Física
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

INDICACIONES:

Fecha de Entrega: Lunes 05 de Octubre en la Of. de la Sra. Carmen Belmar.

PROBLEMA # 1

El Lagrangeano de Dirac:

$$L = \bar{\psi}\,(\,i\gamma^{\mu}\,\partial_{\mu} - m)\,\psi,$$

es invariante bajo una transformación global $\psi(x) \rightharpoondown \psi'(x) = e^{-i\,\alpha}\,\psi(x)$, α es constante.

Considere una variación pequeña y arbitraria de α, tal que

$$\alpha \rightharpoondown \alpha'(x) = \alpha + \delta\alpha(x) \quad \text{donde } \delta\,\alpha(x)$$

representa una variación dependiente de las coordenadas temporales y espaciales. Demuestre que esta variación de la acción de Dirac, que además respete la ecuaciones de movimiento (variación *on shell*) genera la siguiente ecuación: $\partial_{\mu}(\bar{\psi}\,\gamma^{\mu}\,\psi\,) = 0$. Sabemos que $\bar{\psi}\,\gamma^{\mu}\,\psi$ transforma como un vector contravariante, de esta forma esta expresión se puede identificar como un vector J^{μ}. Demuestre que: $J^{o} \equiv \sum_{a=0}^{a=3} |\psi_a|^2 > 0$.

Por tanto esta componente admite ser identificada como una Probabilidad (es siempre positiva) y el cuadri-vector J^{μ} interpretado como una corriente de probabilidad. Con esta información, la ecuación transmite más información al ser escrita como $\partial_t P + \nabla\cdot\vec{J} = 0$.

PROBLEMA # 2

Considere la ecuación de Dirac con un campo electromagnético:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\,(\,\gamma^{\mu}(\,i\partial_{\mu} - q\,A^{\mu}) - m)\,\psi, - F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu} - J^{\mu}\,A_{\mu}.$$

La corriente J^{μ} es un campo externo, por ejemlo proveniente del núcleo atómico o de las partículas contenidas en él. Este es el Lagrangeano básico que describe y explica la mayoría de la química y de la ciencia de los materiales.

a.- Demuestre que este Lagrangeano es invariante bajo las transformaciones simultáneas siguientes:

$$A_{\mu}(x) \rightarrow A'_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) + \partial_{\mu}\,\chi(x), \qquad \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-i\,q\,\chi(x)}\,\psi(x).$$

b.- La ecuación de Dirac introdujo, entre otras ideas, las antipartículas. esto es intercambiar materia por antimateria. La operación que realiza este cambio es tomar el complejo conjugado. A continuación se pide verificar que el lagrangeano de Dirac no es invariante bajo la operación de tomar el complejo conjugado y es necesario introducir algunas operaciones.

i.- Usando la representación chiral de las matrices γ: todas reales menos $(\gamma^2)^* = -\gamma^2$, demuestre que La ecuación de Dirac se convierte en:

$$[\gamma^{\mu}(i\,\partial_{\mu} - q\,A^{c}_{\mu}) - m]\,(\gamma^2\,\psi*) = 0.$$

Esto indica que a partir de una solución ψ con energía positiva y con carga q de la ecuación de Dirac, $(\gamma^2\,\psi^*)$ es una solución con energía negativa y con un campo conjugado A^c_μ.

ii.- Defina $\psi^c = -i\,\gamma^2\,\psi^*$. estudie cómo transforman los distintos elementos relevantes del lagrangeano de Dirac: $\bar{\psi}\,\psi$, $\bar{\psi}\,\gamma^\mu\,\psi$, y finalmente $\bar{\psi}\,\gamma^\mu\,i\,\partial_\mu\,\psi$ bajo esta transformación. Verifique que el nuevo lagrangeano tiene la misma forma que el original, cambiando A_μ por $A^c_\mu = -A_\mu$ y cambiando el signo de la corriente externa J_μ. Esto es razonable puesto que en un átomo esta corrrient proviene de las componentes del núcleo, que como tienen carga, también cambian de signo al conjugar la carga.

NOTA: Al estudiar la transformación de $\bar{\psi}\,\psi$ se requiere tomar la transpuesta. En este caso debe considerar información adicional, no provista acá: $\psi^*_a\,\psi_b = -\psi_b\,\psi^*_a$. Esto es porque los operadores de campos espinoriales anticonmutan. Claramente esta información no está en nuestra teoría clásica, pero debe ser usada para obtener el resultado correcto (cuántico).

PROBLEMA # 3

Describa los pasos necesarios para obtener una aproximación de bajas energías de la ecuación de Dirac con un campo electromagnético. Debe obtener la siguiente ecuación (con dos componentes):

$$i\,\frac{\partial\,\phi}{\partial\,t} = \left[\frac{1}{2\,m}\,(-i\,\nabla - q\,\vec{A})^2 + q\,A_o - \frac{q\,\sigma}{2\,m}\cdot\vec{B}\right]\phi.$$

esta ecuación contiene otro de los aciertos de la ecuación de Dirac: el magnetón de Bohr $\mu_B = (e\,\hbar)/(2\,m)$ alineado en oposición al spin del electrón (puesto que $q = -e$).

En este cálculo hay cambios de variables sutiles como $\phi \equiv e^{i\,m\,t}\,(\psi_L + \psi_R)$ y $\chi = e^{i\,m\,t}\,(\psi_L - \psi_R)$ y aproximaciones, como considerar bajas energías de modo que en la ecuación de dos componentes ocurre que $\psi_L \approx \psi_R$. Por esta razón es mejor que busque esta aproximación en un libro, la estudie y la explique an esta sección.