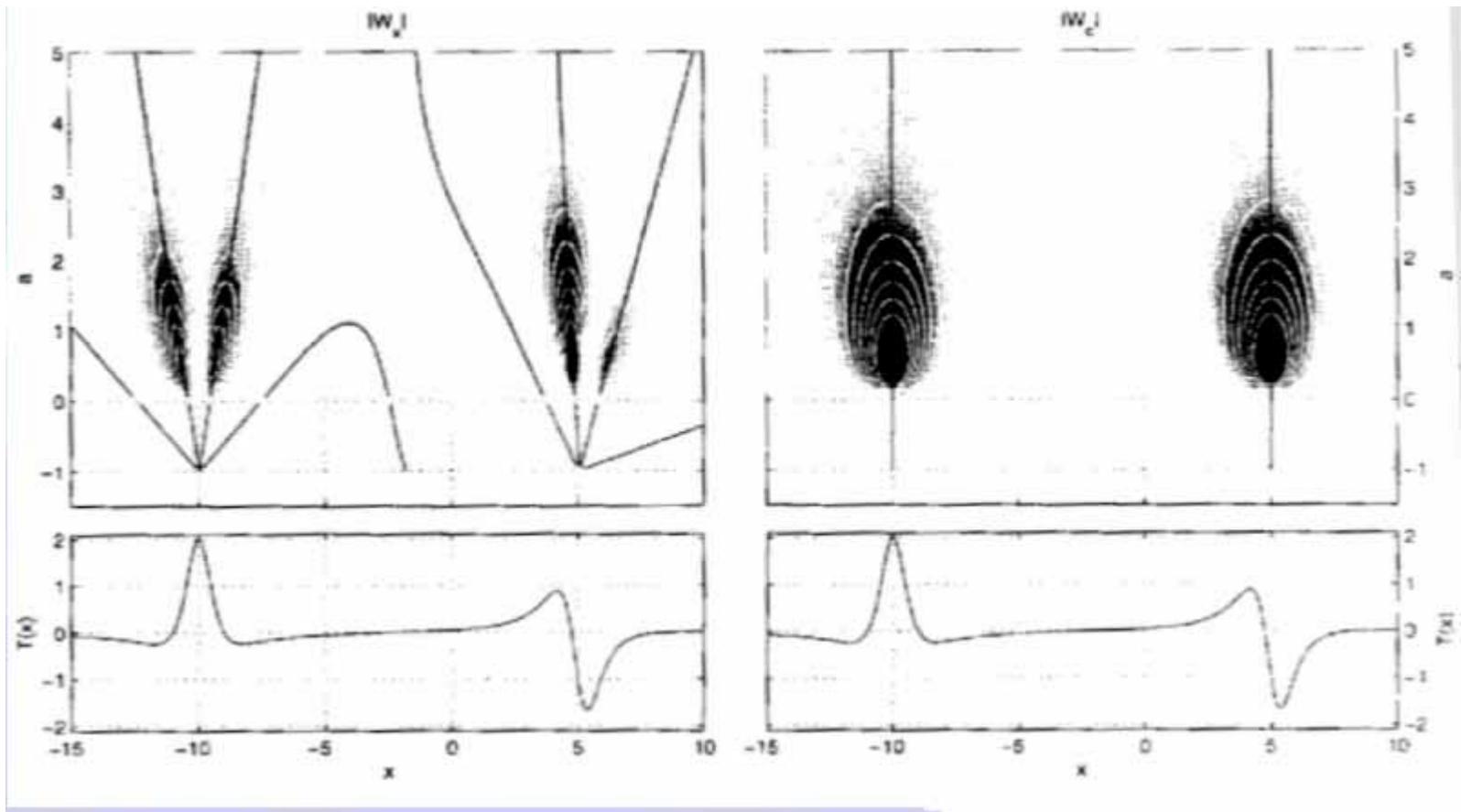
Utilizando las formulas anteriores para dos cuerpos ubicados a una profundidad de $z=1$ con inclinaciones aparentes de $I'=90^\circ$ y $I'=29^\circ$, se obtienen los siguientes funciones de campo magnético y coeficientes de wavelet:

APLICACIÓN DE WAVELETS

- Proceso de datos geofísicos: Proceso de datos geofísicos: Identification of sources of potential fields with the continuous wavelet transform: Complex wavelets and application to aeromagnetic profiles in French Guiana, *Sailhac et al., Geophysics, 2001,*

Coeff.
wavelet

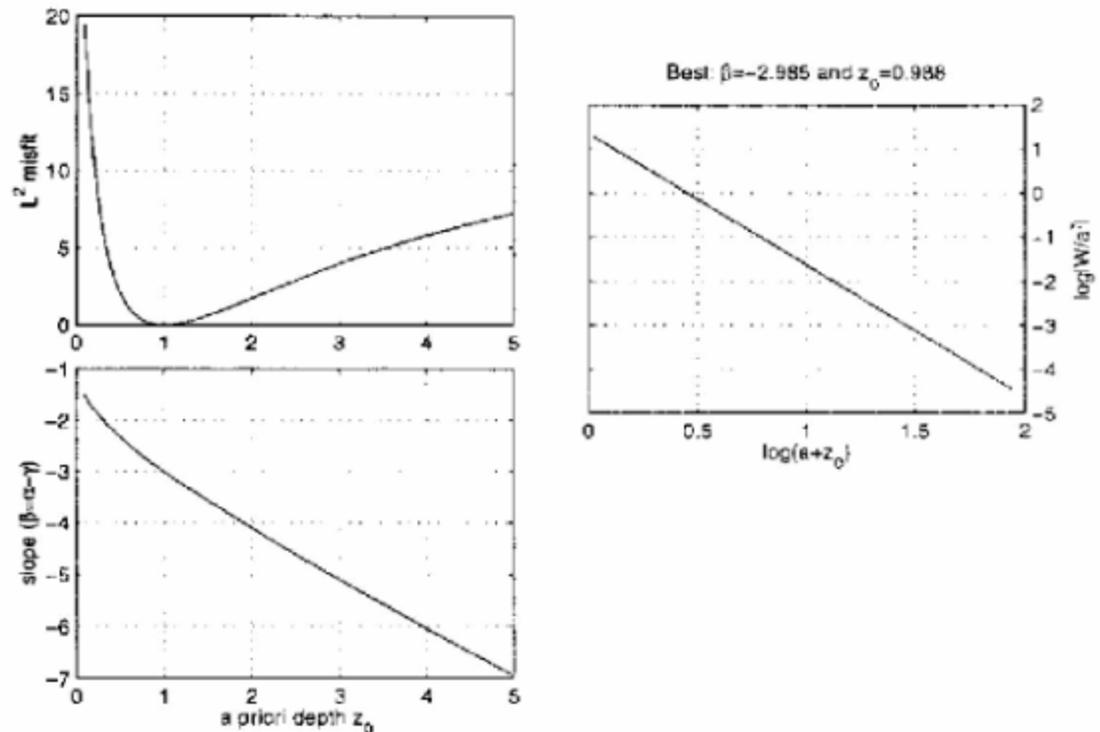
campo



APLICACIÓN DE WAVELETS

- Proceso de datos geofísicos: Proceso de datos geofísicos: Identification of sources of potential fields with the continuous wavelet transform: Complex wavelets and application to aeromagnetic profiles in French Guiana, Sailhac et al., Geophysics, 2001,

En la figura anterior se aprecia que los coeficientes tienden a converger a un valor de $a = -z_0$ para la intersección de las dos funciones de máximo en el dominio $[x, a]$. Esta intersección puede ser calculada numericamente tal cual se aprecia en el diagrama siguiente



APLICACIÓN DE WAVELETS

• **Proceso de datos geofísicos:** Proceso de datos geofísicos: Identification of sources of potential fields with the continuous wavelet transform: Complex wavelets and application to aeromagnetic profiles in French Guiana, Sailhac et al., Geophysics, 2001,

En el trabajo de Sailhac et al., 2001 se presenta una serie de aplicaciones más de la transformada de wavelet asumiendo otras geometrías de cuerpos simples y determinando relaciones geométricas en el dominio $[a, x]$ que permiten recuperar los parámetros asociados al cuerpo en forma directa y sin hacer suposiciones a priori.

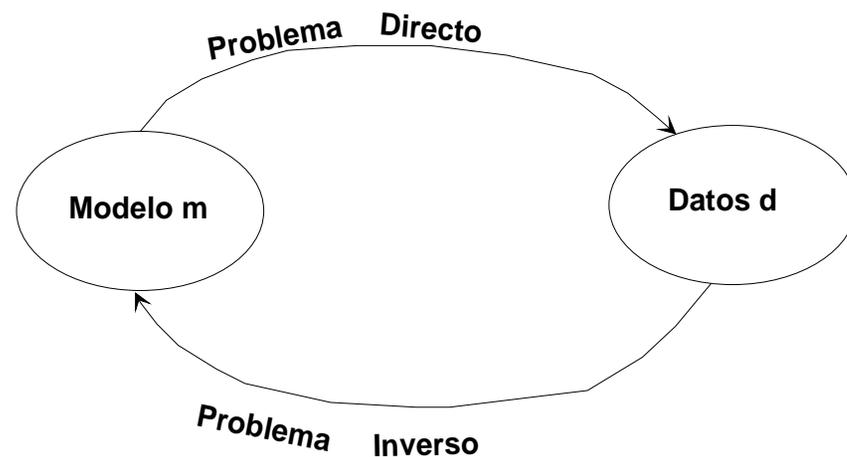
La simplicidad de esta metodología y la capacidad de obtener resultados para distintas posiciones de observación constituyen cualidades muy interesantes para su aplicación masiva en la interpretación de datos de potencial.

**MODULO 7: TEORIA DE INVERSION EN
DATOS DE POTENCIAL**

TEORIA BASICA

La cadena de procedimientos que tiene como resultante el entender un problema geológico a partir de observaciones geofísicas involucra el establecer las propiedades físicas de las rocas involucradas en los datos instrumentales. Para resolver este problema se plantean dos estrategias extremas:

- Modelación directa
- Modelación inversa



TEORIA BASICA

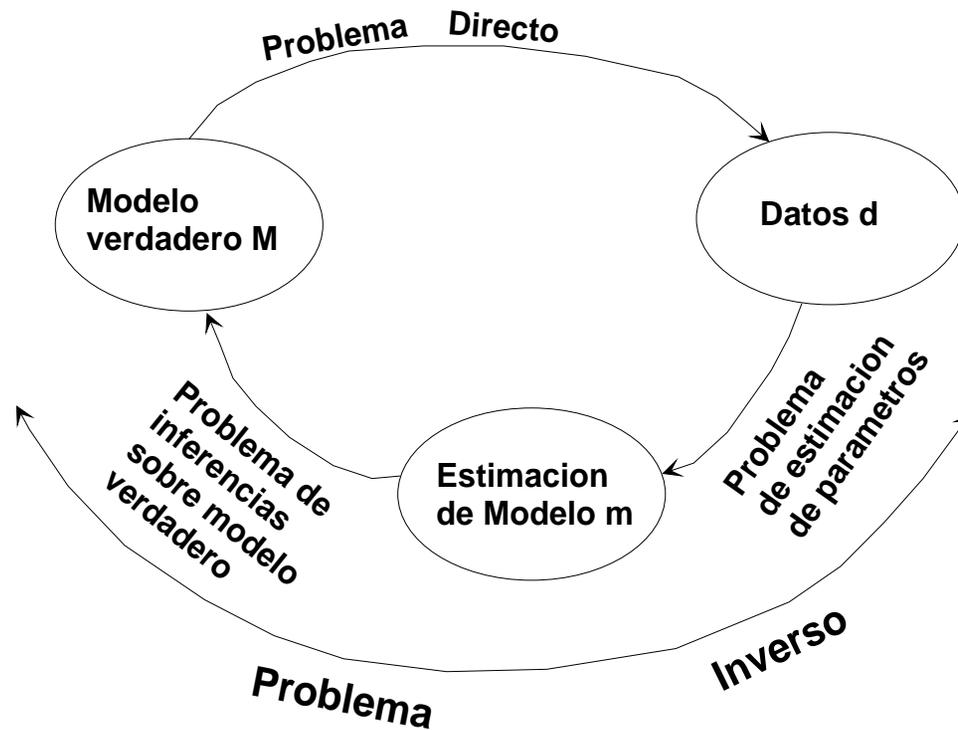
La modelación directa se plantea en general en términos iterativos de prueba y error, en el cual los datos u observaciones se comparan con la respuesta del modelo. Un uso eficiente de esta metodología exige un nivel elevado de experiencia en el tipo de respuesta geofísica del problema geológico específico. En contraposición, la modelación inversa deriva los parámetros directamente de las observaciones.

En algunos casos ideales es posible derivar una teoría exacta en la cual se puedan establecer en forma directa los parámetros del modelo, sin embargo en condiciones reales esta situación tiene una aplicación muy limitada.

TEORIA BASICA

Para problemas concretos el proceso de inversión debe ser desagregado en dos etapas:

- 1) determinación de un modelo estimado
- 2) inferencias sobre el modelo verdadero



TEORIA BASICA

En teoría de inversión el formulismo matemático difiere si la descripción del modelo se fundamenta en parámetros continuos o discretos, y si el modelo es una combinación lineal de los parámetros o bien no lineal. En este seminario efectuaremos una descripción del problema inverso partiendo en primer lugar con el tratamiento del problema discreto lineal y luego las aproximaciones necesarias para el tratamiento de problemas no lineales. En una segunda etapa se presentara el problema de variables de campo continuas, dando una breve reseña sobre su tratamiento y analogía con el problema discreto.

TEORIA BASICA

Elementos de álgebra lineal

En problemas de inversión geofísica el espacio común de operación matemática corresponde al espacio de vectores lineales.

Los vectores (y matrices) son utilizados en este curso para definir las observaciones ($d=[d_1, d_2, \dots, d_N]^T$), y parámetros ($p=[p_1, p_2, \dots, p_M]^T$).

Notación :

- Letras mayúsculas itálicas negritas representan matrices ($A, B, C..$).
- Vectores columna se representan con letras minúsculas itálicas negritas ($x, y, m, d,..$).

TEORIA BASICA

Elementos de álgebra lineal

Se considera conocidas todas las propiedades aditivas, multiplicativas y distributivas de los espacios vectoriales, mas la presencia de elemento neutro en la suma y producto por un escalar en \mathfrak{R}^n (vector de n componentes). Para el caso de matrices se considera el mismo grupo de propiedades pero en el espacio $\mathfrak{R}^{n \times m}$.

Dos matrices tienen la misma dimensión si el número de filas (n) y columnas (m) son los mismos. Una matriz $A_{n \times m}$ representa a una matriz de n filas y m columnas de acuerdo a la siguiente nomenclatura:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,j} \dots & A_{1,m} \\ A_{2,1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ : & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{i,1} & \dots & \dots & A_{i,j} & A_{i,m} \\ A_{n,1} & A_{n,2} & & A_{n,j} & A_{n,m} \end{bmatrix}$$

TEORIA BASICA

Elementos de álgebra lineal

La traspuesta de esta matriz $A_{n \times m}$ es $B_{m \times n} = A_{n \times m}^T$. Es decir los elementos de la matriz a se permutan de la siguiente forma $B_{i,j} = A_{j,i}$. Para efectuar una multiplicación entre dos matrices $C = A * B$ se debe cumplir que el número de filas de la matriz B sea igual al número de columnas de la matriz A, tal que el producto en notación tensorial se escribe como:

$$C_{i,j} = A_{i,k} B_{k,j} = \sum_{k=1}^m A_{i,k} \cdot B_{k,j}$$

(convención de suma sobre índices repetidos)

Si una matriz A es igual a su matriz traspuesta A^T , se dice que se trata de una matriz simétrica. En matrices de números complejos es común el uso de matrices Hermitianas que consisten en el complejo conjugado de la matriz traspuesta.

TEORIA BASICA

Elementos de álgebra lineal

Entre matrices y vectores existe un operador lineal que se denomina producto punto, que permite la multiplicación de cada fila de una matriz $A_{n \times m}$ por un vector x_m :

$$A \cdot x = A_{i,k} x_k = \sum_{k=1}^m A_{i,k} \cdot x_k \quad \text{con } i = 1, n$$

Otras matrices de importancia en la operación matricial son:

•Matriz identidad (en la multiplicación):

cuyo producto con una matriz A es siempre A .

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TEORIA BASICA

Elementos de álgebra lineal

•Matriz diagonal:

$$\text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_n \end{bmatrix}$$

•Matriz ortogonal: $Q^T Q = I$ (veremos mas adelante que el uso de matrices ortogonales no afecta la métrica de una matriz y en consecuencia su aplicación como operador lineal constituye solo una rotación)

TEORIA BASICA

Norma de Vectores y matrices:

La información en nuestro problema de inversión esta contenida en vectores y matrices, en consecuencia se debe establecer un procedimiento para determinar el "tamaño" relativo de cada matriz o vector. En cantidades escalares el problema se reduce a determinar el valor absoluto. En vectores y matrices esta condición de tamaño se generaliza en el concepto de métrica llamado norma $\|\cdot\|$. Una norma dada se establece como tal si cumple la siguiente definición para dos vectores arbitrarios u, v y un escalar arbitrario α :

$$\begin{aligned} \|v\| &> 0, & \forall v \neq 0, & & \|v\| &= 0, & \text{para } v = 0 \\ \|\alpha v\| &= |\alpha| \|v\| \\ \|v + u\| &\leq \|v\| + \|u\| \end{aligned}$$

TEORIA BASICA

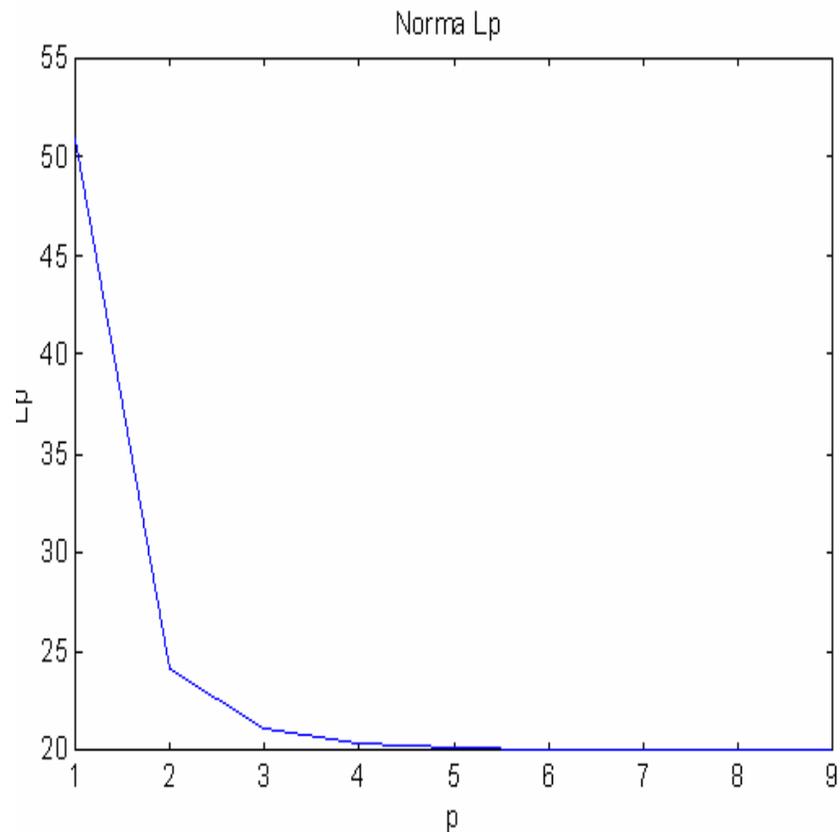
Norma de Vectores y matrices:

El tipo de norma mas utilizado en vectores de \mathfrak{R}^n esta dado por:

$$\|x\| = \left(\sum_1^n |x_i|^p \right)^{1/p}, p > 1$$

Ejemplo

```
% determinación de norma para vector x
% con p=1:9
clear all;
x=[1 2 3 4 20 4 7 1 9];
for i=1:9,
    y(i)=norm(x,i);
end
plot(1:9,y);
xlabel('p');
ylabel('Lp');
title('Norma Lp');
```



TEORIA BASICA

Norma de Vectores y matrices:

Veremos mas adelante que en problemas sobre determinados es común el uso de la norma euclidiana ($p=2$). Para problemas indeterminados (mas incógnitas que ecuaciones) se utiliza una norma con p cercano a 1. La elección de la norma depende fuertemente de la estadística de los datos. Como se ve en el ejemplo anterior, los valores de mayor amplitud (peso o error) son más influyentes en normas de mayor p . En contraposición la norma L1 es menos sensitiva a valores alejados de los valores medios ("outliers"), por tanto se afirma que es una métrica que asegura soluciones mas robustas. En matrices también es posible definir una norma análoga al caso vectorial. En tal sentido es común el uso de la norma de Frobenius:

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{ij}^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\text{traza}(A^T A)}$$

Nota:

$$\text{traza}(M) = \sum_{i=1}^N M_{i,i}$$

TEORIA BASICA

Dependencia e independencia lineal:

Para una familia de vectores $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_m\}$ de igual dimensión, la siguiente combinación lineal:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \dots + \alpha_m x_m = 0$$

indica independencia lineal entre los vectores si esta relación sólo si se cumple:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_m = 0$$

en caso contrario es posible escribir uno o varios vectores como combinación lineal de los restantes vectores, es decir se trata de vectores linealmente dependientes.

TEORIA BASICA

Dependencia e independencia lineal:

Se define el rango (r) de una matriz $A_{n \times m}$, como el número de vectores columna linealmente independientes. Este sub-espacio de r vectores columna independientes es complementario al subespacio nulo que es solución de la siguiente relación:

$$Ax=0,$$

La combinación lineal de vectores cuyo aporte neto al sistema de ecuaciones es nulo. Esta solución es de vital importancia en los problemas de inversión ya que representa una combinación lineal de los parámetros que no puede ser resuelta por el modelo y en consecuencia denota la falta de unicidad en la solución (siempre es posible incorporar el vector solución en el subespacio nulo). El rango del subespacio linealmente independiente es r , y el rango del subespacio nulo es $m-r$.

TEORIA BASICA

Inversión de Matrices:

La inversa a la izquierda (B) de una matriz $A_{n \times m}$ perteneciente al espacio $\mathfrak{R}^{n \times m}$, se define como:

$$B A = I \quad (I: \text{matriz unitaria}),$$

de igual forma se define la matriz inversa a la derecha (C) como:

$$A C = I.$$

Se demuestra que si B y C existen ambas matrices deben ser idénticas. En un sistema de ecuaciones lineales:

$$A x = y$$

El rango r de la matriz es siempre menor o igual que el número de ecuaciones (n), y solo puede llegar a ser igual a n si existen tantas ecuaciones como incógnitas.

TEORIA BASICA

Solución de un sistema de ecuaciones lineales

En la solución de problemas lineales podemos distinguir entonces dos familias extremas:

- **Sobre determinados:** aquellos problemas en los cuales existen mas ecuaciones que incógnitas ($n \geq m$)
- **indeterminados:** aquellos problemas en los cuales existen mas incógnitas que ecuaciones ($m \geq n$)

De esta caracterización extrema se puede llegar a situaciones mixtas en la cual es posible identificar segmentos del problema sobre determinados y otros indeterminados. Un caso típico de problemas mixtos lo constituyen las técnicas tomográficas en las cuales algunos dominios son "iluminados" por varios rayos mientras otros no reciben iluminación alguna.

TEORIA BASICA

A. Problemas sobre determinados: solución de mínimos cuadrados

En problemas del tipo: $G m = d$, la solución del vector m se construye efectuando una minimización de la norma euclidiana E del vector error $e = d - G m$, tal que :

$$E = e^T e = (d - G m)^T (d - G m)$$

$$E = \sum_i^N \left[d_i - \sum_j^M G_{ij} m_j \right] \left[d_i - \sum_k^M G_{ik} m_k \right]$$

La minimización de la norma euclidiana de la discrepancia entre las observaciones y el modelo compromete la minimización independiente de cada parámetro m_q , lo cual entrega un sistema de M ecuaciones del tipo:

$$\frac{\partial E}{\partial m_q} = 0 = 2 \sum_k^M m_k \sum_i^N G_{iq} G_{ik} - 2 \sum_i^N G_{iq} d_i, \quad q = 1, M$$

TEORIA BASICA

A. Problemas sobre determinados: solución de mínimos cuadrados

En problemas del tipo: $G m = d$, la solución del vector m se construye efectuando una minimización de la norma euclidiana E del vector error $e = d - G m$, tal que :

$$E = e^T e = (d - G m)^T (d - G m)$$

$$E = \sum_i^N \left[d_i - \sum_j^M G_{ij} m_j \right] \left[d_i - \sum_k^M G_{ik} m_k \right]$$

La minimización de la norma euclidiana de la discrepancia entre las observaciones y el modelo compromete la minimización independiente de cada parámetro m_q , lo cual entrega un sistema de M ecuaciones del tipo:

$$\frac{\partial E}{\partial m_q} = 0 = 2 \sum_k^M m_k \sum_i^N G_{iq} G_{ik} - 2 \sum_i^N G_{iq} d_i, \quad q = 1, M$$

TEORIA BASICA

A. Problemas sobre determinados: solución de mínimos cuadrados

Matricialmente este sistema de ecuaciones se puede escribir como:

$$G^T G m - G^T d = 0$$

El cual permite determinar una estimación de m (m^{est}):

$$m^{est} = [G^T G]^{-1} G^T d$$

La matriz $G^{-g} = [G^T G]^{-1} G^T$, se denomina la matriz inversa generalizada, tal que el producto $R = G^{-g} G$ se denomina la matriz resolución. Con esta definición se puede escribir la estimación de m como:

$$m^{est} = R m + G^{-g} e = m + [R - I] m + G^{-g} e$$

TEORIA BASICA

A. Problemas sobre determinados: solución de mínimos cuadrados

Matricialmente este sistema de ecuaciones corresponde a:

$$G^T G m - G^T d = 0$$

El cual permite determinar una estimación de m (m^{est}):

$$m^{est} = [G^T G]^{-1} G^T d$$

La matriz $G^{-g} = [G^T G]^{-1} G^T$, se denomina la matriz inversa generalizada, tal que el producto $R = G^{-g} G$ se denomina la **matriz resolución**. En estos términos m se expresa como:

$$m^{est} = R m + G^{-g} e = m + [R - I] m + G^{-g} e$$

Si R es igual a I entonces la resolución del modelo es perfecta (cada parámetro es determinado en forma única). Si R no es una matriz identidad, entonces la estimación del modelo es en la práctica una media móvil de los parámetros reales.

TEORIA BASICA

A. Problemas sobre determinados: solución de mínimos cuadrados

Ejemplo: Ajuste de una recta del tipo: $d_i = m_1 + m_2 z_i, i=1, N,$ en los parámetros m_1 y m_2 . Para esto se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & z_1 \\ 1 & z_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & z_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_N \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G^T G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}; G^T d = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_N \end{bmatrix}$$

Entonces la estimación de mínimos cuadrados de los parámetros que definen la recta se define como:

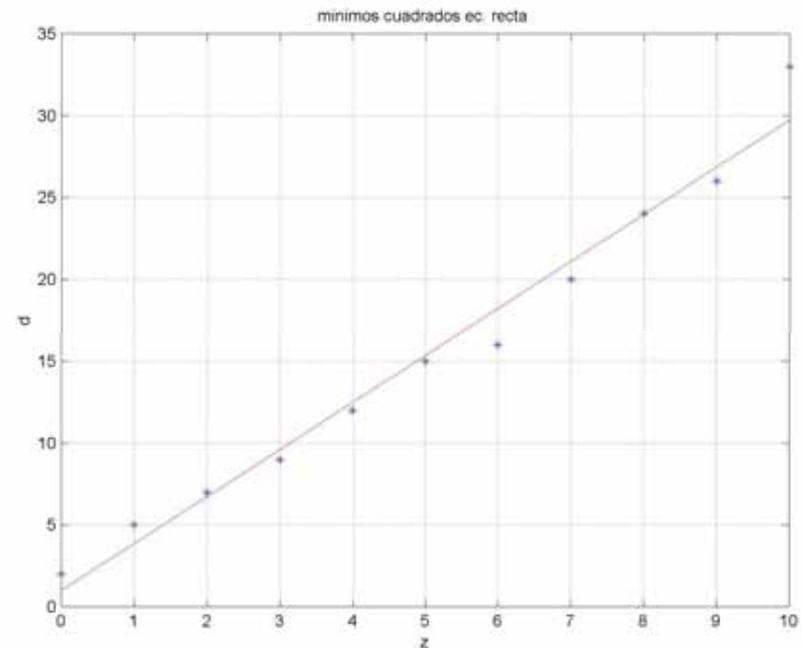
$$m = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^N z_i \\ \sum_{i=1}^N z_i & \sum_{i=1}^N z_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N d_i \\ \sum_{i=1}^N z_i d_i \end{bmatrix}$$

TEORIA BASICA

A. Problemas sobre determinados: solución de mínimos cuadrados

```
% ajuste de minimos cuadrados para  
la ecuación de una recta  
%  $d_i = m_1 + m_2 * z_i$ 
```

```
clear all;  
z=[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10];  
d=[2 5 7 9 12 15 16 20 24 26 33]';  
n=length(z);  
g=[1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1;z]';  
gtg=g'*g;  
gtd=g'*d;  
m=inv(gtg)*gtd;  
d_mod=m(1)+m(2)*z;  
plot(z,d,'*b',z,d_mod,'r');  
xlabel('z');  
ylabel('d');  
title('minimos cuadrados ec. recta ');  
grid on  
print -djpeg -r200 fig1.jpg
```



```
m1 : 1.0000  
m2 : 2.8727
```

TEORIA BASICA

A. Problemas sobre determinados: solución de mínimos cuadrados

Si el sistema de ecuaciones del problema anterior se amplifica por dos en el ultimo punto, matemáticamente el sistema es equivalente:

$$g(11,:) = g(11,:) * 2;$$

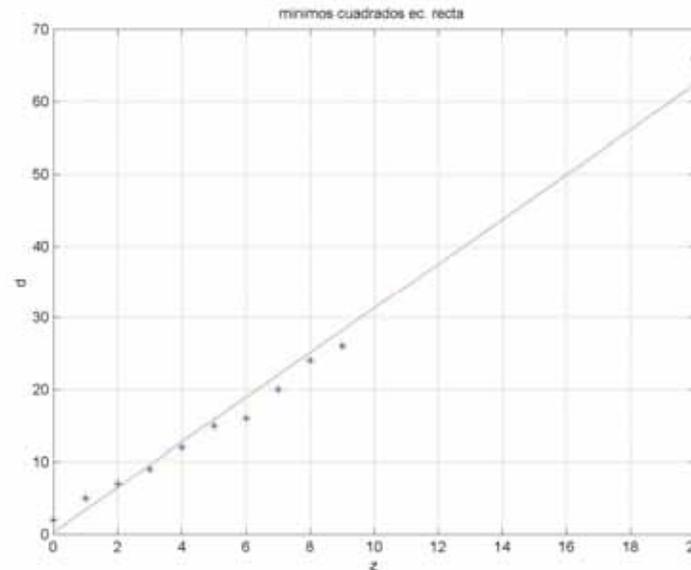
$$d(11) = d(11) * 2;$$

$$z(11) = z(11) * 2;$$

Sin embargo la solución de mínimos cuadrados entrega un resultado diferente:

$$m_1 : 0.3150$$

$$m_2 : 3.1011$$



Variaciones en el sistema de ecuaciones afectan directamente la métrica del problema, produciendo soluciones diversas. La métrica del sistema se preserva si la matriz (Q) de transformación es ortogonal, es decir si la transformación lineal involucra solamente una rotación del sistema coordinado.

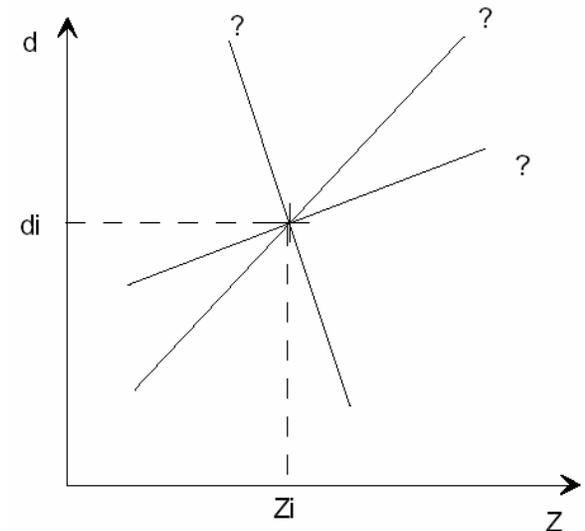
TEORIA BASICA

B. Problemas indeterminados

Como ya ha sido descrito, en problemas indeterminados existen mas incógnitas que ecuaciones ($n < m$). En estas condiciones la inversa generalizada es singular: $\det(G^g) = 0$. En consecuencia no existe una solución única al sistema de ecuaciones, en la práctica existe una familia infinita de potenciales soluciones al sistema de ecuaciones. Bajo estas condiciones es necesario incorporar información externa al sistema de ecuaciones (**información a priori**), que permita acotar la familia de potenciales soluciones.

Un ejemplo simple de problemas indeterminados lo constituye la definición de una recta que pretende ser definida con una sola observación. Existen infinitas soluciones a este problema, de hecho la inversa generalizada del ejemplo anterior involucra la inversión de la matriz cuadrada:

$$\begin{bmatrix} 1 & z_1 \\ z_1 & z_1^2 \end{bmatrix}^{-1}$$



TEORIA BASICA

B. Problemas indeterminados

El determinante de esta matriz es nulo, en consecuencia es una matriz singular. Una forma de incorporar información a priori para acotar la solución de este problema no determinado es imponer que la recta corta el origen. Bajo esta condición el problema se resuelve en forma completa. Existen variadas formas de imponer información a priori, por ejemplo en la inversión gravimétrica se puede imponer la condición física de una densidad acotada en su limite superior e inferior (0 y 3.3 gr/cc). Una forma de incorporar información a priori en términos formales consiste en asumir que la solución del problema inverso es "simple", en donde la noción de simplicidad es cuantificada como una medida de la métrica (euclidiana) de la solución $L = m^T m = \sum m_i$. En ciertas circunstancias se puede imponer que esta norma sea mínima, por ejemplo en problemas que involucren consideraciones de mínima energía o masa mínima. Bajo estas condiciones el problema original de minimizar el error en la relación lineal $e = d - G m$, incorpora además la condición que la norma $L = m^T m$ es mínima.

TEORIA BASICA

B. Problemas indeterminados

Este problema es resuelto directamente utilizando los multiplicadores de Lagrange (ver recuadro), de tal forma que se minimiza la función

$$\Phi(m) = L + \sum_{i=1}^M \lambda_i e_i$$

con respecto a m
(donde λ_i corresponde a los multiplicadores de Lagrange).

La minimización de esta función produce la ecuación:

$$2 m = G^T \lambda,$$

que en combinación con la ecuación matricial:

$$G m = d,$$

permite resolver los multiplicadores de Lagrange, y obtener así una estimación de norma mínima de los parámetros:

$$m^{est} = G^T [G G^T]^{-1} d \text{ (solución de norma mínima)}$$

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

En la minimización de una función de dos variables $E(x,y)$ con la restricción de una determinada función $\Phi(x,y)=0$, se establece que al minimizar la función E , pequeñas variaciones en x e y no alteran el valor de E , es decir:

$$dE = \frac{\partial E}{\partial x} dx + \frac{\partial E}{\partial y} dy = 0$$

Por otra parte el diferencial de la función restricción es igual a cero, demostrando además que las perturbaciones en x e y no son independientes:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = 0$$

La suma pesada de ambas ecuaciones por el factor λ (multiplicador de Lagrange) es en consecuencia idénticamente igual a cero:

$$dE + \lambda d\phi = \left(\frac{\partial E}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial E}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) dy = 0$$

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

En la ecuación anterior si se elige un multiplicador de Lagrange apropiado para que por separado cada término en paréntesis sea igual a cero, entonces se cumple automáticamente que el otro término es también igual a cero. En consecuencia el problema ha sido transformado en un sistema de ecuaciones de tres incógnitas y tres sistemas de ecuaciones:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = 0; \quad \left(\frac{\partial E}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = 0; \quad \phi(x, y) = 0$$

La generalización a un sistema de M incógnitas y q funciones de restricción considera la incorporación de un multiplicador de Lagrange por cada restricción, tal que se obtiene un sistema de $M+q$ ecuaciones con igual número de incógnitas:

$$\frac{\partial E}{\partial m_i} + \sum_{j=1}^q \lambda_j \frac{\partial \phi_j}{\partial m_i} = 0; \quad i = 1, M; \quad \phi_k(m) = 0; \quad k = 1, q$$

TEORIA BASICA

C. Problemas mixtos

En la mayoría de los problemas prácticos que se resuelven en geofísica existen parámetros muy bien determinados y otros pobremente determinados. La forma optima de analizar este problema involucra la descomposición en valores singulares (que se verá a continuación). Si es posible efectuar una partición entre aquellos parámetros que están sobre determinados m^s de aquellos indeterminados m^i , entonces es posible formular el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} G^s & 0 \\ 0 & G^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m^s \\ m^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^s \\ d^i \end{bmatrix}$$

Si esta factorización es factible, entonces se resuelve el sistema sobre determinado mediante técnicas de mínimos cuadrados, y la parte indeterminada mediante la minimización de la norma euclidiana en los parámetros.

TEORIA BASICA

C. Problemas mixtos

Una modalidad alternativa considera la minimización del error E y la norma mínima L en forma simultánea: $\phi(m) = E + \varepsilon L = e^T e + \varepsilon m^T m$, en donde ε determina la importancia relativa del error E y la norma mínima L . Si ε es muy grande entonces la componente indeterminada es resuelta mediante este procedimiento. Lo contrario es válido para $\varepsilon \rightarrow 0$. En consecuencia, la estimación de los parámetros en un problema mixto tiene por solución el sistema de mínimos cuadrados amortiguados:

$$m^{est} = [G^T G + \varepsilon^2 I]^{-1} G^T d$$

Es evidente que el término de amortiguamiento permite estabilizar la inversión de matrices al incorporar una cantidad positiva en la diagonal. Existen variadas estrategias para determinar el factor de amortiguamiento que están directamente condicionadas por el problema bajo análisis.

TEORIA BASICA

Descomposición en Valores singulares

Cuando una matriz A opera sobre un vector x normalmente produce un cambio en la dirección de este, sin embargo si esta matriz A simplemente escala al vector x , entonces se denomina a este vector como un vector propio asociado al valor propio λ , tal que:

$$A x = \lambda x$$

En esta expresión podemos re escribir λx como $\lambda I x$, entonces:

$$(A - \lambda I) x = 0,$$

es decir para un dado valor propio λ existe un vector propio x en el espacio nulo de la matriz $(A - \lambda I)$. Para que esta condición se cumpla, el determinante de $(A - \lambda I)$ debe ser igual cero;

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

TEORIA BASICA

Descomposición en Valores singulares

Para una matriz cuadrada $A_{n \times n}$ esta ecuación implica la determinación de n valores propios (raíces del sistema).

Es posible demostrar (ver recuadro) que una matriz $G_{n \times m}$ puede descomponerse en función del producto de las matrices de

n vectores propios que mapean el espacio de los datos ($U_{n \times n}$) y m vectores propios que mapean el espacio de los parámetros ($V_{m \times m}$),

y la matriz diagonal $\Lambda_{n \times m}$ cuyos términos comprenden la serie de valores propios asociados:

$$G_{n \times m} = U_{n \times n} \Lambda_{n \times m} V_{m \times m}^T$$

Las matrices U y V son matrices ortogonales tales que:

$$U U^T = I_{n \times n}; V V^T = I_{m \times m}$$

TEORIA BASICA

Descomposición en Valores singulares

Es común organizar la descomposición de la matriz **G** en función de valores propios cuya magnitud es decreciente. Bajo este esquema es posible distinguir una familia de **p** valores propios mayores que cero y un conjunto de valores propios iguales a cero:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ tal que } \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_p & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_p^T \\ \vdots \\ v_m^T \end{bmatrix} = U_p \Lambda_p V_p^T$$

TEORIA BASICA

Descomposición en Valores singulares

En esta relación U_p y V_p corresponden a los primeros p vectores de las matrices U y V . Para los restantes vectores propios de los datos U_o y parámetros V_o , la matriz G no contiene información. Podemos asociar las matrices U_o y V_o , a los espacios nulos que no pueden ser resueltos. Es decir solo p vectores propios son en la práctica linealmente independientes. En consecuencia, la identificación de los valores propios distintos de cero permite construir una matriz inversa generalizada de valores propios mayores que cero:

$$G^{-1} = V_{p \times p} \Lambda_{p \times p}^{-1} U_{p \times p}^T$$

Entonces:

$$m_{est} = V_p \Lambda_p^{-1} U_p^T d$$

Al considerar en la inversa generalizada los vectores propios asociados a los valores propios distintos de cero, se esta resolviendo en forma particular el dominio de solución que puede ser determinado.

TEORIA BASICA

Descomposición en Valores singulares

Ejemplo: Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & 2.0000 & 3.0000 \\ 1.0000 & 1.9500 & 4.0000 \\ 1.0000 & 2.0000 & 5.0000 \\ 1.0000 & 2.0000 & 6.0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.0000 \\ 16.0550 \\ 20.0000 \\ 23.0000 \end{bmatrix}$$

La solución de este sistema de ecuaciones está dada por:

$$[m_1 \ m_2 \ m_3]^T = [1 \ 2 \ 3]^T$$

La descomposición en valores y vectores propios del sistema de ecuaciones anterior se formaliza en ambiente MATLAB:

```
clear all
G=[1 2 3;1 1.95 4; 1 2 5;1 2 6];
m=[1 2 3]';
d=G*m;
[U,S,V]=svd(G); n=length(S(1,:));
figure(3)
for i=1:3,
ii=(i-1)*2+1;
subplot(3,2,ii),bar(U(1:length(G(:,1)),i));
xlabel(strcat('valor propio:',num2str(floor(S(i,i)*100)/100)));
ylabel('U')
subplot(3,2,ii+1),bar(V(i,1:n));
xlabel(strcat('valor propio: ',num2str(floor(S(i,i)*100)/100)));
ylabel('V')
end
print -djpeg -r200 fig3.jpg
```

TEORIA BASICA

Descomposición en Valores singulares

En este conjunto de valores propios el valor propio menor es cercano a cero, lo cual esta indicando que el sistema es cuasi-singular. La solución del sistema de ecuaciones considerando los tres valores propios:

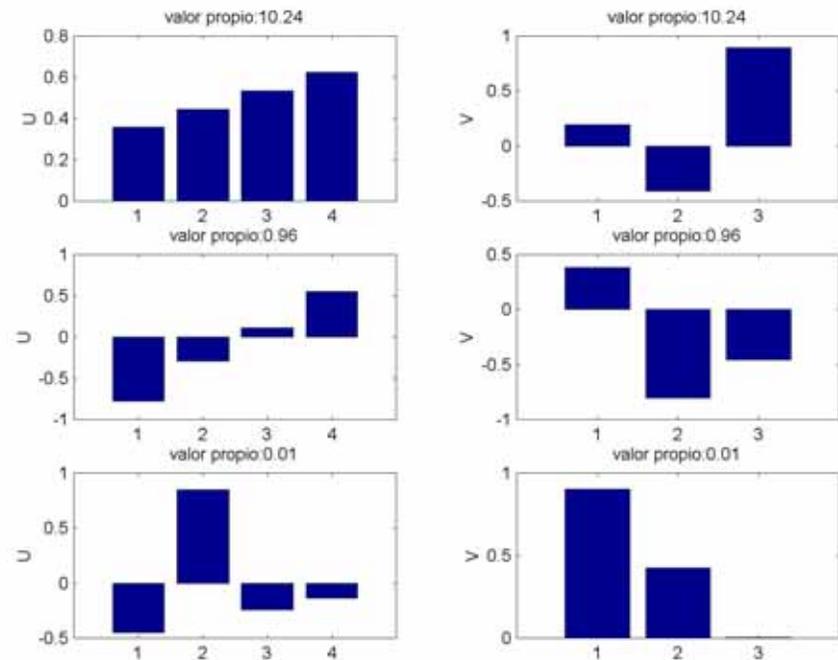
$$m_est_3_0 = V(:,1:3) * inv(S(1:3,1:3)) * U(:,1:3)' * d$$

$$= \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 2.0000 \\ 3.0000 \end{bmatrix}$$

Si solo consideramos los primeros 2 valores propios:

$$m_est_2_0 = V(:,1:2) * inv(S(1:2,1:2)) * U(:,1:2)' * d$$

$$= \begin{bmatrix} 1.0076 \\ 1.9961 \\ 3.0000 \end{bmatrix}$$



TEORIA BASICA

Descomposición en Valores singulares

Esta ultima estimación es una (buena) aproximación de la solución verdadera, que es exacta en la tercera componente y solo aproximada en los dos primeros términos.

Podemos entender este comportamiento al analizar el peso del vector propio de los parámetros asociado al valor propio más cercano a cero (ver en Figura anterior). En este caso el peso relativo de la tercera componente es prácticamente nulo, por consiguiente su valor final esta totalmente determinado por la combinación lineal de los dos primeros vectores propios.

Ahora bien si introducimos un porcentaje de ruido en el segundo término del vector de observaciones (el punto de mayor peso en el vector propio asociado a ese valor propio menor):

$$d(2) = d(2) * 0.95;$$

TEORIA BASICA

Descomposición en Valores singulares

Bajo esta condición la estimación con dos y tres valores propios corresponde a:

$$m_est_2 = V(:,1:2) * inv(S(1:2,1:2)) * U(:,1:2)' * d = \begin{bmatrix} 0.8967 \\ 1.7781 \\ 3.0747 \end{bmatrix}$$

$$m_est_3 = V(:,1:3) * inv(S(1:3,1:3)) * U(:,1:3)' * d = \begin{bmatrix} -32.8000 \\ 18.9000 \\ 3.0000 \end{bmatrix}$$

Se concluye que la solución que restringe la estimación al dominio de los valores propios mayores es más estable que la solución completa, que es altamente sensible a errores en las observaciones. La descomposición en valores y vectores propios permite establecer a priori que observaciones son más determinantes para la estimación de un dado parámetro

DESCOMPOSICION EN VALORES SINGULARES: DERIVACIÓN ALGEBRAICA

Considerando el sistema de ecuaciones: $Gm = d$, se construye la matriz cuadrada S , de $n+m$ filas y columnas:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz tiene $n+m$ valores propios reales y un grupo de $n+m$ vectores propios w_i que cumplen la relación

$S w_i = \lambda_i w_i$, $i=1, n+m$, o bien:

$$S \cdot w = \begin{bmatrix} 0 & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}$$

En esta relación la partición del vector w_i en un vector u_i de largo n (asociado a las observaciones) y un vector v_i de dimensión m (asociado a los parámetros). Este sistema de ecuaciones puede desacoplarse en dos sistemas que ligan los vectores propios asociados al espacio de las observaciones y los parámetros:

$$G^T u_i = \lambda_i v_i$$

$$G v_i = \lambda_i u_i$$

MÓDULO VII.- TEORIA DE INVERSIÓN EN DATOS DE POTENCIAL

DESCOMPOSICION EN VALORES SINGULARES: DERIVACIÓN ALGEBRAICA

Ahora bien, si multiplicamos la primera ecuación por G y la segunda por G^T podemos separar los vectores propios de cada dominio:

$$\begin{aligned} GG^T u_i &= \lambda_i G v_i = \lambda_i \lambda_i u_i = \lambda_i^2 u_i \\ G^T G v_i &= \lambda_i G^T u_i = \lambda_i \lambda_i v_i = \lambda_i^2 v_i \end{aligned}$$

Dado que ambos sistemas de ecuaciones están conformados por matrices cuadradas y simétricas, existen m vectores v_i que conforman una matriz V ortogonal que mapea todo el espacio de los datos \mathfrak{R}^m , y n vectores u_i que conforman una matriz U ortogonal que a su vez mapea todo el espacio de las observaciones \mathfrak{R}^n . Este conjunto de vectores se divide en p vectores que se asocian a valores propios distintos de cero y los restantes vectores propios conforman el espacio nulo que se asocia a valores propios nulos.

Escribiendo la ecuación $Gv_i = \lambda_i u_i$ en términos matriciales para el conjunto de vectores y valores propios: $GV = U\Lambda$ y post-multiplicando por la matriz V^T se

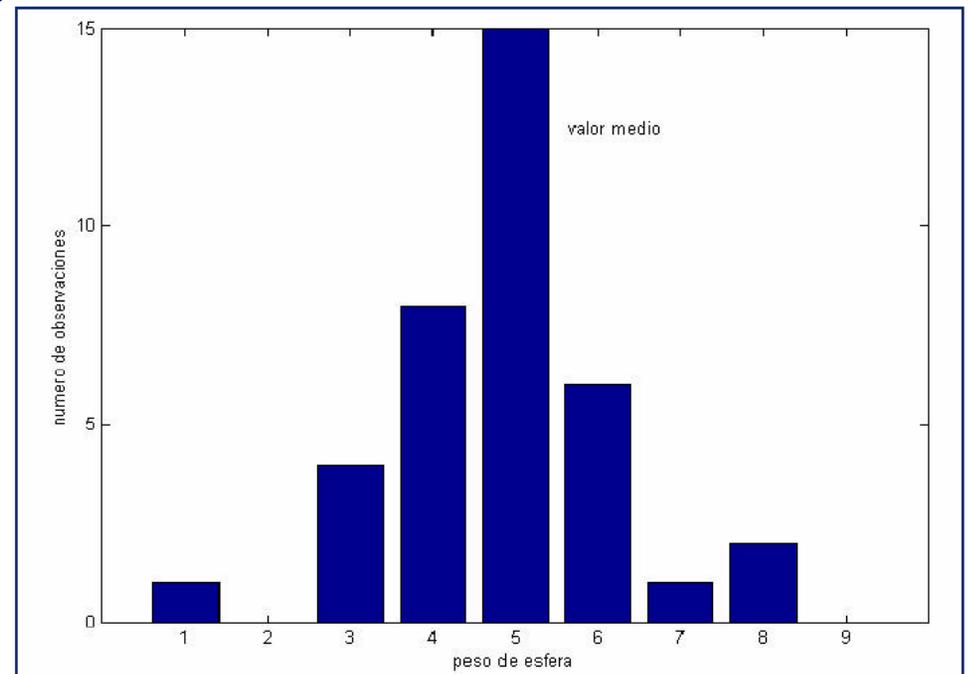
obtiene: $GVV^T = GI = U\Lambda V^T$ o simplemente: $G = U\Lambda V^T$,

que corresponde a la descomposición en valores singulares descrita previamente.

TEORIA BASICA

Elementos de probabilidades y estadística

En la sección anterior representamos las observaciones de un determinado experimento como un vector d cuyos elementos constituyen medidas individuales e independientes. Esta caracterización de un grupo de observaciones es sin embargo una sobre simplificación del trabajo experimental y práctico en geofísica como en cualquier otra disciplina científica en la cual las observaciones están contaminadas por ruido. En consecuencia, si una determinada observación es repetida varias veces cada medida sería diferente (ver en figura). La completa caracterización de la observación requerirá entonces reconocer el rango y forma de esta dispersión, que son en la práctica inherentes al trabajo experimental.



TEORIA BASICA

Elementos de probabilidades y estadística

Para la descripción de las características de la forma y rango en la dispersión de una determinada observación se utiliza el concepto de variable aleatoria. Cada variable aleatoria presenta propiedades definidas y precisas que permiten su caracterización, si bien ellas no pueden ser medidas directamente. En la práctica nosotros solo podemos efectuar medidas individuales o realizaciones de la variable aleatoria, y en base a esta información se infieren las propiedades reales del conjunto de datos.

Las propiedades reales de una variable aleatoria d se especifican completamente a partir de una distribución de probabilidad $P(d)$. Se puede entender la probabilidad como el número de realizaciones iguales de un determinado experimento $N(d)$, normalizado por el número total de realizaciones $N(\Omega)$.

$$P(d) = N(d) / N(\Omega), \text{ entonces } P(\phi) = 0; P(\Omega) = 1$$

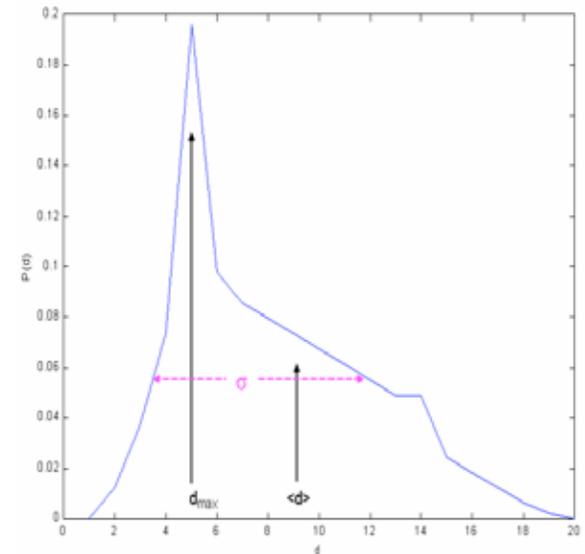
TEORIA BASICA

Elementos de probabilidades y estadística

La probabilidad que una realización del experimento se encuentre en el rango $d + \Delta d$ es $P(d) \Delta d$. Por otra parte la probabilidad que la variable aleatoria se ubique en el rango entre menos y más infinito es claramente absoluta es decir igual al 100% o simplemente 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(d) \Delta d = 1$$

El conocimiento de la función de probabilidad es en general difícil. En la práctica se opta por identificar una serie de parámetros que permitan una mejor caracterización de esta:



•valor de máxima probabilidad : $\max(P(d))$

•valor medio o esperado :

$$E(d) = \langle d \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d \cdot P(d) \Delta d$$

•varianza o ancho cuadrático :

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (d - \langle d \rangle)^2 \cdot P(d) \Delta d$$

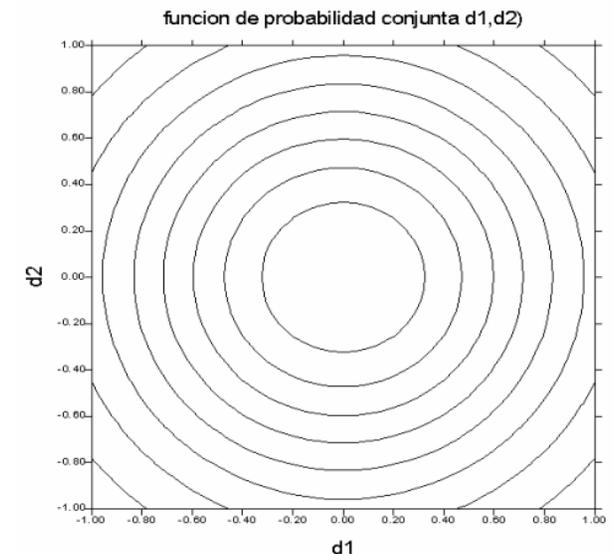
TEORIA BASICA

Elementos de probabilidades y estadística

En problemas geofísicos se mide en general una serie de observaciones, y en consecuencia es necesario cuantificar la probabilidad de un conjunto de variables aleatorias. La probabilidad conjunta es la probabilidad de que el primer datos se encuentre en la vecindad de d_1 , el segundo en la vecindad de d_2 , y así sucesivamente. Si los datos son independientes, es decir si no existe un patrón de ocurrencia común a dos o mas observaciones, entonces la probabilidad conjunta es simplemente el producto de las distribuciones individuales:

$$P(d) = P(d_1) P(d_2) P(d_3) \dots P(d_n)$$

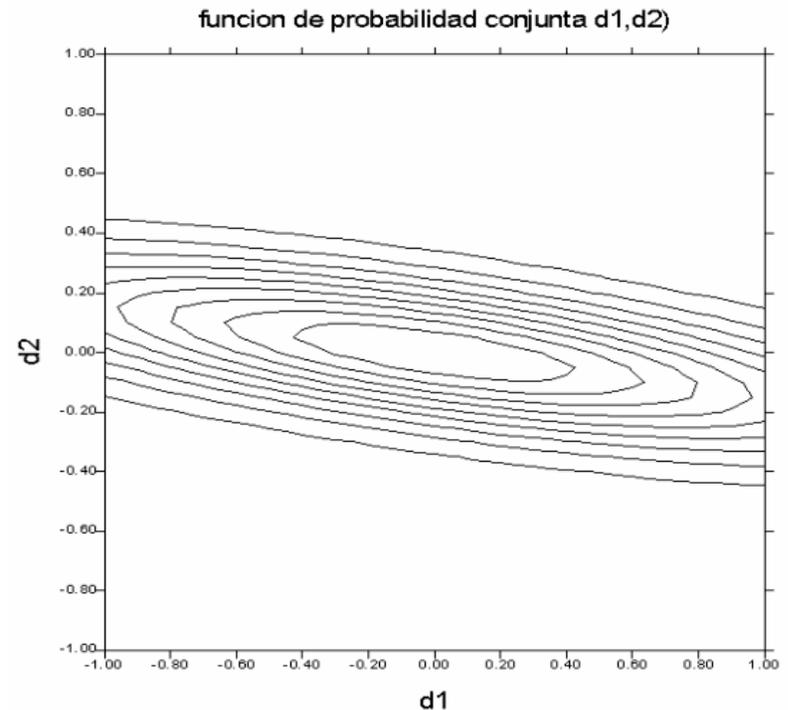
Se puede graficar esta independecia en un diagrama de probabilidad conjunta para dos variables. Se aprecia que no existe una correlación particular entre ambas variables aleatorias .



TEORIA BASICA

Elementos de probabilidades y estadística

En ciertos casos las observaciones estan correlacionadas. En estos casos la función de probabilidad conjunta tiende a privilegiar ciertas combinaciones en los datos. En el ejemplo de la figura, la probabilidad conjunta aumenta ante la presencia de valores altos de la variable d_2 y pequeños de la variable d_1 .



Al igual que en el caso uni-variado, la función de probabilidad multivariada se caracteriza por una serie de parámetros que se definen como:

•valores medios o esperados:

$$\langle d \rangle_i = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta d_1 \int_{-\infty}^{\infty} \Delta d_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d_i P(d) \Delta d_n$$

•matriz de covarianza

$$: [\text{cov } d]_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta d_1 \int_{-\infty}^{\infty} \Delta d_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} [d_i - \langle d \rangle_i] [d_j - \langle d \rangle_j] P(d) \Delta d_n$$

TEORIA BASICA

Elementos de probabilidades y estadística

La diagonal de la matriz de covarianza representa el ancho de la distribución multivariada, Los términos fuera de la diagonal indican el grado de correlación entre pares de elementos.

Si se conoce la estadística de las observaciones y si existe una relación lineal entre las observaciones y los parámetros, entonces es posible expresar los parámetros en función de las observaciones:

$m = M d + v$, donde M y v son matrices y vectores arbitrarios.

En este sistema de ecuaciones la estimación de la media y covarianza de los parámetros es directamente un mapeo del vector medio de las observaciones y la matriz de covarianza:

$$\begin{aligned}\langle m \rangle &= M \langle d \rangle + v; \\ [\text{cov } m] &= M [\text{cov } d] M^T\end{aligned}$$

TEORIA BASICA

Elementos de probabilidades y estadística

Algunas funciones de probabilidad se describen a continuación:

•Distribución Gaussiana (o normal):

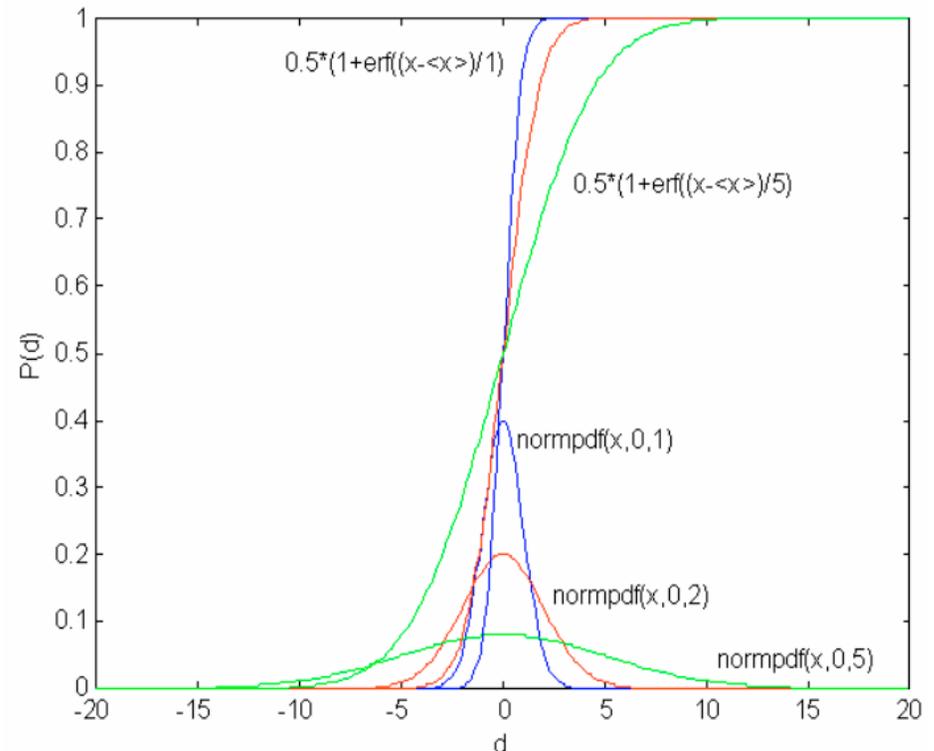
$$P(d) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma} \exp\left[-\frac{(d - \langle d \rangle)^2}{2\sigma^2}\right]$$

, con valor medio $\langle d \rangle$
y varianza σ^2

La correspondiente función de distribución es:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x dx' p(x') = 0.5 + \text{erf}\left[\frac{x - \langle x \rangle}{\sigma}\right]$$

A medida que aumenta la varianza aumenta la amplitud de la distribución Gaussiana y disminuye la función de probabilidad como condición de su integración unitaria. La función de distribución tiende a 1 para valores de d mayores.



TEORIA BASICA

Elementos de probabilidades y estadística

• Distribución de Cauchy:

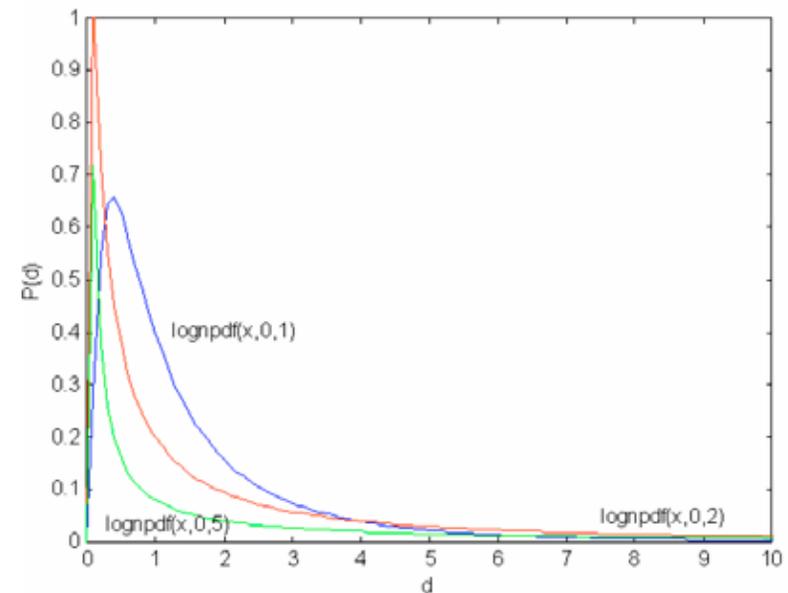
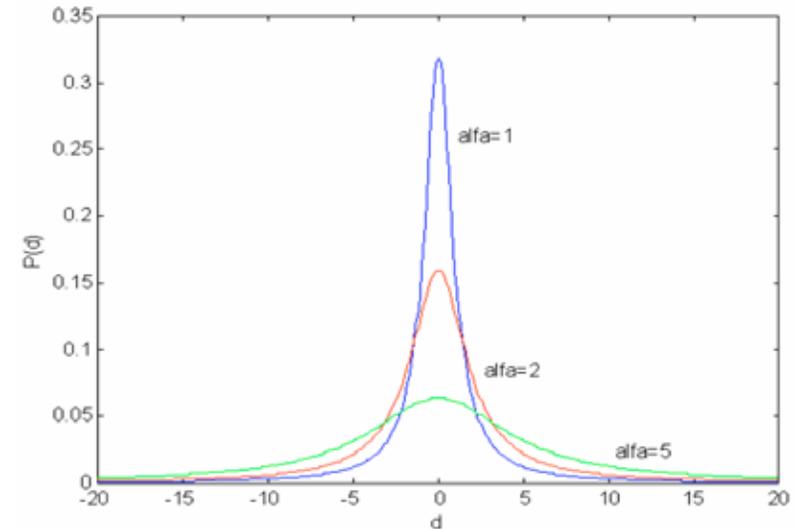
$$p(d) = \frac{\alpha / \pi}{\alpha^2 + d^2}$$

El parámetro α controla el ancho de la distribución.

• Distribución lognormal:

$$P(d) = \frac{1}{2d\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \log\left(\frac{d}{\langle d \rangle}\right)^2\right]$$

La distribución lognormal es asimétrica con respecto al valor medio.



TEORIA BASICA

Elementos de probabilidades y estadística

-Distribuciones condicionales (Regla de Bayes):

El considerar distribuciones condicionales es importante en el análisis de problemas que consideren información a priori, en las cuales por ejemplo se disponga de información que permita inferir en que forma las observaciones van a condicionar los parámetros del medio o en sentido contrario. Asumiendo que A_1 y A_2 corresponden a potenciales realizaciones de un determinado experimento, cuyas respectivas propabilidades son $P\{A_1\}$ y $P\{A_2\}$, en ambos casos esta probabilidad se define como:

$$P\{A_i\} = \frac{\text{suma de probabilidades en eventos de realización } A_i}{\text{suma de probabilidades de todos los eventos en el espacio } A}$$

TEORIA BASICA

Elementos de probabilidades y estadística

-Distribuciones condicionales (Regla de Bayes):

Al mismo tiempo es posible definir la probabilidad conjunta de ambos eventos como:

$P\{A_1, A_2\}$. Adicionalmente se define la probabilidad condicional que habiendo ocurrido A_2 ocurra A_1 : $P\{A_1/A_2\}$. Por otra parte la condición de que ocurra A_1 dado A_2 involucra la probabilidad conjunta $P\{A_1, A_2\}$, y en consecuencia la probabilidad condicional esta definida como:

$$P\{A_1|A_2\} = \frac{P\{A_1, A_2\}}{P\{A_2\}} \quad \text{o bien:} \quad P\{A_1|A_2\}P\{A_2\} = P\{A_1, A_2\}$$

De igual forma se puede construir la probabilidad condicional que ocurra el evento A_2 dado A_1 :

$$P\{A_2|A_1\} = \frac{P\{A_2, A_1\}}{P\{A_1\}} \quad \text{o bien:} \quad P\{A_2|A_1\}P\{A_1\} = P\{A_2, A_1\}$$

TEORIA BASICA

Elementos de probabilidades y estadística

-Distribuciones condicionales (Regla de Bayes):

Ambas probabilidades conjuntas son idénticas de tal forma que se puede establecer una relación entre ambas probabilidades condicionales (regla de Bayes):

$$P\{A_2|A_1\}P\{A_1\} = P\{A_1|A_2\}P\{A_2\} \quad \text{o bien:} \quad P\{A_2|A_1\} = \frac{P\{A_1|A_2\}P\{A_2\}}{P\{A_1\}}$$

En problemas de inversión es común utilizar la regla de Bayes identificando A_1 como el vector de observaciones y y A_2 como el vector x del modelo:

$$P\{x|y\} = \frac{P\{y|x\}P\{x\}}{P\{y\}}$$

TEORIA BASICA

Elementos de probabilidades y estadística

-Distribuciones condicionales (Regla de Bayes):

En esta expresión el término $P\{x/y\}$ se reconoce como la probabilidad del modelo a posteriori (dadas las observaciones). Esta probabilidad condicional involucra probabilidades marginales en observaciones $P\{y\}$ y modelo $P\{x\}$, esta última es una probabilidad a priori que es independiente del modelo. A su vez la probabilidad condicional $P\{y/x\}$ se obtiene una vez que la información del experimento comienza a ser generada considerando la probabilidad conjunta como variable auxiliar. De esta forma es posible obtener información estadística del modelo a posteriori.

TEORIA BASICA

Problemas de inversión en sistemas discretos y continuos

-Inversión mediante el método de Máxima Similitud:

El uso de la probabilidad multivariada permite presentar un esquema de inversión alternativo, que corresponde al método de **máxima similitud** ("maximum likelihood").

Asumiendo un sistema lineal $G \cdot m = d$, en el cual se asume una distribución gaussiana multivariada:

$$P(d) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2} [d - G \cdot m]^T [\text{cov}(d)]^{-1} [d - G \cdot m]\right\}$$

El método de máxima similitud expresa que los parámetros óptimos son aquellos maximizan la probabilidad de obtener los valores observados. En consecuencia la máxima probabilidad $P(d_{\text{obs}})$ ocurre cuando la exponencial es máxima o bien su argumento es mínimo:

$$E = \underbrace{[d - G \cdot m]^T}_{e^T} \underbrace{[\text{cov}(d)]^{-1}}_{W_d} \underbrace{[d - G \cdot m]}_e \equiv \text{minimo}$$

TEORIA BASICA

Problemas de inversión en sistemas discretos y continuos

-Inversión mediante el método de Máxima Similitud:

La matriz W_d corresponde a una matriz de pesos en los datos. En consecuencia la solución de máxima similitud es simplemente la solución de cuadrados mínimos pesados para una norma L2. Si los datos están descorrelacionados y todos presentan igual varianza:

$$P(d) \propto \exp\left\{-\frac{1}{2}[d - G \cdot m]^T [\text{cov}(d)]^{-1} [d - G \cdot m]\right\}$$
$$[\text{cov}(d)] = \sigma_d^2 I \Rightarrow E = \frac{1}{\sigma_d^2} \sum_i e_i^2 = \text{solución mínimos cuadrados}$$

Si la varianza es distinta para cada dato: $E = \sum_i \frac{e_i^2}{\sigma_i^2} =$, el peso del dato de menor varianza es mayor.

El uso de una norma L2 es en consecuencia apropiado para la minimización del error predicho si los datos son descorrelacionados, presentan igual varianza y obedece una estadística gaussiana.

TEORIA BASICA

Problemas de inversión en sistemas discretos y continuos

-Inversión mediante el método de Máxima Similitud:

La solución de mínimos cuadrados pesados esta dada por:

$$m_{est} = [G^T W_e G]^{-1} G^T W_e d$$

Análogamente se puede resolver el problema de peso en los parámetros para la solución de norma mínima:

$$L = [m - \langle m \rangle]^T W_m [m - \langle m \rangle] = \min$$

$$m_{est} = \langle m \rangle + W_m G^T [G^T W_m G]^{-1} [d - G \langle m \rangle]$$

Finalmente la solución amortiguada que compromete a ambos criterios: $\min(E + \varepsilon L)$ corresponde a:

$$m_{est} = \langle m \rangle + [G^T W_e G + W_m]^{-1} G^T W_e [d - G \langle m \rangle]$$

TEORIA BASICA

Problemas de inversión en sistemas discretos y continuos

- Inversión mediante el método de Máxima Similitud:

La matriz de peso en los parámetros W_m puede indicar diversos tipos de la información a priori, por ejemplo "rugosidad" (parámetros discontinuos o con gradientes muy fuertes, por ejemplo un sistema de capas con propiedades eléctricas contrastantes: acuífero-basamento) o suavidad (parámetros que varían lentamente, por ejemplo la compactación de la densidad en una cuenca sedimentaria):

- "suavidad":

$$I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_1 \\ m_1 \\ \dots \\ m_{M-1} \\ m_M \end{bmatrix} = D \cdot m \Rightarrow L = I^T \cdot I = m^T \cdot \underbrace{D^T \cdot D}_{W_m} \cdot m$$

TEORIA BASICA

Problemas de inversión en sistemas discretos y continuos

- Inversión mediante el método de Máxima Similitud:

- "rugosidad":

$$I = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_1 \\ m_1 \\ \dots \\ m_{M-1} \\ m_M \end{bmatrix} = D \cdot m \Rightarrow L = I^T \cdot I = m^T \cdot \underbrace{D^T \cdot D}_{W_m} \cdot m$$

TEORIA BASICA

Problemas de inversión en sistemas discretos y continuos

- Formulación Bayesiana del problema inverso:

De acuerdo a la definición de la probabilidad condicional:

$$P\{x|y\} = \frac{P\{y|x\} \cdot P\{x\}}{P\{y\}}$$

podemos identificar:

x : m parámetros

y : d observaciones

Es decir:

$$P\{m|d\} = \frac{P\{d|m\} \cdot P\{m\}}{P\{d\}}$$

En esta relación $P(m)$ es la probabilidad marginal del vector parámetro independiente de las observaciones, análogamente $P(d)$ es la probabilidad de las observaciones independiente de los parámetros del problema. Podemos entender esta probabilidad como una condición asociada a la metodología de observación y en consecuencia puede considerarse una cantidad constante en relación a los parámetros.

TEORIA BASICA

Problemas de inversión en sistemas discretos y continuos

- Formulación Bayesiana del problema inverso:

En consecuencia la probabilidad de ocurrencia de un determinado vector parámetro dado el set de observaciones (probabilidad a posteriori) es proporcional al producto de la probabilidad de las observaciones condicionadas por los parámetros $P(d | m)$ (función de similitud) y la probabilidad marginal de los parámetros $P(m)$ (distribución a priori):

$$P\{m|d\} \propto P\{d|m\} \cdot P\{m\}$$

La elección de la función de similitud esta dada por la distribución de los errores o ruido en los datos, y requiere en consecuencia un conocimiento a priori de la distribución de errores en los datos.

Asumiendo un modelo del tipo:

$$d = g(m) + n$$

en donde d : observaciones; $g(m)$: operador del modelo directo sobre los parámetros m ; n : error o ruido, o teoría inexacta (ver después).

TEORIA BASICA

Problemas de inversión en sistemas discretos y continuos

- Formulación Bayesiana del problema inverso:

La probabilidad del error corresponde a:

$P(n) = P(d - g(m)) \equiv P(d/m)$: probabilidad condicional de las observaciones d dados los parámetros m

En geofísica se establece usualmente una distinción entre errores en las observaciones (n_o) y teóricos (n_t). Los errores en las observaciones involucran un problema instrumental. A su vez, los errores teóricos explican la existencia de una teoría inexacta.

Para una teoría inexacta, la diferencia entre la teoría exacta ($g_t(m)$) y la teoría inexacta ($g(m)$) corresponde a:

$$n_t = g_t(m) - g(m)$$

En consecuencia:

$$d = g(m) + n = g_t(m) - n_t + n = g_t(m) + n_o$$

TEORIA BASICA

Problemas de inversión en sistemas discretos y continuos

- Formulación Bayesiana del problema inverso:

En la práctica es difícil efectuar una distinción entre ambos errores y en consecuencia se estima que el error considerado es en la práctica una mezcla de efectos instrumentales y una teoría imperfecta. Si los errores en los datos y parámetros presentan a priori una distribución gaussiana, entonces la probabilidad a posteriori en los parámetros, dadas las observaciones, corresponde a:

$$P(m|d) \propto \left[\begin{array}{l} \exp\left\{-\frac{1}{2} [d - G \cdot m]^T [\text{cov}(d)]^{-1} [d - G \cdot m]\right\} \cdot \\ \exp\left\{-\frac{1}{2} [m - m_{\text{priori}}]^T [\text{cov}(m)]^{-1} [m - m_{\text{priori}}]\right\} \end{array} \right]$$

Esta distribución es no-Gaussiana debido al operador del problema directo $g(m)$, que no necesariamente es una función lineal. La maximización de la función de probabilidad a posteriori es equivalente a minimizar el exponente:

$$E = \left\{ -\frac{1}{2} [d - G \cdot m]^T [\text{cov}(d)]^{-1} [d - G \cdot m] \right\} \cdot \left\{ -\frac{1}{2} [m - m_{\text{priori}}]^T [\text{cov}(m)]^{-1} [m - m_{\text{priori}}] \right\} \equiv \min$$

TEORIA BASICA

Problemas de inversión en sistemas discretos y continuos

- Formulación Bayesiana del problema inverso:

Si el operador del problema directo es una función lineal, entonces esta minimización se reduce a la solución de mínimos cuadrados pesados:

$$E = \left[-\frac{1}{2} [d - G \cdot m]^T W_d [d - G \cdot m] \right] + \left[-\frac{1}{2} [m - m_{\text{priori}}]^T W_m [m - m_{\text{priori}}] \right]$$

Es decir la máxima probabilidad de obtener una estimación de los parámetros m , dadas las observaciones d , esta dada por la solución de mínimos cuadrados pesados en el caso de un sistema lineal. O bien expresado en forma inversa la solución de mínimos cuadrados pesados corresponde a una estimación para una distribución gaussiana en las observaciones y parámetros para un operador lineal entre las observaciones y los parámetros.

TEORIA BASICA

Problemas de inversión en sistemas discretos y continuos

- Métodos iterativos de Inversión para problemas cuasi-lineales

La solución del problema inverso: $m = g^{-1}(d)$ para operadores cuasi-lineales se resuelve mediante un desarrollo en serie de Taylor generalizado:

$$d = d_o + G_o (m - m_o) + O(\Delta m^2)$$

donde $G_o =$

$\frac{\partial G_{1,1}}{\partial m_1}$...	$\frac{\partial G_{1,j}}{\partial m_j}$...	$\frac{\partial G_{1,M}}{\partial m_M}$
$\frac{\partial G_{2,1}}{\partial m_1}$	$\frac{\partial G_{2,2}}{\partial m_2}$
...	...	$\frac{\partial G_{i,j}}{\partial m_j}$
...
$\frac{\partial G_{N,1}}{\partial m_1}$...	$\frac{\partial G_{N,j}}{\partial m_j}$...	$\frac{\partial G_{N,M}}{\partial m_M}$

$m = m_o$

TEORIA BASICA

Problemas de inversión en sistemas discretos y continuos

- Métodos iterativos de Inversión para problemas cuasi-lineales

Si m es cercano a m_o esta función de perturbación tiene un error pequeño ($O(\Delta m^2) \cong 0$), entonces:

$$m = m_o + \overbrace{G_o^{-1}}^{\text{inversa generalizada}} [d - d_o] \text{ o } m = m_o + G_o^{-1} [d - g(m_o)]$$

en terminos iterativos :

$$m_{i+1} = m_i + G_i^{-1} [d - g(m_i)]$$

La inversa generalizada se resuelve utilizando las técnicas descritas en capitulo 1, por ejemplo la solución de mínimos cuadrados corresponde a:

$$m_{i+1}^{est} = m_i^{est} + [G_i^T G_i]^{-1} G_i^T [d - g(m_i^{est})]$$

TEORIA BASICA

Problemas de inversión en sistemas discretos y continuos

- Métodos iterativos de Inversión para problemas cuasi-lineales

En mínimos cuadrados amortiguados:

$$m_{i+1}^{est} = m_i^{est} + \left[G_i^T G_i + \frac{\sigma_d^2}{\sigma_m^2} I \right]^{-1} G_i^T [d - g(m_i^{est})]$$

en este caso el factor de amortiguamiento se ha expresado en términos de la razón entre las varianzas en las observaciones y los parámetros.

Para el caso de la solución de norma mínima la estimación de la solución cuasi-lineal corresponde a:

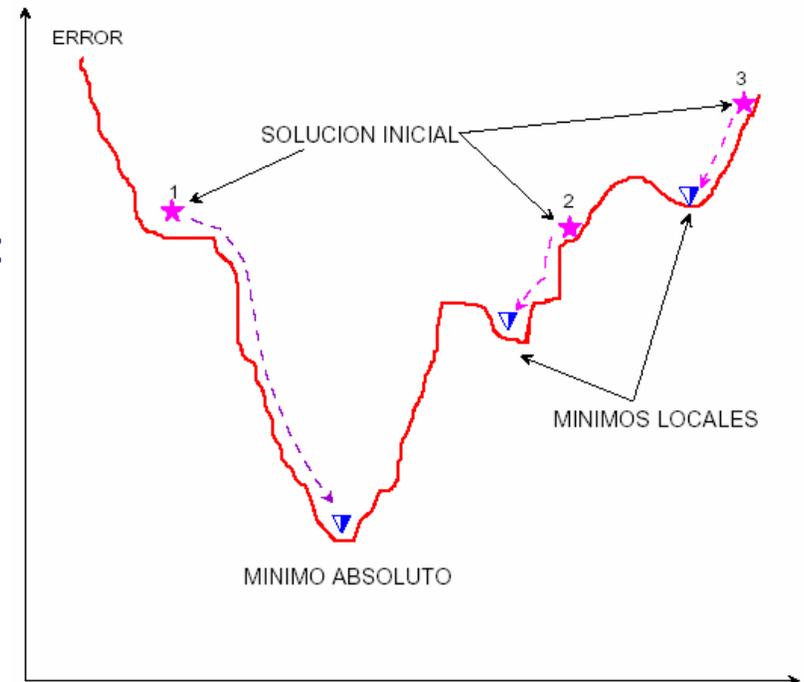
$$m_{i+1}^{est} = m_i^{est} + G_i^T [G_i G_i^T]^{-1} [d - g(m_i^{est})]$$

TEORIA BASICA

Problemas de inversión en sistemas discretos y continuos

- Métodos iterativos de Inversión para problemas cuasi-lineales

Es importante tener en consideración que esta solución iterativa es dependiente de la condición inicial tal cual se aprecia en el siguiente esquema: En este caso el esquema iterativo tiende a mínimos locales al iniciar el proceso iterativo en puntos 2 y 3. Solo al iniciar en 1 es posible acceder al mínimo absoluto. Una forma de acceder al valor mínimo es utilizar una técnica de optimización global como por ejemplo el método de Monte-Carlo en el cual se "mapea" a la función error en un dominio amplio:



$$m_i^{\min} \leq m_i \leq m_i^{\max}$$

$$\text{tal que: } m_i^{\text{nuevo}} = m_i^{\min} + P_n \left[m_i^{\max} - m_i^{\min} \right]$$

(número aleatorio:0-1)

TEORIA BASICA

Problemas de inversión en sistemas discretos y continuos

- Introducción a teoría inversa con modelos continuos

Por simplicidad se restringe este análisis al problema de sistemas lineales. Una teoría de perturbación análoga a la utilizada en el caso de problemas cuasi-lineales es aplicada para el caso de mayor complejidad asociado a funciones no-lineales. En consecuencia:

$$\underbrace{d_i}_{\text{observaciones}} = \int \underbrace{G_i(x)}_{\substack{\text{Kernel } G, \\ \text{equivalente} \\ \text{a matriz } G}} \cdot \underbrace{m(x)}_{\text{parámetros}} dx + \underbrace{e_i}_{\text{errores}}$$

Como el problema directo es lineal, una estimación de los parámetros resulta de una combinación lineal de las observaciones:

$$\tilde{m}(x) = \sum_{i=1}^N a_i(x) d_i$$

TEORIA BASICA

Problemas de inversión en sistemas discretos y continuos

- Introducción a teoría inversa con modelos continuos

Insertando la relación anterior en esta expresión:

$$\tilde{m}(x) = \int \underbrace{\sum_{i=1}^N a_i(x) \cdot G_i(x')}_{R(x,x') \text{ Kernel resolución}} \cdot m(x') dx' + \underbrace{\sum_{i=1}^N a_i(x) \cdot e_i}_{\text{propagación del errores}}$$

En el caso ideal $R(x,x') = \delta(x-x')$, tal que la solución estimada se aproxima a la solución real:

$$\tilde{m}(x) \approx m(x)$$

Un enfoque alternativo es considerar que el parámetro continuo se construye a partir de una función de bases (por ejemplo en el caso de armónicos esféricos):

$$m(x) = \sum_{j=1}^{\infty} m_j \beta_j$$

TEORIA BASICA

Problemas de inversión en sistemas discretos y continuos

- Introducción a teoría inversa con modelos continuos

La ventaja de esta representación es que ahora el factor a invertir es un vector discreto m_j que puede ser truncado para su manejo numérico. Insertando esta base en la solución del problema directo:

$$d_i = \int G_i(x) \sum_{j=1}^N m_j \beta_j(x) \cdot dx + e_i$$

En esta expresión la sumatoria no depende de la integral, en consecuencia:

$$d_i = \sum_{j=1}^N m_j \int G_i(x) \beta_j(x) dx + e_i$$

$$\text{o bien: } d_i = \sum_{j=1}^N m_j A_{i,j} + e_i$$

Esta ecuación puede ser resuelta mediante las técnicas descritas previamente si se conoce la función de bases.

APLICACIONES

Problemas lineales: (a) Estimación de magnetización en modelo de bloques (corteza oceánica):

En este caso particular el campo magnético puede expresarse como una función del tipo:

$$\Delta T_i = \sum_{j=1}^N M_j \Psi_{i,j}$$

En la cual la variable de magnetización M_j es una función lineal del factor geométrico $\psi_{i,j}$ (efecto del bloque j en la posición i):

$$\begin{bmatrix} \Delta T_1 \\ \Delta T_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta T_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{1,1} & \psi_{1,2} & \dots & \dots & \psi_{1,N} \\ \psi_{2,1} & \psi_{2,2} & \dots & \dots & \psi_{2,N} \\ \dots & \dots & \psi_{i,i} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{L,1} & \psi_{L,2} & \dots & \dots & \psi_{L,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_N \end{bmatrix}$$

APLICACIONES

Problemas lineales: (a) Estimación de magnetización en modelo de bloques (p. Ej. corteza oceánica):

Este sistema de ecuaciones se resuelve directamente si $L=N$, invirtiendo la matriz ψ :

$$M = \Psi^{-1} \Delta T$$

Si hay mas observaciones que coeficientes de magnetización ($L>N$), se efectúa una minimización de cuadrados:

$$M = [\Psi^T \Psi]^{-1} \Psi^T \Delta T$$

Aproximando el efecto de un bloque de area $a*b$ por un cilindro de radio R : $R = \sqrt{\frac{a*b}{\pi}}$ el efecto de cada bloque (cilindro), ubicado a una profundidad h es (I es la inclinación magnética):

$$\psi_{i,j} = 2\pi R^2 M_i \left\{ \left[\cos^2 I - \sin^2 I \right] \frac{(x_j - x_i)^2 - h^2}{((x_j - x_i)^2 + h^2)^2} + \left[2 \cos I \sin I \right] \frac{2(x_j - x_i)h}{((x_j - x_i)^2 + h^2)^2} \right\}$$

APLICACIONES

Problemas lineales: (a) Estimación de magnetización en modelo de bloques (p. Ej. corteza oceánica):

En el modelo anterior se ha asumido que el perfil es perpendicular al campo terrestre y que la declinación es nula, al igual que potenciales remanencias. En la figura siguiente se ha modelado esta anomalía para una sección ubicada a 2 km de la superficie, considerando una secuencia de magnetización $\pm 5 \text{ Am}^{-1}$ ($25000[\text{nT}] * 0.02[\text{cgs}]$)

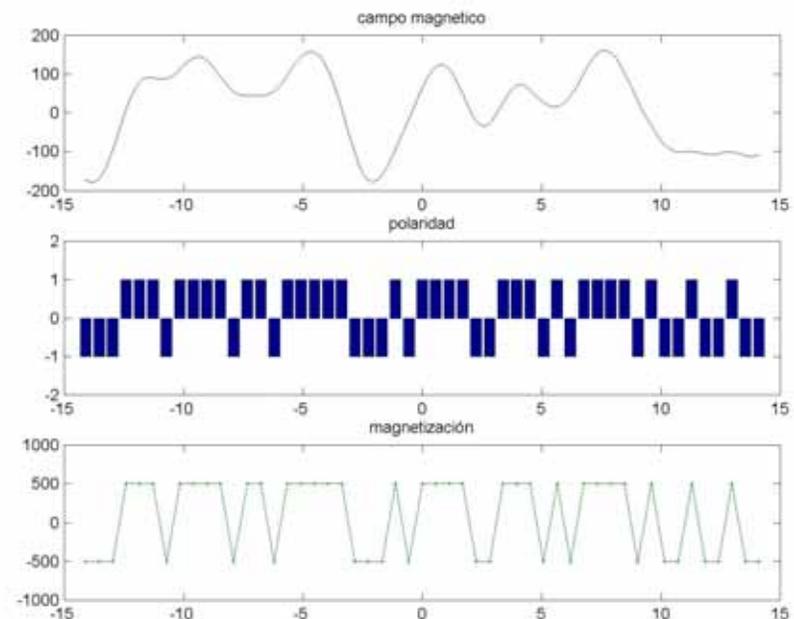
```
clear all
close all
a=500;b=500;R=sqrt((a*b)/pi); xi=-50*R:2*R:50*R;
xj=min(xi):200:max(xi);
I=input('ingrese inclinacion');
h=input('ingrese profundidad [m]');
I=I*pi/180; fact1=cos(I)^2-sin(I)^2; fact2=2*cos(I)*sin(I);

% definicion de dominio observaciones-parametros

[XI,XJ]=meshgrid(xi,xj); R4=((XJ-XI).^2+h*h).^2;
N1=(XJ-XI).^2-h*h; N2=2*(XJ-XI)*h;
func=2*pi*R*R*((fact1*N1./R4)+(fact2*N2./R4));

% definicion de vector de magnetización por función aleatoria
M=sign(random('Normal',0,0.5,length(xi),1))*500;
T=func*M;
figure(1)
subplot(3,1,1),plot(xj/1000,T);
title('campo magnetico'); subplot(3,1,2),bar(xi/1000,M/500); title('polaridad');
axis([-15 15 -2 2])
% inversion de parametros

M_est=inv(func'*func)*func'*T;
subplot(3,1,3),plot(xi/1000,M,xi/1000,M_est,'-');
title('magnetización'); print -djpeg -r200 fig4.jpg
```



APLICACIONES

Problemas lineales: (a) Estimación de magnetización en modelo de bloques (p. Ej. corteza oceánica):

Si introducimos un 1% de ruido aleatorio vemos que la solución se deteriora en forma dramática:

```
% Incorporacion de ruido aleatorio de un 1% en la
señal

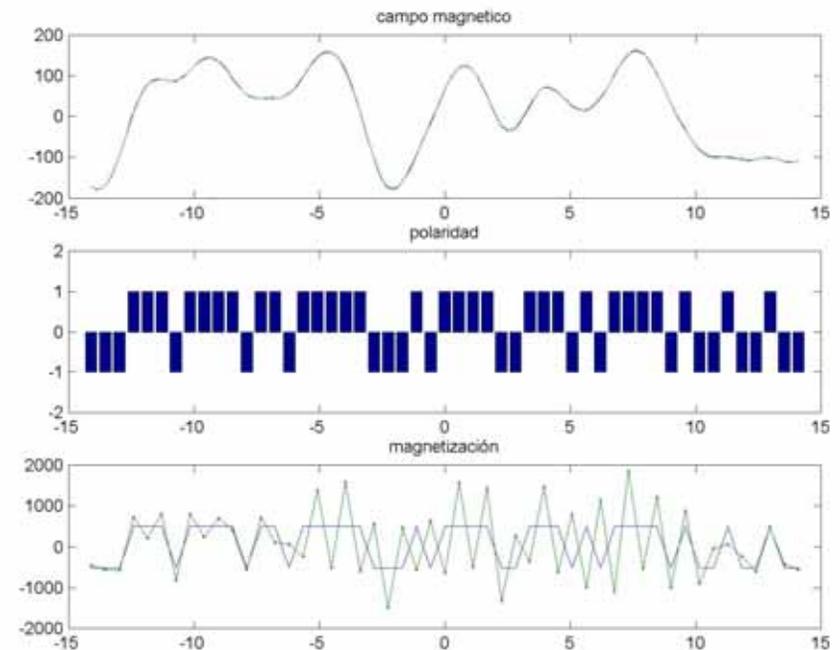
TT=T+(max(T)-
min(T))*0.01*random('Normal',0,0.5,length(xj),1);

figure(2)

subplot(3,1,1),plot(xj/1000,T,xj/1000,TT);
title('campo magnetico');
subplot(3,1,2),bar(xi/1000,M/500);
title('polaridad');
axis([-15 15 -2 2])
% inversion de parametros

M_est=inv(func'*func)*func'*TT;
subplot(3,1,3),plot(xi/1000,M,xi/1000,M_est,'.-');
title('magnetización');

print -djpeg -r200 fig5.jpg
```



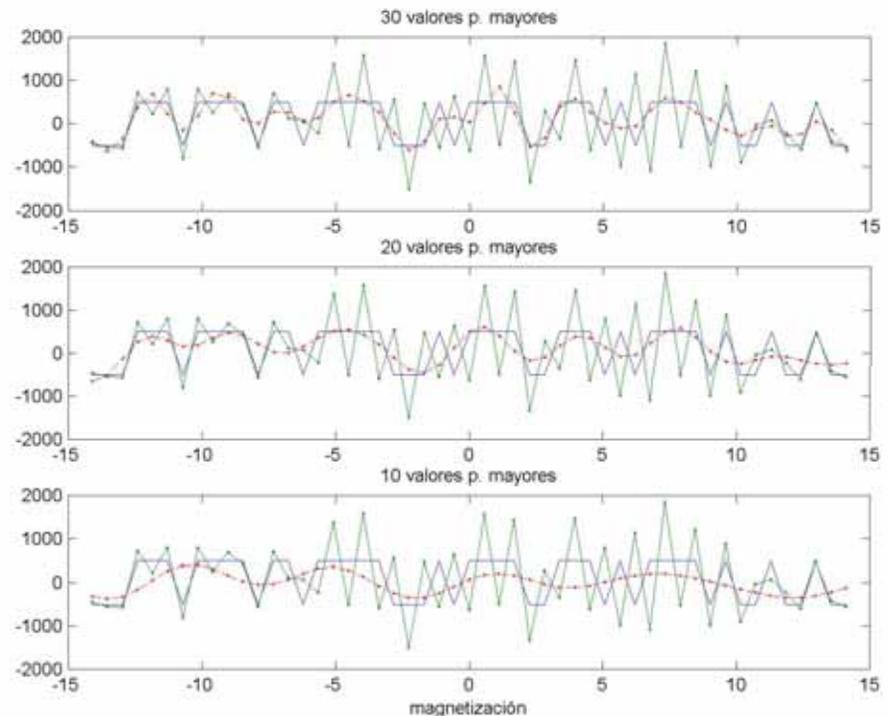
APLICACIONES

Problemas lineales: (a) Estimación de magnetización en modelo de bloques (p. Ej. corteza oceánica):

Una forma de disminuir la inestabilidad en la solución consiste en aplicar la descomposición en valores propios (en rojo en el gráfico): a medida que se toman menos valores propios la inversión es mas estable pero pierde resolución

% descomposicion en valores singulares

```
[U,S,V]=svd(func);  
m_est_1=(V(:,1:30)*inv(S(1:30,1:30))  
)*U(:,1:30)')*TT;  
m_est_1=(V(:,1:20)*inv(S(1:20,1:20))  
)*U(:,1:20)')*TT;  
m_est_1=(V(:,1:10)*inv(S(1:10,1:10))  
)*U(:,1:10)')*TT;
```

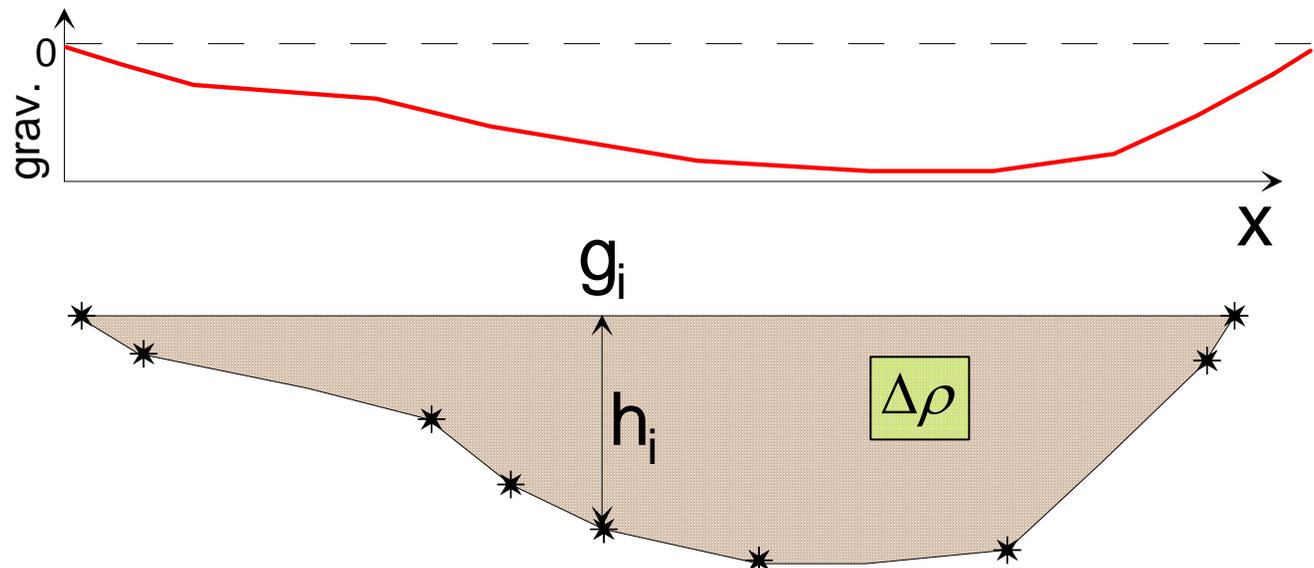


APLICACIONES

Problemas lineales: (b) determinación del espesor en una cuenca sedimentaria mediante observaciones gravimétricas

La gravimetría ha sido utilizada en forma rutinaria para definir la morfología de un basamento cubierto por material sedimentario poco consolidado. La eficacia de la técnica en este caso se basa en el fuerte contraste en densidad entre el basamento (2.7 a 2.9 gr/cc) y el relleno (2-2.4 gr/cc). Una aproximación de primer orden a este problema es asumir que para cada punto la gravedad se aproxima a la formula de una capa plana (válido si la rugosidad del basamento es pequeña):

$$g_i \approx 2\pi G \Delta\rho h_i$$



APLICACIONES

Problemas lineales: (b) determinación del espesor en una cuenca sedimentaria mediante observaciones gravimétricas

El proceso de inversión en este caso es directo y no involucra a los restantes puntos ya que para cada estación gravimétrica se cumpliría que:

$$h_i \approx \frac{g_i}{2\pi G \Delta \rho}$$

rho=0.4

% contraste gr/cc

g = 0.00667;

% constante de gravitacion

fact=2*pi*g*rho

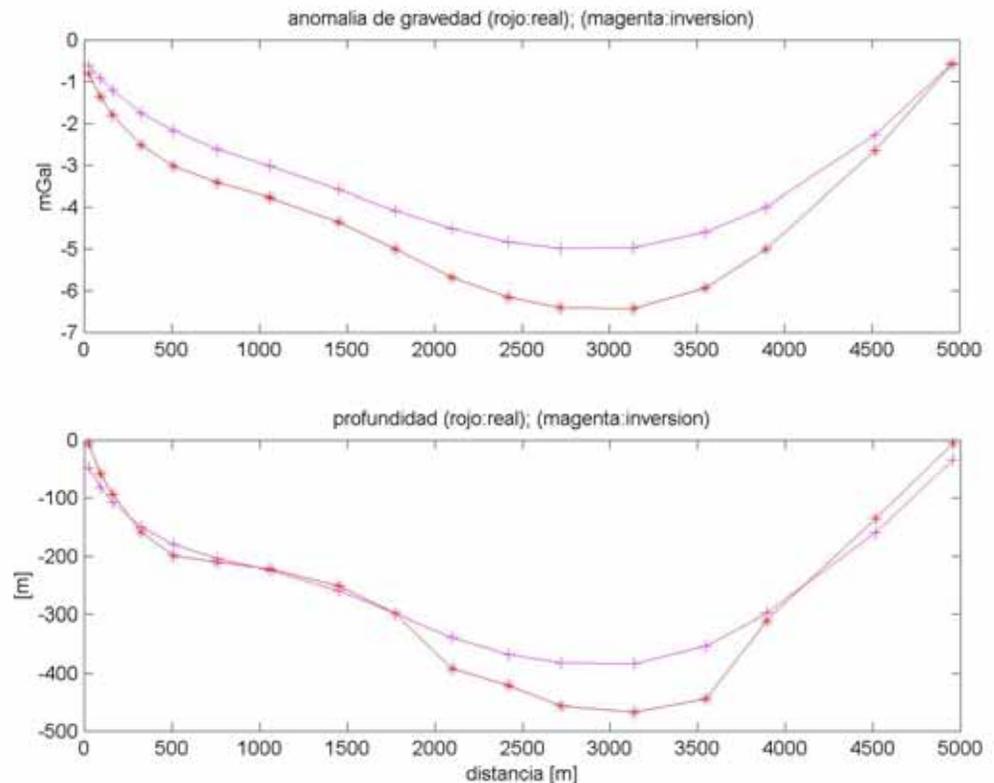
load datos_cuenca.dat;

x=datos_cuenca(:,1);

y=datos_cuenca(:,2);

g=datos_cuenca(:,3);

h=g/fact;



APLICACIONES

Problemas lineales: (b) determinación del espesor en una cuenca sedimentaria mediante observaciones gravimétricas

Observamos en la figura anterior que la solución en la zona que cumple en peor forma el supuesto de una capa plana (el fondo de la cuenca) tiende a subestimar el valor del espesor sedimentario. Una forma de corregir este resultado es introducir un proceso iterativo de ajuste que agregue mayor espesor en función del residuo entre la gravedad observada y la calculada:

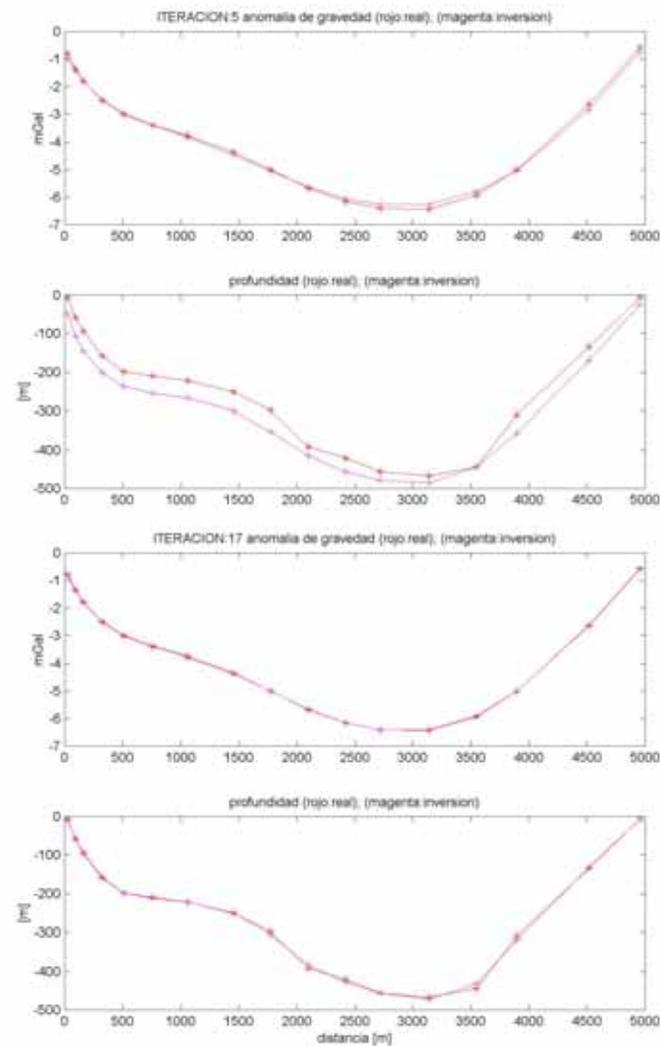
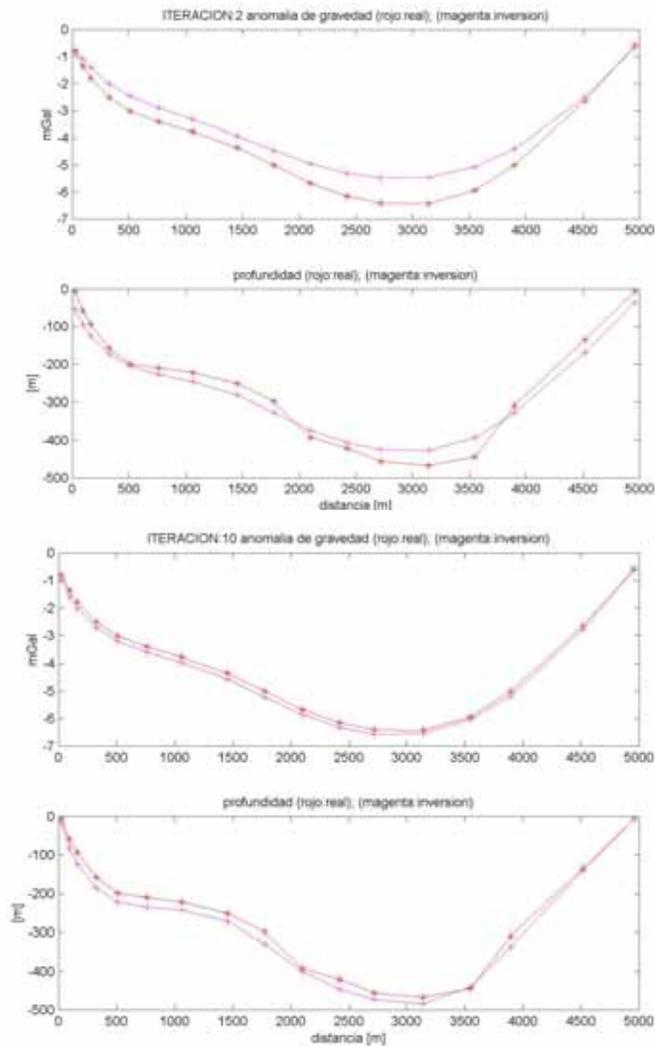
$$h_i^0 \approx \frac{g_i^{obs}}{2\pi G \Delta \rho}$$
$$h_i^k \approx h_i^{k-1} - \frac{[g_i^{obs} - g_i^{k-1}]/2}{2\pi G \Delta \rho}, \quad k = 1, N$$

h_i^k : prof. estación i en iteración k
 g_i^{k-1} : grav. estación i en iteración k

Aplicando este algoritmo se obtiene:

APLICACIONES

Problemas lineales: (b) determinación del espesor en una cuenca sedimentaria mediante observaciones gravimétricas



APLICACIONES

Problemas lineales: (b) determinación del espesor en una cuenca sedimentaria mediante observaciones gravimétricas

Vemos que la solución converge en forma progresiva hasta alcanzar un buen ajuste en las observaciones y la profundidad.

El algoritmo anterior tiene la virtud de compensar la aproximación de una capa plana al calcular su efecto mediante un programa de modelación directa de 2-d (talwani), el cual va incorporando los efectos de cada profundidad en los puntos aledaños.

APLICACIONES

Problemas no-lineales: determinación magnetización, profundidad y ancho de dique magnético vertical

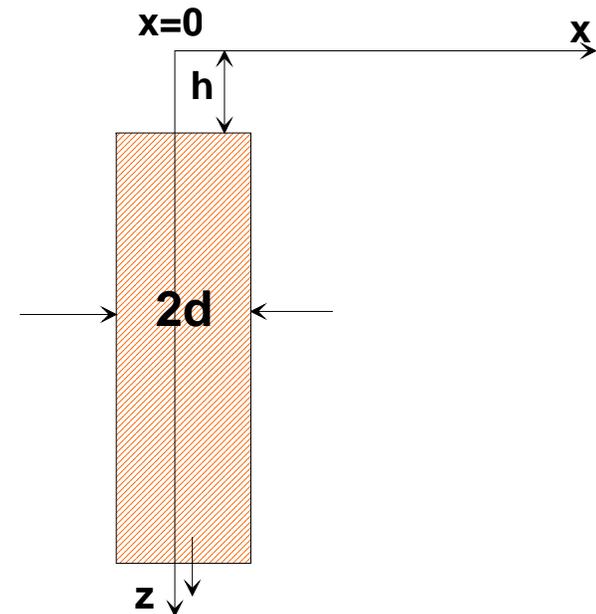
El efecto magnético de un dique vertical de espesor $2d$ y profundidad h , orientado perpendicular al campo magnético esta dado por:

$$\Delta T = 2\kappa F_o \left\{ \begin{array}{l} U_{xx} [\cos^2(i) \cdot \cos^2(d) - \sin^2(i)] + \\ 2 \cdot U_{xz} [\cos(i) \cdot \cos(d) \cdot \sin(i)] \end{array} \right\} = 2\kappa F_o \{ U_{xx} \Omega_{xx} + U_{xz} \Omega_{xz} \}$$

donde:

$$U_{xx}(x) = \arctan \left[\frac{h}{x-d} \right] - \arctan \left[\frac{h}{x+d} \right]$$

$$U_{xz}(x) = \frac{1}{2} \log \frac{(d+x)^2 + h^2}{(-d+x)^2 + h^2}$$



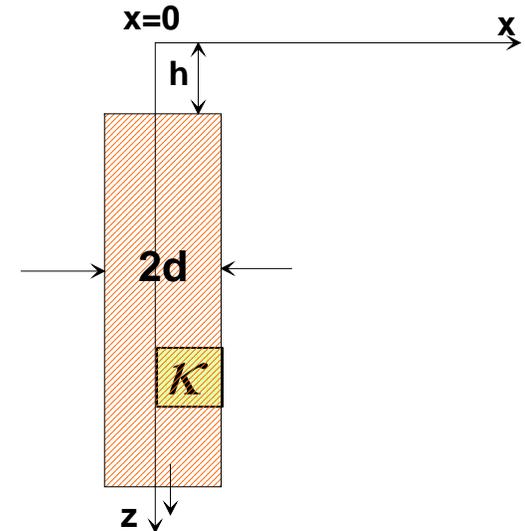
APLICACIONES

Problemas no-lineales: determinación magnetización, profundidad y ancho de dique magnético vertical

Asumiendo conocida la inclinación i , declinación d , e intensidad del campo magnético F_o , entonces los 3 parámetros a determinar son: el espesor d , la profundidad h , y la susceptibilidad magnética k . De estos parámetros solo la susceptibilidad magnética es lineal c/r al campo, y en consecuencia el proceso de inversión exige una linealización de los parámetros utilizando un desarrollo de Taylor:

$$\begin{bmatrix} K_{i+1}^{est} \\ h_{i+1}^{est} \\ d_{i+1}^{est} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_i^{est} \\ h_i^{est} \\ d_i^{est} \end{bmatrix} + [G_i^T G_i]^{-1} G_i^T \left[\Delta T_{obs} - \Delta T \begin{pmatrix} K_i^{est} \\ h_i^{est} \\ d_i^{est} \end{pmatrix} \right]$$

$$\text{donde } G_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta T_1}{\partial \kappa} & \frac{\partial \Delta T_1}{\partial h} & \frac{\partial \Delta T_1}{\partial d} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \Delta T_N}{\partial \kappa} & \frac{\partial \Delta T_N}{\partial h} & \frac{\partial \Delta T_N}{\partial d} \end{bmatrix} \kappa_o, h_o, d_o$$



APLICACIONES

Problemas no-lineales: determinación magnetización, profundidad y ancho de dique magnético vertical

Para resolver este problema es necesario el determinar las derivadas de la matriz G_i , este proceso puede llevarse a cabo en forma numérica (teoría de límite) o en forma analítica si es posible. En este caso se ha optado por utilizar la teoría de límite, de tal forma que las derivadas con respecto a las incógnitas se expresan como:

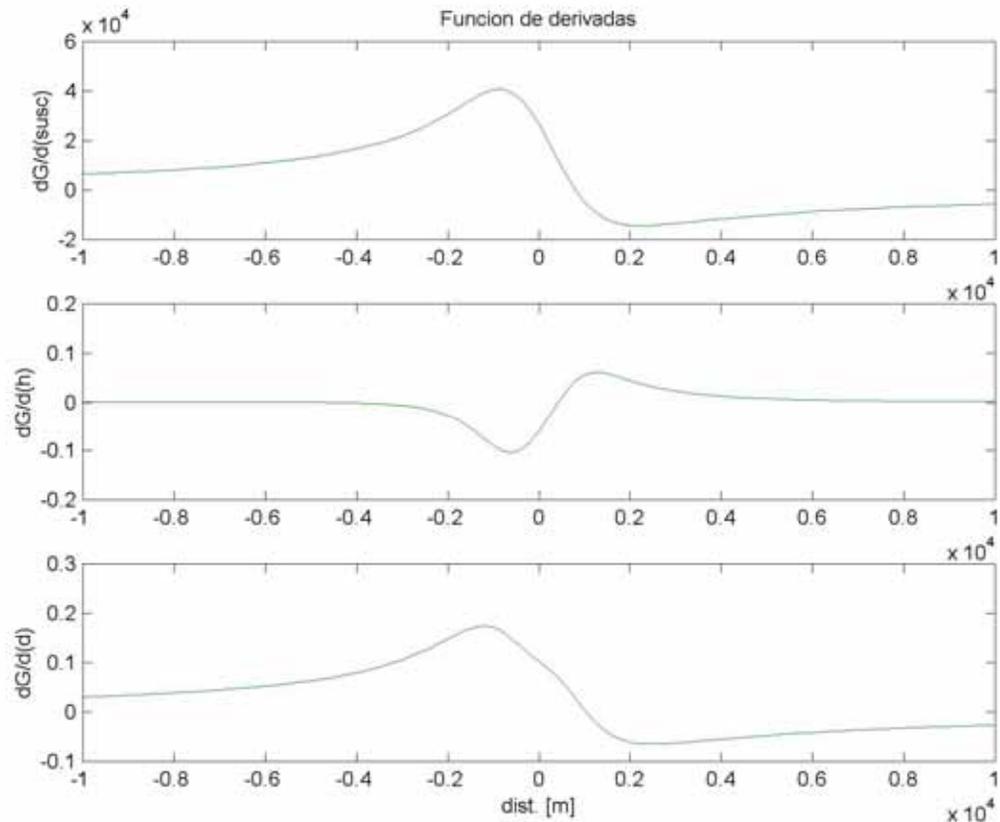
$$\begin{aligned} \frac{\partial G_i}{\partial \kappa} &= \frac{\partial \Delta T_i}{\partial \kappa} \approx \frac{\Delta T_i(x_i, \kappa + \Delta \kappa, h, d) - \Delta T_i(x_i, \kappa, h, d)}{\Delta \kappa} \\ \frac{\partial G_i}{\partial h} &= \frac{\partial \Delta T_i}{\partial h} \approx \frac{\Delta T_i(x_i, \kappa, h + \Delta h, d) - \Delta T_i(x_i, \kappa, h, d)}{\Delta h} \\ \frac{\partial G_i}{\partial d} &= \frac{\partial \Delta T_i}{\partial d} \approx \frac{\Delta T_i(x_i, \kappa, h, d + \Delta d) - \Delta T_i(x_i, \kappa, h, d)}{\Delta d} \end{aligned}$$

APLICACIONES

Problemas no-lineales: determinación magnetización, profundidad y ancho de dique magnético vertical

En el problema planteado estas derivadas corresponden a:

```
function[G]=mat_der(x,h,d,susc,f0,inc,dec);  
[T0]=campo_dique(x,h,d,susc,f0,inc,dec);  
[T_h]=campo_dique(x,h*1.01,d,susc,f0,inc,dec);  
[T_d]=campo_dique(x,h,d*1.01,susc,f0,inc,dec);  
[T_susc]=campo_dique(x,h,d,susc*1.01,f0,inc,dec);  
  
G(:,1)=100*(T_susc'-T0')/susc;  
G(:,2)=100*(T_h'-T0')/h;  
G(:,3)=100*(T_d'-T0')/d;
```

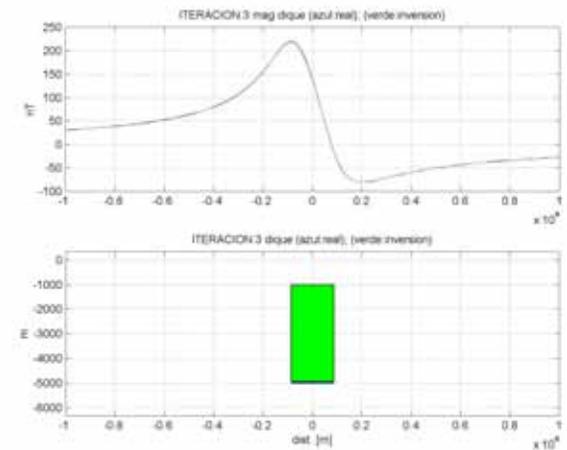
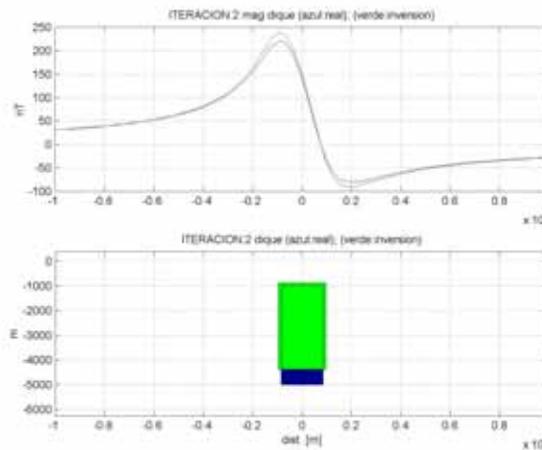
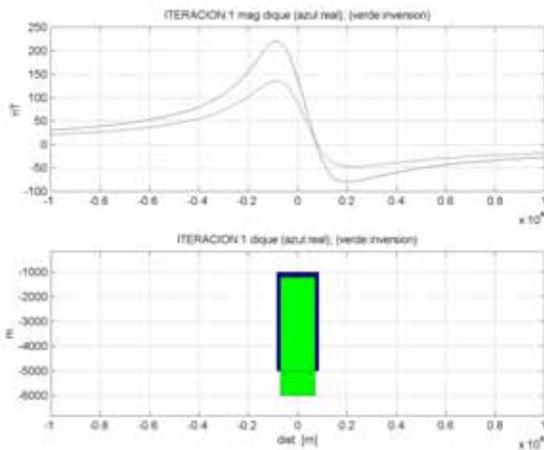


APLICACIONES

Problemas no-lineales: (a) determinación magnetización, profundidad y ancho de dique magnético vertical

En consecuencia la inversión iterativa de los parámetros asociados al dique corresponde a:

```
[T]=campo_dique(x,h,d,susc,f0,inc,dec);  
h1=h*1.2; d1=d/1.2; susc1=susc/1.2;  
for l=1:5,  
[T1]=campo_dique(x,h1,d1,susc1,f0,inc,dec);  
[G1]=mat_der1(x,h1,d1,susc1,f0,inc,dec);  
par=[susc1,h1,d1]'+inv(G1'*G1)*G1'*(T-T1)';  
  
susc1=par(1); h1=par(2); d1=par(3);  
end
```



APLICACIONES

Problemas no-lineales: linealización de problemas sobre determinados: minimización de momento de inercia en gravedad

Un tipo de solución de problemas inversos en secciones 2-D es resolver una distribución de densidades en una malla regular en la cual la geometría queda establecida y solo se desconoce la propiedad física de cada celda:

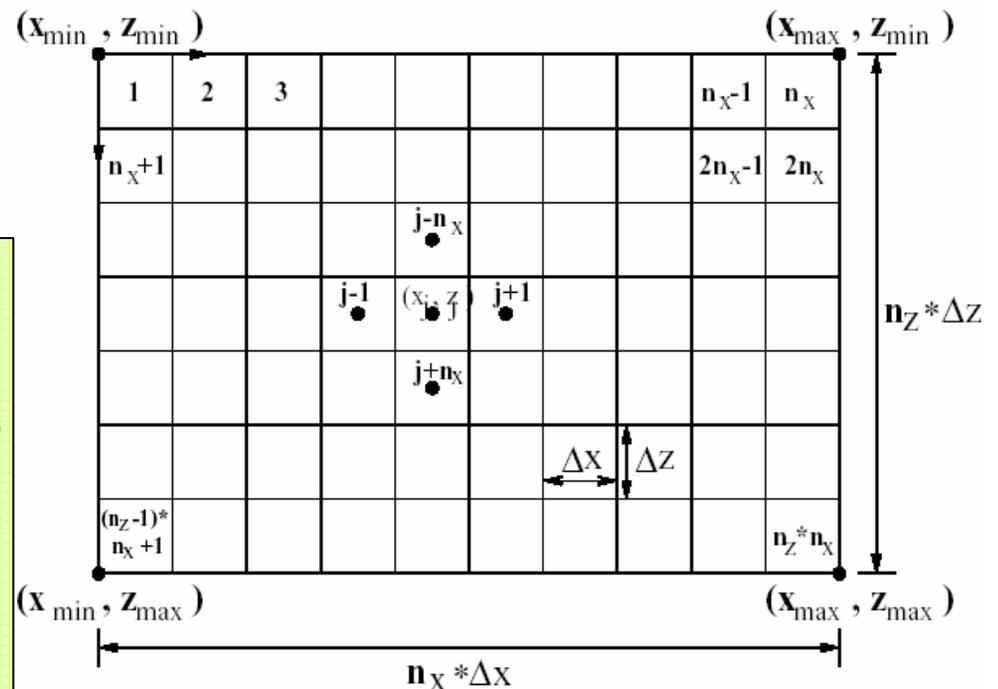
para una discretización por cilindros, la gravedad observada en superficie corresponde a:

$$g = A \cdot p$$

$$A_{i,j} = 2\pi G R_{eq}^2 \frac{\Delta z_{i,j}}{\Delta x_{i,j}^2 + \Delta z_{i,j}^2}; R_{eq}^2 = \frac{dx \cdot dz}{\pi};$$

$$j = 1, nx * nz; i = 1, N : \text{observaciones}$$

$$p_k = \text{densidad}; k = 1, nx * nz$$



APLICACIONES

Problemas no-lineales: linealización de problemas sobre determinados: minimización de momento de inercia en gravedad

Esta solución tiene la ventaja de una geometría fija en donde solo es necesario resolver la propiedad física como una función lineal de una geometría fija.

Sin embargo, para un problema así planteado la solución esta indeterminada porque el número de observaciones en superficie (n_p) va a ser en general inferior al número de incógnitas (las $n_x * n_z$ densidades en la discretización del problema).

El problema tiene solución si incorporamos información a priori sobre alguna característica de la distribución de densidades, como por ejemplo que la solución sea compacta (que minimice el momento de inercia, es decir que la solución entregue cuerpos bien definidos y no dominios de densidad con varios cuerpos pequeños distribuidos en forma homogénea en el espacio).

APLICACIONES

Problemas no-lineales: linealización de problemas sobre
determinados: minimización de momento de inercia en gravedad

Formalmente esta información a priori se establece mediante la técnica de multiplicadores de lagrange indeterminados en donde se minimiza el funcional:

$$S(p, g) = \|Ap - g\| + \lambda(\delta)H(p)$$

$\| \cdot \|$: norma euclidiana

δ : metrica asociada a la perturbacion de las observaciones

$\lambda(\delta)$: función determinada de: $\|Ap - g\| = \delta$

$H(p)$: información a priori

Esta ecuación es equivalente a resolver:

$$\min(H(p)) \equiv (p - p^o)^T \cdot W_p \cdot (p - p^o)$$

$$\text{sujeto a: } \|Ap - g\| \equiv (g - A \cdot p)^T W_e (g - A \cdot p)$$

APLICACIONES

Problemas no-lineales: linealización de problemas sobre determinados: minimización de momento de inercia en gravedad

En estas ecuaciones W_p y W_e son matrices diagonales definidas y positivas asociadas a los parámetros y datos respectivamente, p_0 es una solución inicial al problema. Estas ecuaciones indican que se está resolviendo una minimización de la condición a priori pero sujeta a que los parámetros expliquen dentro de un nivel de incertidumbre δ las observaciones g . Minimizando el funcional $S(p, g)$ c/r a los parámetros:

$$\frac{\partial S(p, g)}{\partial p} = 0 \Rightarrow$$
$$p^* = p^o + W_p \cdot A^T \left\{ A \cdot W_p^{-1} \cdot A^T + \lambda(\delta) \cdot W_e^{-1} \right\}^{-1} (g - A \cdot p^o)$$

APLICACIONES

Problemas no-lineales: linealización de problemas sobre
determinados: minimización de momento de inercia en gravedad

La información a priori que condiciona la matriz diagonal W_p se determina imponiendo una condición de mínimo momento c/r a un eje de referencia. El momento de inercia de todas las celdas se expresa como:

$$I = \sum_{j=1}^M p_j v_j (\gamma_j^2 + d_j^2);$$

d_j = distancia al eje de la celda j ;

γ_j = *área* de la celda j ;

γ_j = coeficiente que depende de la geometría;

Considerando esta expresión la función de normalización $H(p)$ se define como:

$$H(p) = \sum_{j=1}^M w_{p,j} p_j^2; \text{ donde : } w_{p,j} = \frac{v_j (\gamma_j^2 + d_j^2)}{|p_j| + \varepsilon}$$

APLICACIONES

Problemas no-lineales: linealización de problemas sobre determinados: minimización de momento de inercia en gravedad

Como la densidad debe ser siempre positiva, la minimización de este funcional para un ε tendiendo a cero es equivalente a minimizar el momento de inercia, de tal forma que los coeficientes de la matriz W_p corresponden a:

$$W_{p,j} = \frac{v_j (\gamma_j^2 + d_j^2)}{|p_j| + \varepsilon}$$

Como los coeficientes de W_p dependen de p , la solución de los parámetros es iterativa:

$$p^{*(n+1)} = p^{0(n)} + [W_p^{(n)}]^{-1} A^T \left\{ A [W_p^{(n)}]^{-1} A^T + \lambda(\delta) [W_e^{(n)}]^{-1} \right\}^{-1} (g - A p^{0(n)})$$

La matriz de ponderación de las observaciones W_e se expresa como:

$$[W_e^{(n)}]_{ii}^{-1} = \sigma_0^2 \left\{ A [W_p^{(n)}]^{-1} A^T \right\}_{ii}$$

APLICACIONES

Problemas no-lineales: linealización de problemas sobre
determinados: minimización de momento de inercia en gravedad

Donde σ_0^2 es la estimación de la desviación standard del ruido en las observaciones. La iteración es inicializada con:

$$W_p^{(1)} = I; W_e^1 = I; p^{0(1)} = 0$$

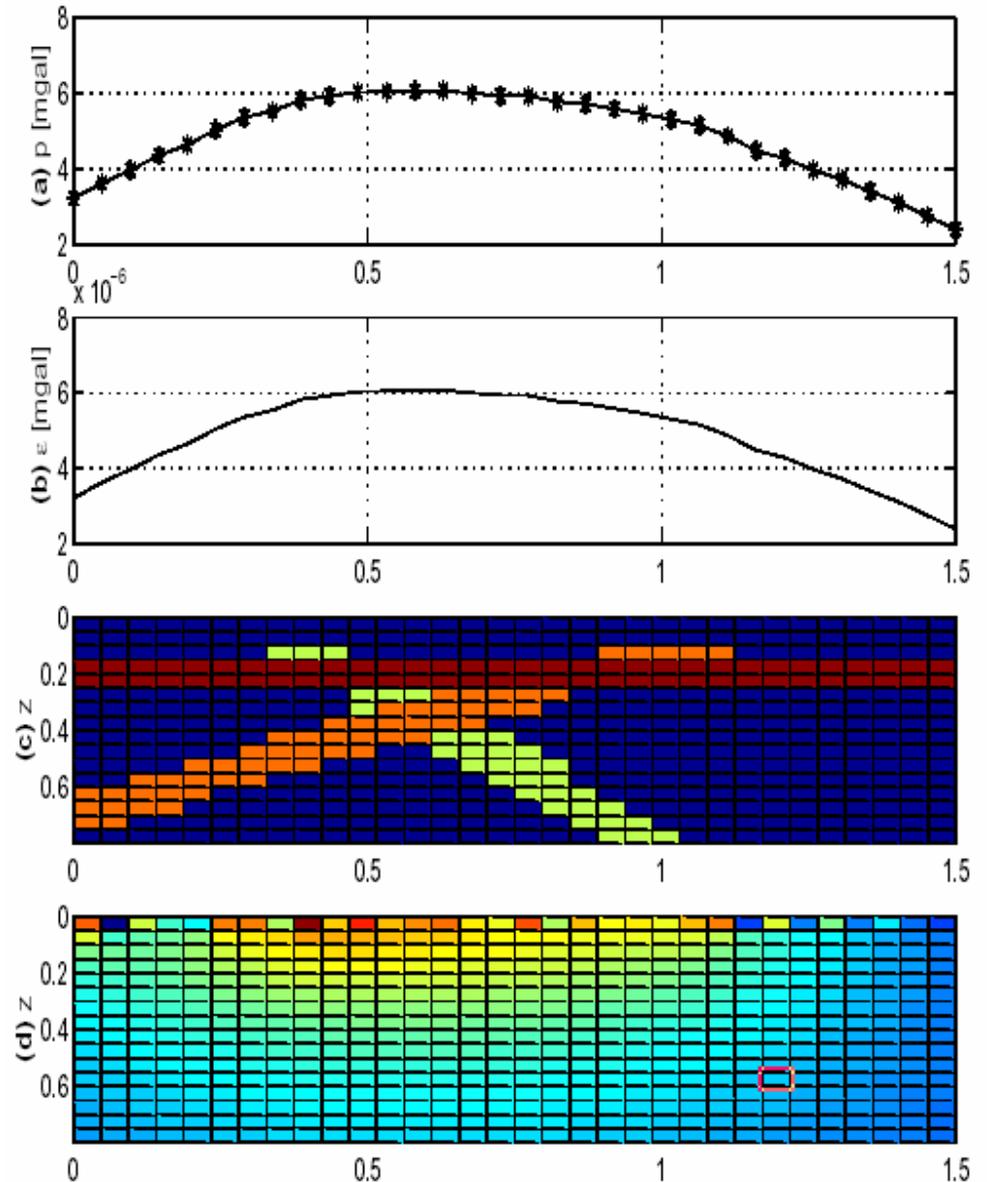
mas los parámetros:

$$\lambda(\delta) = 0.01; \sigma_o = 0.1; \varepsilon = 10^{-7}$$

APLICACIONES

Problemas no-lineales:
linealización de problemas sobre
determinados: minimización
de momento de inercia en
gravedad

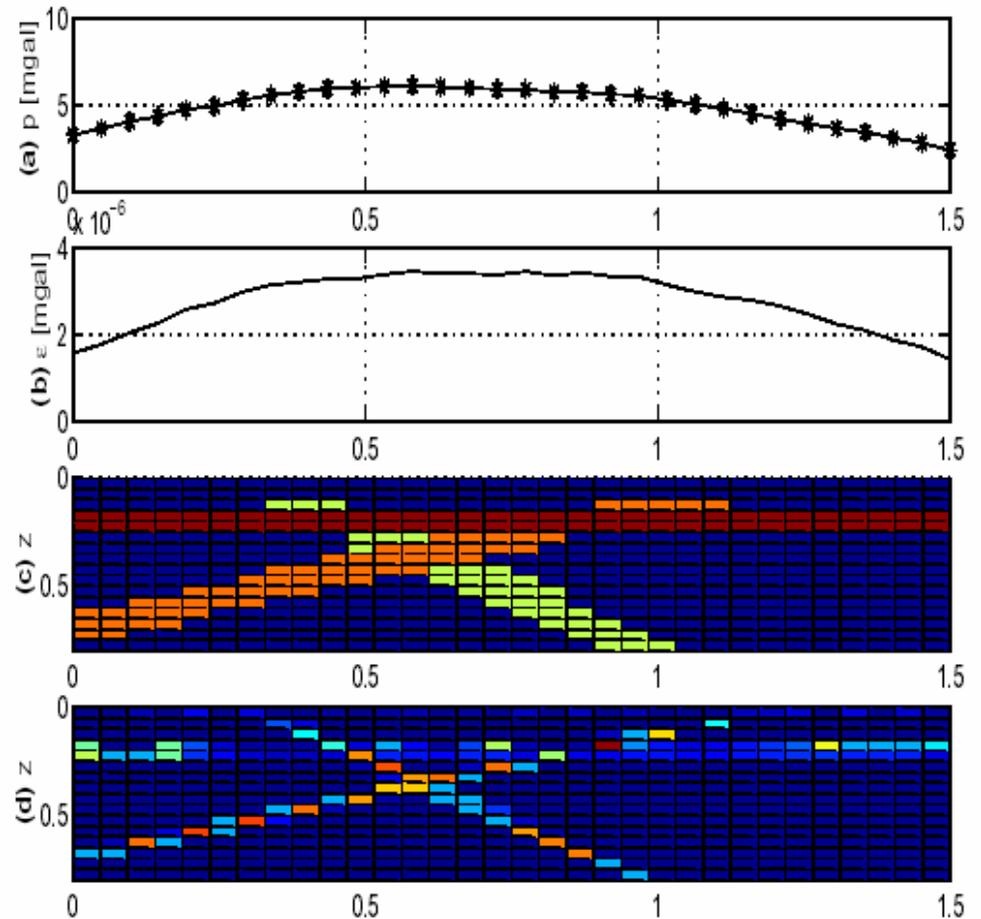
Ejemplo de inversión: 1a iteración, (a): grav observada (línea continua) y calculada (asteriscos); (b): error en el ajuste; (c): modelo teórico; (d) modelo invertido



APLICACIONES

Problemas no-lineales:
linealización de problemas sobre
determinados: minimización
de momento de inercia en
gravedad

Ejemplo de inversión: 6a iteración. Vemos que se produce un mejor ajuste del modelo teórico, en el cual la solución tiende a concentrar las masas según los ejes de inercia correspondientes a las distribuciones "reales" de las masas. Es interesante destacar que la calidad del ajuste original no se ve sustancialmente mejorado: ambas soluciones son equivalentes desde el punto de vista del ajuste de los datos.

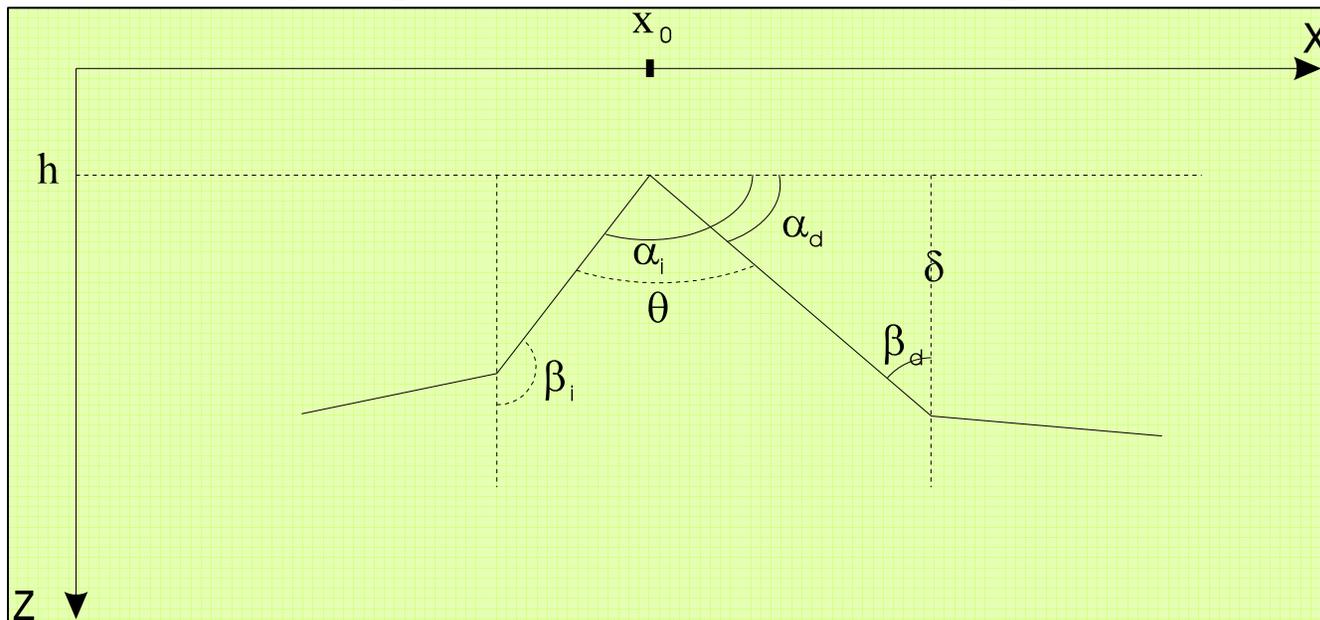


APLICACIONES

Inversión de funciones aproximadas: Deconvolución de Werner

En las secciones anteriores hemos estudiado problemas en los cuales se asume una geometría del cuerpo anómalo determinada. En el desarrollo siguiente veremos un par de métodos que permiten la obtención de una solución aproximada de los parámetros fundamentales: profundidad a la fuente y determinación de la propiedad física asociada.

En este método se considera que el basamento magnético tiene una sección transversal poligonal, como indica la figura:



APLICACIONES

Inversión de funciones aproximadas: Deconvolución de Werner

La contribución mayor a la anomalía magnética total en la vecindad del punto x_0 será:

$$T(x) = 2MC_{Im} C_I \text{sen } \theta [\cos \phi \ln R + \text{sen } \phi \phi]$$

donde:

$$\phi = I + I_m + \frac{\pi}{2} - (\alpha_i + \alpha_d)$$

I_m, I : inclinación de campo y cuerpo

$$C_I = \sqrt{\text{sen}^2 I + \cos^2 I \cos^2 (D - A)}; D : \text{declinación campo}; A : \text{azimut}$$

$$C_M = \sqrt{\text{sen}^2 I_m + \cos^2 I_m \cos^2 (D_m - A)}; D_m : \text{declinación cuerpo}$$

APLICACIONES

Inversión de funciones aproximadas: Deconvolución de Werner

Las derivadas horizontal y vertical de este vértice y evaluadas en $z=0$ corresponden a:

$$T_z = \frac{\partial T}{\partial z} = 2MC_{\text{Im}} C_l \text{sen } \theta \frac{[-\text{sen } \phi h + \cos \phi (x - x_0)]}{R^2}$$
$$T_x = \frac{\partial T}{\partial x} = 2MC_{\text{Im}} C_l \text{sen } \theta \frac{[\text{sen } \phi (x - x_0) + h \cos \phi]}{R^2}$$

o bien en forma simplificada:

$$T_z = A_v \frac{[-\text{sen } \phi h + \cos \phi (x - x_0)]}{R^2}$$
$$T_x = A_v \frac{[\text{sen } \phi (x - x_0) + h \cos \phi]}{R^2}$$

APLICACIONES

Inversión de funciones aproximadas: Deconvolución de Werner

De clases anteriores debemos recordar que las derivadas horizontal y vertical del campo magnético constituyen un par de Hilbert, y en consecuencia la derivada vertical puede ser evaluada a partir de la derivada horizontal (de fácil evaluación) de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -H \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]$$

Que en el dominio de las frecuencias corresponde a:

$$TF \left[\frac{\partial T}{\partial z} \right] (k) = i \operatorname{sgn}(k) \cdot TF \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right] (k)$$

APLICACIONES

Inversión de funciones aproximadas: Deconvolución de Werner

Si consideramos todos los vértices que contribuyen a la anomalía observada en el punto x_0 , obtenemos una sumatoria de efectos de similar tipo:

$$T_x^{tot}(x) = \sum_1^N A_n \frac{h_n \cos \phi_n + (x - x_{0n}) \text{sen} \phi_n}{h_n^2 + (x - x_{0n})^2}$$
$$T_z^{tot}(x) = \sum_1^N A_n \frac{-h_n \sin \phi_n + (x - x_{0n}) \cos \phi_n}{h_n^2 + (x - x_{0n})^2}$$

El método de Werner se basa en suponer que para una porción del perfil de observaciones se puede considerar que hay un sólo vértice que influye de manera significativa, y que la influencia de los vértices vecinos puede tenerse en cuenta usando un desarrollo en serie.

Entonces se plantea la siguiente ecuación genérica:

$$TT(x) = \frac{A + B(x - x_0)}{h^2 + (x - x_0)^2} + C + Dx + Ex^2 + \dots$$

APLICACIONES

Inversión de funciones aproximadas: Deconvolución de Werner

TT(x) puede representar

- 1) La derivada horizontal o vertical de la anomalía (vértices)
- 2) La anomalía misma

La justificación de la primera posibilidad está dada en los párrafos precedentes. La segunda posibilidad contempla el caso en el que el basamento pueda ser no magnético pero contener un dique magnético incrustado. Los términos $C + Dx + Ex^2 + \dots$ son los que tienen en cuenta la influencia de vértices vecinos o diques cercanos.

Esta expresión se puede transformar en:

$$\alpha_1 x^4 + \alpha_2 x^3 + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x + \alpha_5 + \alpha_6 xT + \alpha_7 T = Tx^2$$

Las α_i contienen h, x_0, A, B, C, D y E , que son 7 incógnitas a calcular de las observaciones TT(x)

APLICACIONES

Inversión de funciones aproximadas: Deconvolución de Werner

De estos coeficientes interesa especialmente aquellos asociados a la ubicación del cuerpo x_o y profundidad h : α_6, α_7 :

$$\begin{aligned}\alpha_6 &= 2 \cdot x_o \\ \alpha_7 &= -(h^2 + x_o^2) \\ \Rightarrow x_o &= \frac{\alpha_6}{2}; h = \sqrt{-\alpha_7 - \frac{\alpha_6^2}{4}}\end{aligned}$$

Cabe hacer notar que otros parámetros relevantes en el proceso de interpretación (como por ejemplo la magnetización del cuerpo) pueden también ser resueltos en este proceso de inversión al descomponer los restantes coeficientes del sistema de ecuaciones anterior.

APLICACIONES

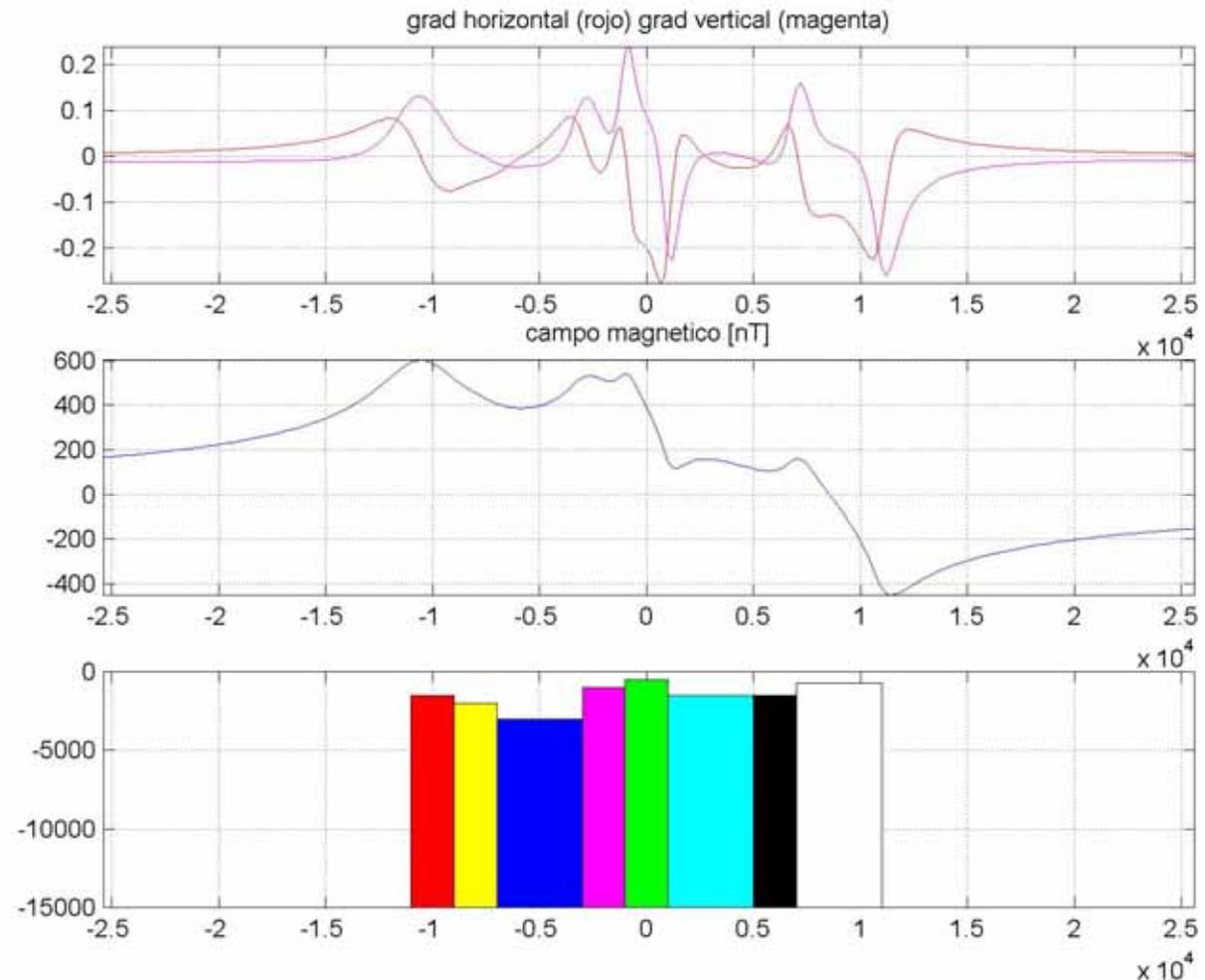
Inversión de funciones aproximadas: Deconvolución de Werner

Generalmente se recorre el perfil de valores medidos de TT con una ventana móvil, que debe tener al menos 7 puntos para poder calcular las 7 incógnitas. La ventana puede ser mayor, y en ese caso se aplica una regresión lineal. Los parámetros se obtienen con su error de ajuste, y se puede designar un valor de tolerancia para aceptación o rechazo. En las incógnitas listadas, además de la profundidad y posición del vértice, se encuentran la magnetización, el campo principal y los parámetros angulares de los vértices. Las estimaciones de estas variables son en general muy groseras, pero sirven de control para la validez de la aplicabilidad del método. Como TT puede ser la derivada horizontal o vertical de la anomalía, y también la anomalía misma, en cada ajuste (cada posición de la ventana) se pueden obtener por lo menos 3 estimaciones de h y x_0 .

APLICACIONES

Inversión de funciones aproximadas: Deconvolución de Werner

En el ejemplo siguiente se ha invertido la siguiente secuencia de diques verticales:



APLICACIONES

Inversión de funciones

aproximadas:

Deconvolución de

Werner

Algoritmo

```
%determinacion de derivadas horizontales y verticales

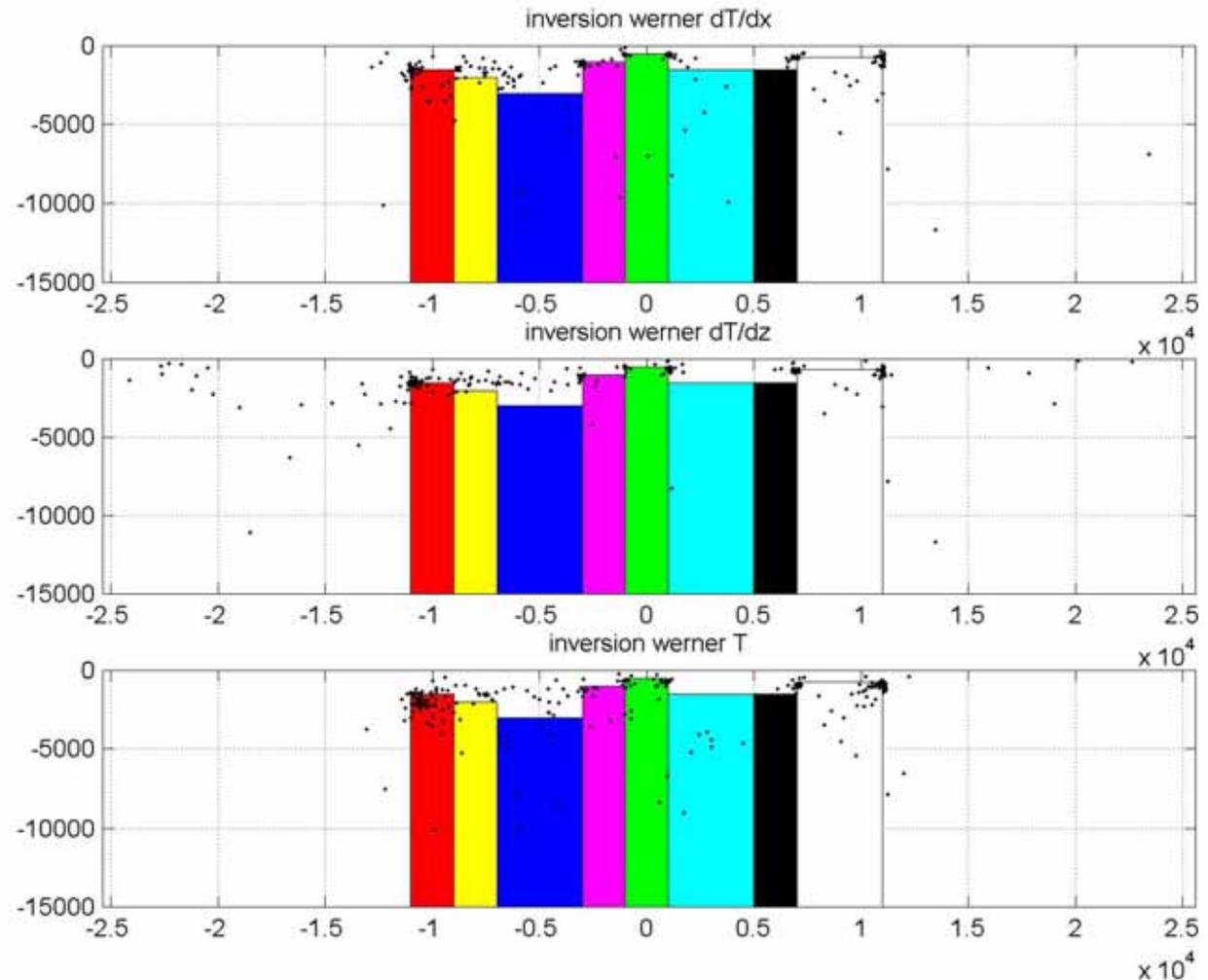
T_x=gradient(T,dx); % derivada horizontal
ii=0:1:128;
ii(130:256)=-fliplr(ii(2:128));
K=ii/(256*dx);
T_z=-real(ifft(1i*sign(K).*fft(T_x)));
% deconvolucion de werner paso 1 2 4 8
unos(1:8)=1;
for l=1:3
jj=0;
for i=1:4
j=2^(i-1);
for k=1:j:256-j*7,
xx=x(k:j:k+j*7);
if l==1,T_x1=T_x(k:j:k+j*7);end
if l==2,T_x1=T_z(k:j:k+j*7);end
if l==3,T_x1=T(k:j:k+j*7);end

x_mat=[xx.^4; xx.^3; xx.^2; xx; unos; xx.*T_x1; T_x1]';
b_mat=T_x1.*xx.^2;
alfa=inv(x_mat'*x_mat)*x_mat'*b_mat';
if -alfa(7)-(alfa(6)^2)/4 >0,
jj=jj+1;
x0(jj)=alfa(6)/2;
h0(jj)=sqrt(-alfa(7)-(alfa(6)^2)/4);
end
end
end
end
```

APLICACIONES

Inversión de funciones aproximadas: Deconvolución de Werner

Se utilizo paso de 1,2,4, y 8 intervalos de muestreo. Como la magnetización de los diques es constante solo aparecen transiciones bien marcadas cuando hay cambios de relieve en el basamento magnético



APLICACIONES

Inversión de funciones aproximadas: Deconvolución de Euler

Una última metodología de uso común en la estimación de la profundidad a una determinada interfase con contraste geofísico en los métodos de potencial, lo constituye la deconvolución de Euler. Al igual que el método de Werner esta técnica es apropiada para una primera estimación de la profundidad al basamento (y también la intensidad de la propiedad física muestreada) de grandes volúmenes de datos en donde no sea posible disponer de una caracterización acabada de la fuente.

Una función V se dice homogénea de grado n si cumple la ecuación diferencial de Euler:

$$x \frac{\partial V}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial y} + z \frac{\partial V}{\partial z} = -nV$$

APLICACIONES

Inversión de funciones aproximadas: Deconvolución de Euler

Se puede demostrar además que derivadas direccionales de la ecuación de Euler son también homogéneas, por ejemplo la deriva c/r z de V:

$$x \frac{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)}{\partial x} + y \frac{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)}{\partial y} + z \frac{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)}{\partial z} = -(n+1) \frac{\partial V}{\partial z}$$

si $V=1/r$, satisface la ecuación de Euler, en consecuencia el potencial gravitatorio $V = \frac{Gm}{r}$ también es solución de esta ecuación con $n=1$. A

su vez la gravedad que es la derivada z del potencial cumple la relación de Euler con $n=2$. Otras formas simples de fuentes de potencial también cumplen esta ecuación con ordenes crecientes de n.

APLICACIONES

Inversión de funciones aproximadas: Deconvolución de Euler

Para datos de potencial T_i (ya sea gravedad o magnetismo) se cumple en general la siguiente ecuación de Euler:

$$\left(x_i - x_o\right) \frac{\partial T_i}{\partial x} + \left(y_i - y_o\right) \frac{\partial T_i}{\partial y} + \left(z_i - z_o\right) \frac{\partial T_i}{\partial z} = -n(T_i - B)$$

donde B es un campo regional o de referencia, y n se denomina el **índice estructural**. Valores de n para distintos cuerpos simples se adjuntan en la siguiente tabla.

Indice	Cuerpo	
n	gravedad	magnetismo
0	sill/dique	contacto
0.5	cinta	escalón
1	cilindro	dique
2	esfera	cilindro
3		esfera

APLICACIONES

Inversión de funciones aproximadas: Deconvolución de Euler

Considerando un conjunto de observaciones, cada una de ellas cumple la ecuación de Euler y en consecuencia puede ser representada como un sistema de ecuaciones en el cual las incógnitas corresponden a la ubicación de la fuente causante de la anomalía (x_0 , y_0 , z_0), eventualmente el índice n :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta T_1}{\partial x} & \frac{\partial \Delta T_1}{\partial y} & \frac{\partial \Delta T_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \Delta T_2}{\partial x} & \dots & \dots \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \Delta T_i}{\partial x} & \frac{\partial \Delta T_i}{\partial y} & \frac{\partial \Delta T_i}{\partial z} \\ \frac{\partial \Delta T_n}{\partial x} & \frac{\partial \Delta T_n}{\partial y} & \frac{\partial \Delta T_n}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} \Delta T_1 + x_1 \frac{\partial \Delta T_1}{\partial x} + y_1 \frac{\partial \Delta T_1}{\partial y} + z_1 \frac{\partial \Delta T_1}{\partial z} \\ \Delta T_2 + x_2 \frac{\partial \Delta T_2}{\partial x} + y_2 \frac{\partial \Delta T_2}{\partial y} + z_2 \frac{\partial \Delta T_2}{\partial z} \\ \vdots \\ \Delta T_i + x_i \frac{\partial \Delta T_i}{\partial x} + y_i \frac{\partial \Delta T_i}{\partial y} + z_i \frac{\partial \Delta T_i}{\partial z} \\ \Delta T_n + x_n \frac{\partial \Delta T_n}{\partial x} + y_n \frac{\partial \Delta T_n}{\partial y} + z_n \frac{\partial \Delta T_n}{\partial z} \end{bmatrix}$$

APLICACIONES

Inversión de funciones aproximadas: Deconvolución de Euler

Este sistema de ecuaciones se resuelve de forma similar al esquema propuesto para la deconvolución de Werner:

- Se selecciona un índice estructural acorde con la geología de los cuerpos esperados
- Se determina un paso de muestreo y se toma un número significativo de puntos para realizar una inversión de matrices estable.
- Se procede a continuación a determinar las derivadas horizontales (mediante diferencias) y verticales (transformada de hilbert)
- Se invierte la matriz de derivadas determinando la ubicación de la fuente para la ventana espacial elegida
- Se avanza en el perfil desplazando la ventana de muestreo hasta completar las observaciones
- Se aumenta el muestreo para “mapear” profundidades mayores y se repite toda la secuencia anterior.