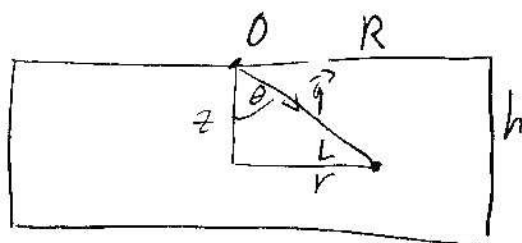


Se desea calcular la anomalía gravimétrica producida por un cilindro con el objetivo de realizar una corrección topográfica. El punto de cálculo es en la cara superior del cilindro, en su centro.



Esfera h, cilindro ρ
Radio R

$$\cos \theta = \frac{z}{L}$$

$$dg = - \frac{G \rho dV}{L^2}$$

L = distancia de los puntos del cilindro al punto de medición (el origen)
 $L = \sqrt{r^2 + z^2}$

Se considera la componente vertical de la atracción gravitatoria.

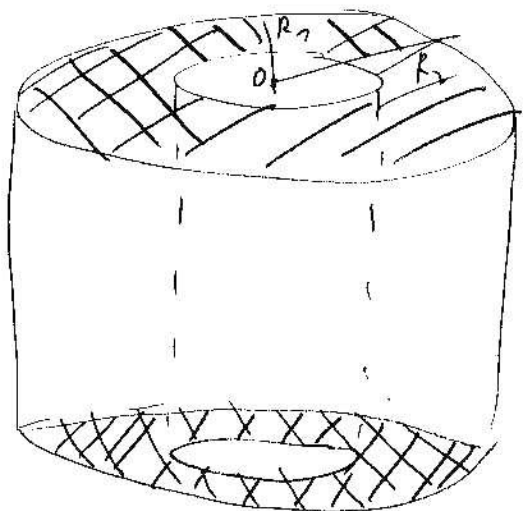
$$dg = - \frac{G \rho dV}{L^2} \cos \theta = - \frac{G \rho dV z}{L^3}$$

Se usan coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} z &: 0 \rightarrow h \\ \theta &: 0 \rightarrow 2\pi \\ r &: 0 \rightarrow R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h - \frac{G \rho r dr d\theta dz}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = - G \rho 2\pi \int_0^R \int_0^h \frac{z r dr dz}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \\ &= - G \rho 2\pi \int_0^R \left. \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{1/2}} \right|_0^h = - G \rho 2\pi \int_0^R \left[\frac{r}{\sqrt{h^2 + r^2}^{1/2}} - \frac{r}{\|r\|} \right] dr \\ &= - G \rho 2\pi \int_0^R \left(\frac{r}{(h^2 + r^2)^{1/2}} - 1 \right) dr = - 2\pi G \rho \left(\sqrt{h^2 + r^2} - r \right) \Big|_0^R \\ &= - 2\pi G \rho \left(\sqrt{h^2 + R^2} - h - R \right) = 2\pi G \rho (h + R - L), L = \sqrt{h^2 + R^2} \end{aligned}$$

Para aplicar esta fórmula, se considera un cilindro hueco de radio interno R_1 y externo R_2 . El hecho de que sea hueco no hace que se sume la topografía absoluta al punto de medición.



La atracción del cilindro hueco o la diferencia entre la atracción de 2 cilindros de radios R_1 y R_2 :

$$g_T = 2\pi G\rho [(h+R_2-L_2) - (h+R_1-L_1)]$$

$$= 2\pi G\rho (R_2 - R_1 - (L_2 - L_1)) \quad (*)$$

$$R_2 = R_1 + \Delta R$$

Ahora se calcula $L_2 - L_1$:

$$L_2 - L_1 = \sqrt{R_2^2 + h^2} - \sqrt{R_1^2 + h^2} = \frac{\sqrt{(R_1 + \Delta R)^2 + h^2} - \sqrt{R_1^2 + h^2}}{\Delta R} \Delta R$$

$$\sim \Delta R \cdot \frac{2\sqrt{R_1^2 + h^2}}{\partial R} (R_1) = \frac{R_1 \Delta R}{\sqrt{R_1^2 + h^2}}$$

en esta forma y reemplazando en $(*)$

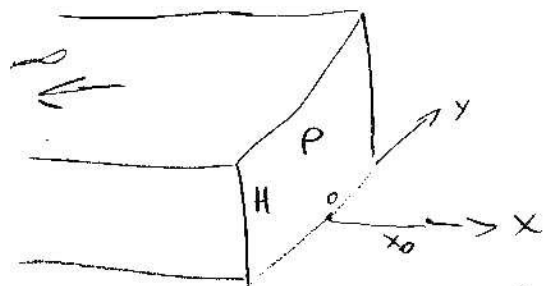
$$= 2\pi G\rho \left(\cancel{R_1} + \Delta R - \cancel{R_1} - \Delta R \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + h^2}} \right) = 2\pi G\rho \Delta R \left(1 - \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + h^2}} \right)$$

$$= 2\pi G\rho \Delta R \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{h}{R_1}\right)^2}} \right) = 2\pi G\rho \Delta R \left(1 - \left(1 + \left(\frac{h}{R_1}\right)^2 \right)^{-1/2} \right)$$

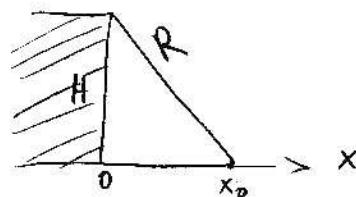
Como $h \ll R_1$, $\left(\frac{h}{R_1}\right)^2$ es pequeño y se puede usar $(1+x)^n = 1 + nx$ con x pequeño

$$g_T = 2\pi G\rho \Delta R \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{R_1}\right)^2 \right) \right) = \pi G\rho \Delta R \left(\frac{h}{R_1}\right)^2$$

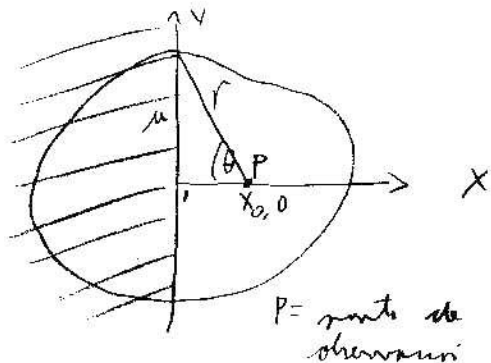
2) Se desea calcular la gravedad en un punto P producida por un bloque de extensión infinita en el semiplano ($|y| < \infty$, $x < 0$) y de altura H y densidad ρ con el objeto de calcular una corrección topográfica. El cálculo se hará integrando en rectas paralelas.



Perfil



Vista en Planta



El círculo determina el dominio de integración

$$d g_T(P) = \rho \int_{\text{plano}(x,y)} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) dS \quad x \leq 0$$

Fórmula vista en clara para corrección topográfica

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + y^2}$$

$$R = \sqrt{r^2 + H^2}$$

distancia en el plano (x,y) a P
" del techo del cuerpo a P

$$dS = \text{diferencial de área} = r \theta dr$$

$$\text{Por geometría } \theta = \arctg \frac{u}{x_0}$$

$$\text{con } u = \sqrt{r^2 - x_0^2}, \quad r = \sqrt{u^2 + x_0^2}$$

$$u^2 = r^2 - x_0^2, \quad \text{si } r \rightarrow x_0, u \rightarrow 0$$

$$2u du = 2r dr, \quad r \rightarrow \infty, u \rightarrow \infty$$

Realizaremos cambio de variable para simplificar el problema

$$R^2 = r^2 + H^2 = u^2 + (x_0^2 + H^2) = u^2 + R_0^2, \text{ definimos } R_0$$

$$R_0 = \sqrt{x_0^2 + H^2}, \quad R = \sqrt{u^2 + R_0^2}$$

De esta forma:

$$g_T = 2G\rho \int_{\substack{x,y \\ x \leq 0}} dS \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) = 2G\rho \int_{x_0=r}^{r=\infty} \theta(r) r dr \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$$

$$= 2G\rho \int_0^\infty \text{Arctg} \left(\frac{u}{x_0} \right) u du \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) = 2G\rho \int_0^\infty \text{Arctg} \left(\frac{u}{x_0} \right) \left[u \left(\frac{1}{\sqrt{u^2+x_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{u^2+R_0^2}} \right) \right] du$$

El término en el corchete cuadrado se puede escribir como derivada

$$u \left(\frac{1}{\sqrt{u^2+x_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{u^2+R_0^2}} \right) = \frac{d}{du} \left(\sqrt{u^2+x_0^2} - \sqrt{u^2+R_0^2} \right)$$

En la integral

$$g_T = 2G\rho \int_0^\infty \text{Arctg} \left(\frac{u}{x_0} \right) \frac{d}{du} \left(\sqrt{u^2+x_0^2} - \sqrt{u^2+R_0^2} \right) du$$

Integrando por partes:

$$a = \text{Arctg} \frac{u}{x_0}, \quad \frac{d}{du} \left(\sqrt{u^2+x_0^2} - \sqrt{u^2+R_0^2} \right) = b$$

$$da = \frac{x_0 du}{u^2+x_0^2}, \quad \sqrt{u^2+x_0^2} - \sqrt{u^2+R_0^2} = b$$

$$\Rightarrow g_T = 2G\rho \left[\text{Arctg} \frac{u}{x_0} \left(\sqrt{u^2+x_0^2} - \sqrt{u^2+R_0^2} \right) \right]_0^\infty - x_0 \int_0^\infty \frac{\sqrt{u^2+x_0^2} - \sqrt{u^2+R_0^2}}{u^2+x_0^2} du$$

$$= 2G\rho x_0 \underbrace{\int_0^\infty \frac{\sqrt{u^2+R_0^2} - \sqrt{u^2+x_0^2}}{u^2+x_0^2} du}_I$$

Usando las definiciones de r y R .

$$I = x_0 \int_0^\infty \frac{R-r}{u^2+x_0^2} du, \quad \text{Pero } R^2-r^2 = H^2, \quad R-r = \frac{H^2}{R+r}$$

$$\Rightarrow I = x_0 \int_0^\infty \frac{H^2 du}{(R+r)(u^2+x_0^2)} = x_0 \int_0^\infty \frac{(R_0^2-x_0^2) du}{(u^2+x_0^2)(\sqrt{u^2+R_0^2} + \sqrt{u^2+x_0^2})}$$

$$= x_0 \int_0^\infty \frac{(\sqrt{R_0^2+u^2})^2 - (\sqrt{u^2+x_0^2})^2}{(u^2+x_0^2)(\sqrt{u^2+R_0^2} + \sqrt{u^2+x_0^2})} du$$

$$= x_0 \int_0^\infty \frac{[\sqrt{u^2+R_0^2} - \sqrt{u^2+x_0^2}][\sqrt{u^2+R_0^2} + \sqrt{u^2+x_0^2}]}{(u^2+x_0^2)[\sqrt{u^2+R_0^2} + \sqrt{u^2+x_0^2}]} du$$

$$= X_0 \int_0^{\infty} \frac{(\sqrt{u^2 + R_0^2} - \sqrt{u^2 + X_0^2})}{u^2 + X_0^2} du = X_0 \int_0^{\infty} \left(\frac{\sqrt{u^2 + R_0^2}}{u^2 + X_0^2} - \frac{1}{\sqrt{u^2 + X_0^2}} \right) du$$

Dividimos esto en 2 primitivas $a = \int \frac{\sqrt{u^2 + R_0^2}}{u^2 + X_0^2} du$, $b = \int \frac{1}{\sqrt{u^2 + X_0^2}} du$

Por tablas de integrales:

$$a = \int \frac{1}{\sqrt{u^2 + R_0^2}} + (R_0^2 - X_0^2) \int \frac{1}{(u^2 + X_0^2)\sqrt{u^2 + R_0^2}}$$

$$b = \int \frac{1}{\sqrt{u^2 + R_0^2}} + \frac{H}{X_0} \operatorname{Arctg} \frac{uH}{X_0 \sqrt{u^2 + R_0^2}} \\ = \ln(u + \sqrt{u^2 + R_0^2}) + \frac{H}{X_0} \operatorname{Arctg} \frac{uH}{X_0 \sqrt{u^2 + R_0^2}}$$

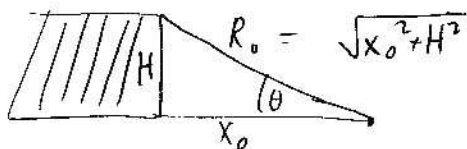
De esta forma:

$$I = \left[X_0 \ln(u + \sqrt{u^2 + R_0^2}) + H \operatorname{Arctg} \frac{uH}{X_0 \sqrt{u^2 + R_0^2}} - X_0 \ln(u + \sqrt{u^2 + X_0^2}) \right] \Big|_0^{\infty}$$

$$I = \left[X_0 \ln \left(\frac{u + \sqrt{u^2 + R_0^2}}{u + \sqrt{u^2 + X_0^2}} \right) + H \operatorname{Arctg} \frac{uH}{X_0 \sqrt{u^2 + R_0^2}} \right] \Big|_0^{\infty}$$

$$I = H \operatorname{Arctg} \frac{H}{X_0} - X_0 \ln \frac{R_0}{X_0}$$

Desde el punto donde se calcula la integral hasta el techo de la topografía se tiene el siguiente perfil:



$$I = H \operatorname{Arctg} \frac{H}{X_0} - X_0 \ln \frac{\sqrt{X_0^2 + H^2}}{X_0}$$

$$g_T = 2\pi \gamma H \left[\operatorname{Arctg} \frac{H}{X_0} + \frac{X_0}{H} \ln \frac{X_0}{\sqrt{X_0^2 + H^2}} \right] \quad \text{Definiendo } x' = \frac{X_0}{H}$$

$$g_T = 2\pi \gamma H \left[\operatorname{Arctg} \frac{1}{x'} + x' \ln \frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}} \right]$$